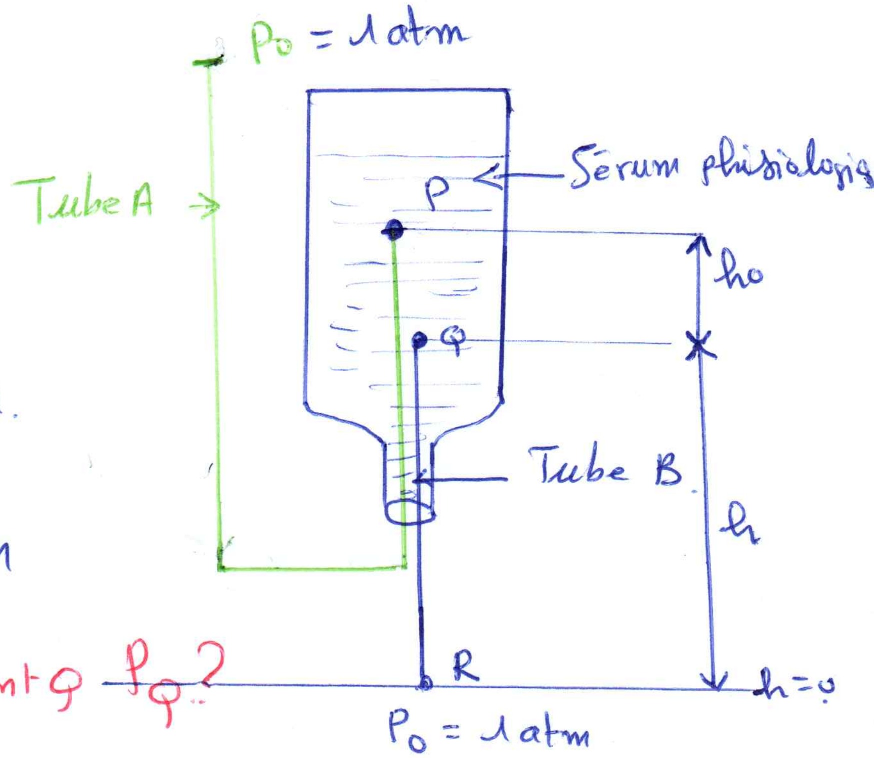
Série de TD 03



Exercice 01.

$\rho_{Sér} = 2 \times 10^3 \ kg \ m^{-3}$.

$P_P = P_0 = 1 atm = 10^5 \ Pa$.

$PQ = h_0 = 10 \ cm = 10 \times 10^{-2} \ m$

$QR = 1 m = h$.

a/ Calcul de la pression au point Q P_Q ?

On applique la loi de Pascal entre les pts P et Q.
(on considère que le fluide est statique entre ces deux pts car il se déplace ~~très~~ avec une vitesse très faible)

$\boxed{P_Q = P_P + \rho_{Sér} \ g \ h_0}$

h_0 : Distance entre P et Q.
g : Accélération de la pésenteur
$\rho_{Sér}$: Masse volumique de sérum
P_Q : pression dans le pt Q
P_P : pression dans le pt P

$P_P = P_0 = 1 atm = 1,03 \times 10^5 \ Pa$.

Alors : $P_Q = \underbrace{1,03 \times 10^5}_{P_0} + \underbrace{2 \times 10^3}_{\rho} \times \underbrace{10}_{g} \times \underbrace{10 \times 10^{-2}}_{h_0}$.

$\boxed{P_Q = 1,03 \times 10^5 \ Pa}$

b/ Calcul de la vitesse d'écoulement v au point R (v_R)

On applique la loi de Bernoulli entre les pts P et R.

$P_P + \rho_{Sér} g z_P + \frac{1}{2} \rho_{Sér} v_P^2 = P_R + \rho_{Sér} g z_R + \frac{1}{2} \rho_{Sér} v_R^2$ — (I)

? L'inconnue.

P_P et P_R : sont les pressions dans P et R.

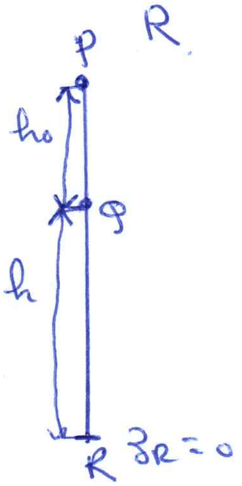
Z_P et Z_R : sont les hauteurs des pts P et R.

