التحليل التوفيقي

Combinatorial Analysis

- التحليل التوفيقي هو فرع من الرياضيات الذي يدرس كيفية عد طرق ترتيب الأشياء. يوفر طرقا للتعداد
تستخدم في حساب الاحتمالات.

- يعرف التحليل التوفيقي ايضا بقوانين " **طرق العد** "

الفهرس

Outline

1- مفهوم العاملي

تعريف ليكن n عدد طبيعي . نرمز لعاملي n بالرمز n! حيث

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1.$$

مثال $4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$

خاصية $n! = n \times (n-1)\,!$

امثلة,

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5\times 4!}{4!} = 5 \qquad 5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120,$$

$$(n+1)! = (n+1) \times n\,!$$

$$\frac{21}{7!} - \frac{3}{5!} = -\frac{15}{6!} \quad , \quad \frac{1}{7!} + \frac{1}{3!} = \frac{1}{7!} + \frac{4\times 5\times 6}{3!\,(4\times 5\times 6)} = \frac{121}{7!} \quad ,$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1), \forall n$$

2- المبدأ الأساسي للتحليل التوفيقي (المبدأ الأساسي للعد)

تعريف المبدأ الأساسي للعد هو قاعدة رياضية, تُستخدم لحساب عدد النتائج الممكنة لتجربة ما

شرح المبدأ لنفرض ان هناك تجربة Ω تتألف من سلسلة من التجارب المستقلة Ω_i $(1\le i\le n)$:

التجربة 1 $=\Omega_1$ تعطي m_1 نتيجة $m_1 = card\,\Omega_1$

التجربة 2 $=\Omega_2$ تعطي m_2 نتيجة $m_2 = card\,\Omega_2$

⋮ ⋮

التجربة n $=\Omega_n$ تعطي m_n نتيجة $m_n = card\,\Omega_n$

Dr. Djiab

مبدأ الضرب : هو عدد الطرق الكلي لإنجاز التجربة: هو حاصل ضرب عدد النتائج لكل تجربة داخلية مستقلة لها

$$card\ \Omega = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

مثال 1:

إذا كان لديك 3 قمصان و سروالين و حذائين، وترغب في اختيار طقم لتلبسه اليوم، فإن عدد الخيارات المتاحة لك هو

3(قمصان) × 2 (سراويل) × 2 (أحذية) = 12خيارًا.

مثال2: نرمي حجر نرد و عملة معدنية, ماهي عدد النتائج الممكن المتحصل عليها؟

نلاحظ ان حجر النرد يملك أوجه مختلفة 1,2,3,4,5,6 بينما العملة المعدنية تحمل وجهين,

اذن عدد النتائج الكلية الممكنة هي **6×2=12**

مبدأ الجمع :

يستخدم لحساب عدد الطرق الممكنة لحدوث أحداث مختلفة غير متداخلة، حيث يمكن أن يحدث أحد الأحداث أو الآخر ولكن ليس كليهما في نفس الوقت

$$\text{card } \Omega = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

مثال1 لنفترض أنك تخطط لحضور مناسبة، ولديك خياران:

1. **إما أن ترتدي بدلة رسمية (4 خيارات).**
2. **أو ترتدي ملابس رياضية (3 خيارات).**

إذا أردت حساب عدد الخيارات الممكنة ، فهنا نستخدم مبدأ الجمع، لأنك ستختار إما من البدلات أو من الملابس الرياضية، وليس من كليهما معًا 4+3=7.

مثال2: نرمي حجر نرد او عملة معدنية, ماهي عدد النتائج الممكن المتحصل عليها؟

عدد النتائج الكلية الممكنة هي **6+2=8**

3- الترتيبات

لنفرض انه لدينا مجموعة E مكونة من n عنصر , نريد **سحب** مجموعة جزئية مكونة من K عنصر 1≤K≤n ,

يتم **السحب على التوالي** **بترتيب** **معين**, بطريقتين اما بالتكرار او بدونه (بإرجاع و بدون إرجاع)

أ)- الترتيبات بدون تكرار

تعريف نعرف المتتالية المرتبة بدون تكرار ل K عنصر من n بالعلاقة

$$A_n^K = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-K+1) = \frac{n!}{(n-K)!}, \qquad 1 \le K \le n$$

ب)- الترتيبات مع التكرار (قائمة)