V_P et V_R : sont les vitesses d'écoulement du fluide dans les pts et R respectivement.

$$Eq.\ (\mathrm{I}) \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_R^2 = (P_P - P_R) + \underset{Sér}{\rho}\, g(z_P - z_R) + \frac{1}{2}\underset{Sér}{\cancel{\rho}}\, \cancel{V_P^2}^{\,0} \quad (\mathrm{I}')$$

Nous remarquon que $\underset{\text{Surface de section de la partie P}}{S_P} \gg \underset{\text{Surface de section de la partie R}}{S_R} \Rightarrow V_P \ll V_R$.

c'est-à-dire on peut négliger V_P devant V_R.



$$(\mathrm{I}') \Rightarrow \frac{1}{2}\underset{Sér}{\rho} V_R^2 = \cancel{(P_P - P_R)}^{\,0} + \underset{Sér}{\rho}\, g(z_P - z_R)$$

$$z_P - z_R = h + h_0 - 0$$

$$\boxed{z_P - z_R = h + h_0}$$

$P_P = P_R = P_{atm} = 1\,atm$.

$$\frac{1}{2}\underset{Sér}{\cancel{\rho}} V_R^2 = \underset{Sér}{\cancel{\rho}}\, g\,(h + h_0).$$

$$V_R = \sqrt{2g(h + h_0)}$$

A.N. : $V_R = \sqrt{2 \times 10(1 + 0{,}1)} = 4{,}69\ m/s$.

$$\boxed{V_R = 4{,}69\ m/s} \qquad \varphi_V = \underline{cte}$$

2°/ ~~A~~ : La surface S de l'aiguille $= 0,5\, mm^2 = 0,5 \times 10^{-6}\, m^2$

- La pression dans le point R ; $P_R = 770\, mmHg$.

$$\boxed{P_R = 770\, mmHg = 1,024 \times 10^{5}\, Pa}$$

- Calcul de la vitesse d'écoulement v_R après l'emplacement de l'aiguille.

N.B. Avant l'emplacement de l'aiguille $P_R = 1\, atm$ et $v_R = 4,69\, m/s$.

Après l'emplacement $P_R = 1,024 \times 10^{5}\, pa$, $v_R = ?$

Appliquant la loi de Bernoulli entre R et φ.

$$P_\varphi + \rho g z_\varphi + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_\varphi^2} = P_R + \rho g z_R + \frac{1}{2}\rho v_R^2$$ l'inconnue

$$S_\varphi > S_R \Rightarrow v_\varphi \ll v_R.$$

Donc : $\frac{1}{2}\rho v_R^2 = (P_\varphi - P_R) + \rho g (z_\varphi - z_R)$

$z_\varphi - z_R = h = 1m.$

$$v_R = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_\varphi - P_R) + 2gh}$$

A.N. : $v_R = \sqrt{\frac{2}{2\times10^3}\left(1,033\times10^5 - 1,024\times10^5\right) + 2\times10\times1}$

$$\boxed{v_R = 4,57\, m/s}$$

-

- Calcul du volume transmis pendant 1h.

$1h = 3600\,s$.

le débit volumique $\phi_v = \underbrace{S}_{\text{surface}} \cdot v \leftarrow$ vitesse d'écoulement.

$\phi_{v_R} = S_R\, v_R = (0{,}5 \times 10^{-6}) \times 4{,}57 = 2{,}29 \times 10^{-6}\ m^3/s$.

c'est-à-dire pendant une seconde le sérum qui traverse la section s de l'aiguille est égal à $2{,}29 \times 10^{-6}\,m^3$.

$2{,}29 \times 10^{-6}\ m^3 \xrightarrow{\text{passe pendant}} 1s$.

$V \longrightarrow 3600\,s$

$V = \dfrac{3600 \times 2{,}29 \times 10^{-6}}{1} = 8{,}24 \times 10^{-3}\ m^3$
$= 8{,}24\ l$.

$\boxed{\phi_v = 8{,}24\ l/h}$

3/ Calcul du volume de sérum perfusé pendant 1h.

Dans ce dernier cas le fluide est considéré comme fluide réel visqueux. c'est à dire sa viscosité $\eta \neq 0$.

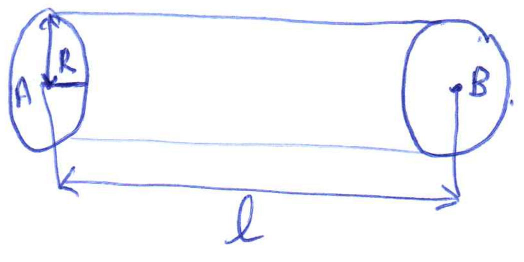
- Dans ce cas le débit volumique ϕ_v est donné par :

$$\phi_v = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta \cdot l} \quad (I)$$

R : Rayon de la veine (section S)

η : La viscosité du fluide

$\left(\frac{\Delta P}{l}\right)$: Perte de charge entre les points Q et R.



le Sérum se déplace du point φ vers R donc $\Delta P = \underset{=}{P_{tot\varphi}} - \underset{=}{P_{tot R}}$.

$$\Delta P = P_{tot\,\varphi} - P_{tot\,R}.$$

$$P_{tot\,\varphi} = P_\varphi + \rho g z_\varphi + \frac{1}{2}\rho v_\varphi^2$$

$$P_{tot\,R} = P_R + \rho g z_R + \frac{1}{2}\rho v_R^2.$$

$$\Delta P = P_{tot\,\varphi} - P_{tot\,R} = P_\varphi + \rho g z_\varphi + \frac{1}{2}\rho v_\varphi^2 - P_R - \rho g z_R - \frac{1}{2}\rho v_R^2$$

$$= P_\varphi - P_R + \rho g (z_\varphi - z_R) + \frac{1}{2}\rho \underbrace{(v_\varphi^2 - v_R^2)}_{\to 0}.$$

~~La~~ Ecoulement permenant donc $v_R = v_\varphi$.

$$\boxed{\Delta P = P_\varphi - P_R + \rho g (z_\varphi - z_R)} \quad (1)$$

- Calcul de rayon de la veine (le rayon de la section).

$$S = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{R^2 = \frac{S}{\pi}} \quad (2)$$

l est la distance entre les points φ et R $= h$. (3)

On injecte (1), (2) et (3) dans (I)'

~~A~~ ~~Donc~~ On obtient $\phi_v = \frac{\pi S^2}{8\pi^2 \eta}\left(\frac{P_\varphi - P_R + \rho g (z_\varphi - z_R)}{h}\right)$, $z_\varphi - z_R = h$

$$\boxed{\phi_v = \frac{S^2}{8\pi\eta}\left(\frac{P_\varphi - P_R}{h} + \rho g\right)}$$

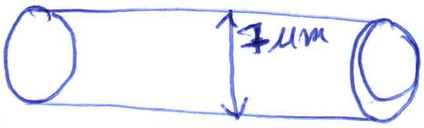
A. N. : $\boxed{q_v = 5,2 \times 10^{-8}\ m^3/s}$

$5,2 \times 10^{-8}\ m^3 \longrightarrow 1s$.

$V \longrightarrow 3600\ s$

$\boxed{V = \dfrac{3600 \times 5,2 \times 10^{-8}}{1} = 0,9\ l/h}$

Exercice 2



$v = 4\,m/s$

$\rho_{H_2O} = 1g/cm^3 = 1000\,kg/m^3$

$g = 10\,m\,s^{-2}$

$$\varphi_v = \frac{\pi R^4}{8\eta}\,\frac{\Delta P}{l}.$$

La viscosité $\eta = \dfrac{\pi R^4 \,\Delta P}{8\,\varphi_v \cdot l}$.

$$\eta = \frac{\cancel{\pi} R^4 \Delta P}{8\cancel{\pi} R^2 v \cdot l}.$$

$$\eta = \frac{R^2\,\Delta P}{8\,v \cdot l}.$$

$$\eta = \frac{(7\times 10^{-6})^2 \times 8\times 10^2}{8\times 4\times 1\times 10^{-3}}.$$

Poiseuille = Pl = Pa s.

a/ La vitesse moyenne d'écoulement

$v = 4\,m/s.$ donc $\varphi_v = S.v.$

$S = \pi R^2 \cdot \Rightarrow \boxed{\varphi_v = \pi R^2 v}$

b/ $\Delta P = \rho g \Delta h.$

$= 1000 \times 10 \times 8\times 10^{-2}$

$\Delta P = 8\times 10^2\ Pa$

2/ Calcul de nombre de Reynolds. Re.