تعريف نعرف المتتالية المرتبة مع التكرار ل K عنصر من n بالعلاقة

$$\alpha_n^K = n^K$$

امثلة

- كم عدد الارقام المكونة من 4 اعداد (من 0 الى 9) التي يمكن تشكيلها؟ n=10, K=4

- مع تكرار $\alpha_{10}^{4} = 10^4$
- بدون تكرار $A_{10}^{4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$

- من ارقام احادية بدون تكرار $A_4^4 = 4!$

- كم عدد أرقام الهاتف المكونة من 8 أعداد التي يمكن تكوينها؟ $\alpha_n^k = 10^8$

- كم عدد أرقام الهاتف المكونة من 8 أرقام التي لا تحتوي على الرقم 0؟ $\alpha_n^k = 9^8$

- في مسابقة رياضية جمعت 18 رياضياً، على الميدالية الذهبية، فضية وواحدة برونزية. كم عدد التوزيعات الممكنة (قبل المنافسة بالطبع...)؟

$$A_{18}^{3} = 4896$$

مثال لنفرض انه لدينا مجموعة مكونة من 3 عناصر

$$S = \{a, b, c\}$$

1. عدد الترتيبات التي يمكن بموجبها تشكيل مجموعات جزئية ثنائية بدون تكرار

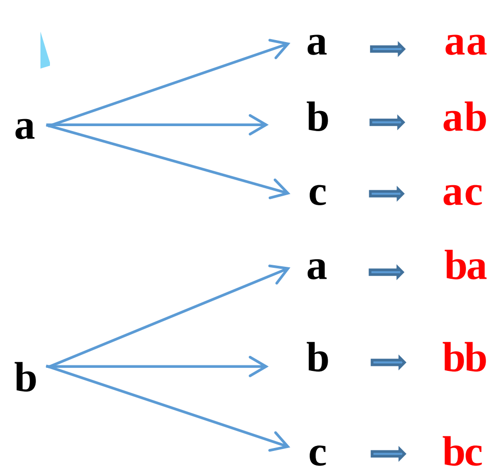
$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$$

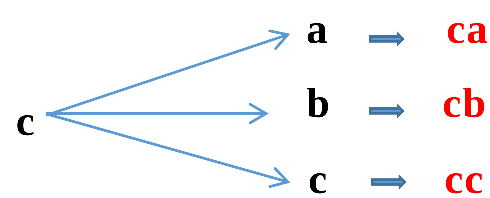
$\{a,b\}, \quad \{b,a\}, \quad \{a,c\}, \quad \{c,a\}, \quad \{b,c\}, \quad \{c,b\}$

2. عدد الترتيبات التي يمكن بموجبها تشكيل مجموعات جزئية ثنائية مع تكرار

$$\alpha_3^2 = 3^2 = 9$$

$\{a,a\}, \quad \{b,b\}, \quad \{c,c\}, \quad \{a,b\}, \quad \{b,a\}, \quad \{a,c\}, \quad \{c,a\}, \quad \{b,c\}, \quad \{c,b\}$





مثال كم عدد كلمات السر بدون تكرار التي يمكن تشكيلها من رقمين (من 0 الى 9) و ثلاث حروف (28 حرف)

حسب مبدا العد $\mathrm{A}_{10}^{2} \times \mathrm{A}_{28}^{3} = 10 \times 9 \times 28 \times 27 \times 26$

4 - التبديلات

أ)- التبديلات بدون تكرار

تعريف عدد التباديل ذات n عنصر يعطى بالعلاقة التالية $P_n = \mathrm{n}!$

حالة خاصة : $A_n^n = P_n$

مثال لنفرض انه لدينا مجموعة مكونة من 3 عناصر

$$S = \{a, b, c\}$$

1. كم عدد التبديلات

$$P_3 = 3! = 6$$

$$\{a, b, c\}, \quad \{a, c, b\}, \quad \{b, c, a\}, \quad \{b, a, c\}, \quad \{c, b, a\}, \quad \{c, a, b\}$$

كل واحد من هذه الترتيبات الستة المختلفة يعرف بالتبديلة

ب)- التبديلات مع التكرار

تعريف اذا كان هناك عنصر **واحد متماثل مكرر** n_1 مرة من بين n عنصر,
في هذه الحالة يعطى عدد التباديل بالعلاقة التالية

$$P_n^{\mathrm{n}_1} = \frac{P_n}{P_{\mathrm{n}_1}} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{n}_1!}$$