$\rho_{sang} = 1{,}05\,g/cm^3 = 1050\,kg/m^3.$

Nombre de Reynolds

$$\boxed{Re = \frac{\rho\, V_{moy}\, d}{\eta}}$$

d : Diamètre du tube (2R)

η : viscosité dynamique.

V_{moy} : vitesse moyenne du fluide.

ρ : Masse volumique

A.N. : $Re = \dfrac{1050 \times 4 \times (14\times 10^{-6})}{\eta} = \ldots\ldots$ (sans unité)

Si : $Re < 2000$ l'écoulement est laminaire.

Si $Re > 4000$ " " turbulent

Si $2000 < Re < 4000$ " " transitoire.

Exercice 03 $\eta = 5 \times 10^{-3}$ Poiseuille Pl (Pa.s)

L'écoulement est laminaire et permanant.

1/ On a : $R_H = \dfrac{\Delta P}{q_v}$ ← Perte de charge, ← Débit volumique.

$$q_v = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta \, l} \Rightarrow R_H = \frac{\cancel{\Delta P}}{\dfrac{\pi R^4 \cancel{\Delta P}}{8 \eta \, l}} = \frac{8 \eta \, l}{\pi R^4}.$$

Pour une artère saine de longueur La et de diamètre Da :

$$R_H = \frac{8 \eta L_a}{\pi \dfrac{D_a^4}{16}} = \frac{128 \eta L_a}{\pi D_a^4}$$

- Pour $L_a = 10$ cm $= 10 \times 10^{-2}$ m et $D_a = 4$ mm $= 4 \times 10^{-3}$ m.

$$R_H = \frac{128 \times 5 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-2}}{\pi (4 \times 10^{-3})^4} = 7{,}96 \times 10^{7} \ \frac{Pa}{\frac{m^3}{s}} = \frac{Pa\,s}{m^3} = \frac{Pl}{m^3}$$

$$\boxed{R_H = 7{,}96 \times 10^{7} \ Pl\, m^{-3}}$$

2/ On calcule q_v

$$q_v = S v = \pi R^2 v = \pi \frac{D_a^2}{4} v = \frac{3{,}14 \times (4 \times 10^{-3})^2}{4} \times 16 \times 10^{-2}$$

- Calcul de la perte de charge ΔP.

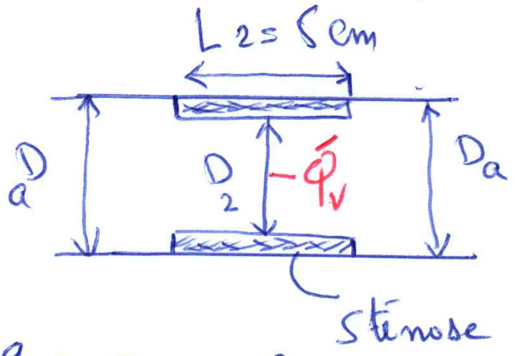
$$\cancel{\Delta P =} \ R_H = \frac{\Delta P}{q_v} \Rightarrow \Delta P = R_H \, q_v = 7{,}96 \times 10^{7} \times \frac{3{,}14 (4 \times 10^{-3})^2}{4} \times 16 \times 10^{-2}$$

$\Delta P = 159{,}2$ Pa (à vérifier)

$= 1{,}2$ mmHg

1 mmHg = 133,3 Pa à retenir

03/



$\Delta P' = 40\ mmHg = 5332\ Pa$

$\varphi'_V = 0{,}6\ \varphi_V$

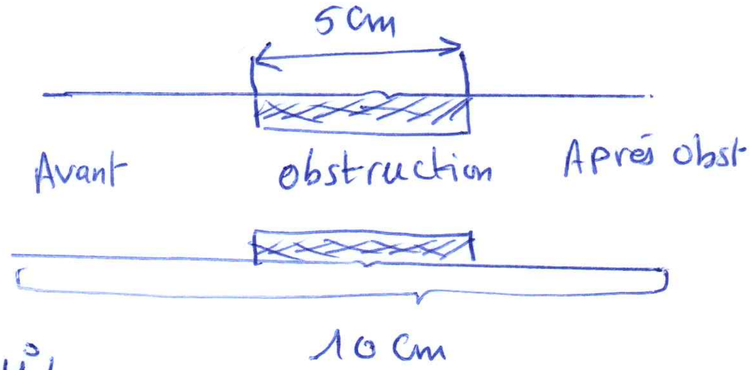
3°/a Calcul de la nouvelle résistance hydrolique R'_H de l'artère (entre les extrémités)

$$R'_{H_a} = \frac{\Delta P'}{\varphi'_V} = \frac{\Delta P'}{0{,}6\ \varphi_V} = \frac{5332}{0{,}6 \times 2\times10^{-6}} = 4{,}44\times10^{9}\ Pl/m^3$$

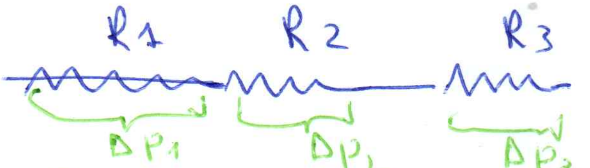
de la question précédente

$$\boxed{R'_{H_a} = 4{,}44\times10^{9}\ Pl/m^3}$$

de l'artère



Electricité



$R_{eq} = R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3$

$\Delta P_{tot} = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$

$\varphi_{tot} = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$

3°/b/ Calcul de R_1 de la portion large de l'artère (la somme des résistance avant et aprés l'obstruction).

$$R_{H_{artère}} = \underbrace{R_{avant\ obst} + R_{obs} + R_{aprés\ obst}}$$

R_1

Nottons que la longueur de la portion large de l'artère

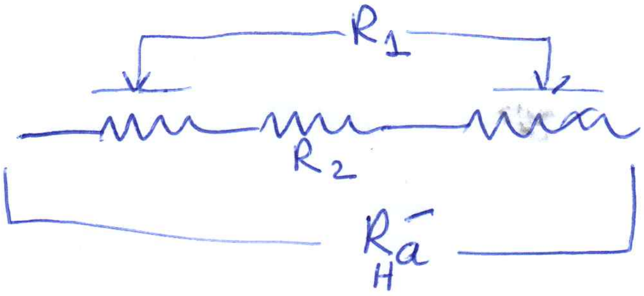
$l = 10 - 5 = 5\ cm = 5 \times 10^{-2}\ m.$

$$R_1 = \frac{128\,\eta\,l}{\pi\,D_a^4} = \frac{128 \times 5\times10^{-3} \times 5\times10^{-2}}{3{,}14 \times (4\times10^{-3})^4} = 3{,}98\times10^{7}\ Pl/m^3.$$

$$\boxed{R_1 = 3{,}98\times10^{7}\ Pl/m^3}$$

Les parties ~~non~~ non rétricies (qui ont un diamètre D_a)

c/ Calcul de la perte de charge ΔP_2 dans le rétrécissement



$$\bar{R}_{aH} = R_1 + R_2$$

$$\Rightarrow R_2 = \bar{R}_{aH} - R_1.$$

$$R_2 = 4{,}44\times10^{9} - 3{,}98\times10^{7}$$

$$\boxed{R_2 = 4{,}32\times10^{9}\ Pl/m^3}$$

D'autre part: $R_2 = \dfrac{\Delta P_2}{\varphi} \Rightarrow \Delta P_2 = R_2\,\varphi_v$

$(\varphi_a = \varphi = \varphi = \varphi$ En série$)$

avant obst — obst — Après obst

$$\Delta P_2 = R_2 \times 0{,}6 \cdot \varphi_v.$$

$$\boxed{\Delta P_2 = 4{,}32\times10^{9} \times 0{,}6 \times \varphi_v}$$

calculé dans la question 2/

D'après nos résultats $\Delta P_2 = 5{,}4\times10^{3}\ Pa$

$$\Delta P_2 = 40\ mmHg$$

d/ Calcul de D_2 (diamètre de rétrécissement)

Etant donné :

longueur de la partie rétricie

$$R_H = \frac{128\,\eta\,\ell_2}{\pi\,D_2^4}$$

rétricie
$\parallel$
$\underline{\underline{R_2}}$

$$D_2^4 = \frac{128\,\eta\,\ell_2}{\pi\,R_{H_2}} \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{128\,\eta\,L_2}{\pi\,R_2}}$$

$$D = 1,24\,10^{-3}\,m = 1,24\,mm.$$