مثال كم عدد التبديلات الممكنة في **المجموعة** $\{2, 1, 0, 1\}$

الرقم {1} مكرر مرتين من بين 4 ارقام

$$P_4^2 = \frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

تعريف اذا كان هناك **m عنصر مكرر** من بين n عنصر, حيث

- n_1 يمثل عدد تكرارات العنصر **الأول**
- n_2 يمثل عدد تكرارات العنصر **الثاني**

⋮ ⋮

- n_m يمثل عدد تكرارات العنصر **m**

في هذه الحالة يعطى عدد التباديل بالعلاقة التالية

$$P_n^{(n_1,n_2,\cdots,n_m)} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_m!}$$

مثال بتبديل موضع الحروف, ما هو عدد الكلمات التي يمكن تشكليها من الكلمة

I. Mathematics

حيث هذه الحروف m,a,t الثلاث مكررة مرتين $n_1= n_2=n_3=2$ ومنه

$$P_{11}^{(2,2,2)} = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = 4989600 \text{ words}$$

II. TABLEAU

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 2520$$

5- التوفيقات

- ✓ **في حساب عدد الطرق التي يمكن من خلالها إسناد دور الرئيس ونائب الرئيس لمجموعة مكونة من 3 أشخاص: علي، رشا ، ليلي.**

إذا اخترنا علي ثم ليلى ، فهو ليس مثل ليلى ثم علي لأن الاختيار الأول سيكون الرئيس والثاني نائب الرئيس (الترتيبات).

Dr. Djiab

ومع ذلك، إذا أردنا ببساطة لجنة مكونة من شخصين، فلا يهم الترتيب بين علي و ليلى (التوفيقات).

- ✓ **التوفيقة تمكننا من الاجابة على السؤال: بكم طريقة يمكن اختيار P عنصر من اصل nعنصر؟**

مثال لنفرض انه لدينا مجموعة مكونة من 4 حروف {a,b,c,d}

- ما هو عدد الكلمات الثلاثية الممكن تكوينها من هذه الحروف
- ما هو عدد التوافيق الممكنة

الحل

التوفيقات	العينات المرتبة
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}, \{a,c,b\}, \{b,a,c\}, \{b,c,a\}, \{c,a,b\}, \{c,b,a\}$
$\{a,b,d\}$	$\{a,b,d\}, \{a,d,b\}, \{b,a,d\}, \{b,d,a\}, \{d,a,b\}, \{d,b,a\}$
$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}, \{a,d,c\}, \{c,a,d\}, \{c,d,a\}, \{d,a,c\}, \{d,c,a\}$
$\{b,c,d\}$	$\{b,c,d\}, \{b,d,c\}, \{c,b,d\}, \{c,d,b\}, \{d,b,c\}, \{d,c,b\}$

Dr. Djiab

نلاحظ من الجدول ان عدد التراتيب A_4^3 هو اما عدد التوافيق فهو أربعة

****

لنفرض انه لدينا مجموعة E مكونة من n عنصر , نريد سحب مجموعة جزئية في ان واحد مكونة من p عنصر $1 \leq p \leq n$

تعريف نعرف التوفيقة ذات p عنصر مأخوذ من n كل متتالية غير مرتبة لهذه العناصر من الشكل

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 1 \leq p \leq n$$

خواص $\forall n,p \in N^+ \ , p \leq n$

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^p = C_n^{n-p}$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(p)!} = C_n^p$$

امثلة

1) يريد معلم إنشاء استبيان يتضمن 10 أسئلة بإجابتين (نعم , لا)، اختار عشوائيًا 40 سؤالا مختلفا عن المقياس.

a) كم عدد الاستبيانات المختلفة التي يمكنه تحضيرها؟

لدينا سحب ل 10 اسئلة ن 40 خيار بدون تكرار وغير مرتب اذن عدد الاستبيانات الممكنة

$$C_{40}^{10} = \frac{40!}{10!\,(40-10)!} = 847660528$$

b) ماهي عدد طرق الاجابة عن الاستبيان الواحد؟

حسب المبدأ الاساسي للعد

$$\alpha_2^{10} = 2^{10}$$

(اذا كان لدينا سؤال واحد فقط، فإن عدد الطرق الممكنة للإجابة هو 2 (نعم أو لا))

2) اذا كان علينا توزيع 12 شخصًا في 3 لجان تتألف من 3 و4 و5 أفراد على التوالي، كم عدد الطرق الممكنة للقيام بذلك؟

$$C_{12}^{3} \times C_{9}^{4} \times C_{5}^{5} = 27720.$$

3) في فصل مكون من 32 طالبًا، يوجد 19 ولدًا و13 فتاة. يجب أن ننتخب مندوبين

a) كم عدد الخيارات الممكنة؟

لدينا سحب بدون تكرار وغير مرتب اذن عدد الخيارات الممكنة

$$C_{32}^{2} = 496$$

b) ما هو عدد الاختيارات إذا فرضنا ولد و بنت؟

حسب المبدأ الاساسي للعد $\quad C_{13}^{1} \times C_{19}^{1} = 19 \times 13$

c) ما هو عدد الاختيارات إذا فرضنا 2 ولدين؟

$$C_{19}^{2} = 171$$

تمرين صندوق يحتوي على 6 كريات بيضاء (B) و 4 كريات سوداء (N.) ,

I. ما هو عدد طرق سحب 3 كريات دفعة واحدة بدون ارجاع:

a) 3كريات .

b) 3كريات بيضاء .

c) كرة بيضاء و 2 سوداء

II. نقوم بسحب 3 قطع من الكيس بشكل متتالٍ وعشوائي دون إرجاع القطع المسحوبة أعد حساب الأسئلة a), b), (c.

الحل

I. عدد طرق سحب 3 كريات دفعة واحدة بدون ارجاع:

✓ عدد العناصر n=6+4=10

✓ عملية السحب دفعة واحدة و الترتيب غير مهم اذن نستعمل التوفيقات

a) 3 كريات.

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\,(10-3)!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3!\,7!}=120$$

b) 3 كريات بيضاء.

$$C_{6}^{3}=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}=20$$

c) كرة بيضاء و 2 سوداء

$$C_{6}^{1}\times C_{4}^{2}=\frac{6!}{1!\,5!}\times\frac{4!}{2!\,2!}=36$$

III. واجب

تمرين. كيس يحتوي على 5 قطع خضراء (مرقمة من 1 إلى 5) و4 قطع حمراء (مرقمة من 1 إلى 4.)

1. نقوم بسحب 3 قطع من الكيس بشكل متتالٍ وعشوائي دون إرجاع القطع المسحوبة.

$$A_9^3 = 504$$

احسب الاحتمالات التالية

a): سحب 3 قطع خضراء فقط

$$P(a) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$$

b) عدم سحب أي قطعة خضراء،

$$P(b) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}$$

c) سحب ما لا يزيد عن قطعتين خضراوين،

$$P(c) = 1 - P(a) = 1 - \frac{5}{42}$$

2. نقوم بسحب 3 قطع في نفس الوقت من الكيس

$$C_9^3 = 84.$$

أعد حساب الأسئلة a), b), c)

$$P(a) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}, \qquad P(b) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}, \qquad P(c) = 1 - P(a)$$

6- دستور ثنائي الحد لنيوتن

ليكن

a و b عددان حقيقيان $(\forall a, b \in \mathbb{R})$

n عدد طبيعي حيث n≥1 $(\forall n \in N^{+})$

لدينا

$$(a+b)^{n} = \sum_{p=0}^{n} C_{n}^{p}\ a^{n-p}\ b^{p}$$

امثلة

$$(x+1)^{3} = \sum_{p=0}^{3} C_{3}^{p}\ x^{3-p}\ (1)^{p}$$

$$= C_{3}^{0}\ x^{3} + C_{3}^{1}\ x^{2} + C_{3}^{2}\ x^{1} + C_{3}^{3}\ x^{0}$$

$$C_{3}^{0} = C_{3}^{n} = 1$$
$$C_{3}^{1} = C_{3}^{2} = 3$$

$$= x^{3} + 3x^{2} + 3x + 1$$

****

$$\left(a-\sqrt{2}\right)^{5} = \sum_{p=0}^{5} C_{5}^{p}\ a^{5-p}\ \left(\sqrt{2}\right)^{p}$$

$$= C_{5}^{0}\ a^{5}\left(-\sqrt{2}\right)^{0} + C_{5}^{1}\ a^{4}\left(-\sqrt{2}\right)^{1} + C_{5}^{2}\ a^{3}\left(-\sqrt{2}\right)^{2}$$

$$+ C_{5}^{3}\ a^{2}\left(-\sqrt{2}\right)^{3} + C_{5}^{4}\ a^{1}\left(-\sqrt{2}\right)^{4} + C_{5}^{5}\ a^{0}\left(-\sqrt{2}\right)^{5}$$

$$= a^{5} - 5\sqrt{2}\,a^{4} + 20a^{3} - 20\sqrt{2}\,a^{2} + 20a - 4\sqrt{2}$$