

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



SUPPORT DE COURS EN

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (RDM)

Réalisé par :

Dr. Djamel OUZANDJA

Année Universitaire : 2017/2018

PRÉFACE

La résistance des matériaux, désignée souvent par RDM, est une partie de la mécanique des solides. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes (normale et tangentielle) ainsi que les déplacements des structures.

La RDM évolue constamment en fonction des développements dans le domaine théorique de la mécanique des solides, le domaine expérimental des matériaux (technologie des matériaux) ainsi que l'aspect numérique imposé par le progrès rapide de l'informatique, et d'autre part, elle doit répondre aussi à un besoin exigé par une ingénierie de plus en plus performante.

Ce support de cours et ces applications sont destinés aux étudiants de deuxième année Licence du nouveau système LMD en Génie Civil et les élèves ingénieurs des écoles préparatoires. Ils sont élaborés conformément au programme officiel fixé par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique (République Algérienne), l'accent est mis sur les méthodes de calcul et les formules pratiques illustrant des cas réels de dimensionnement des éléments d'une structure soumis aux sollicitations simples.

Il est conçu dans le but d'assurer la transition entre les notions souvent théorique de la RDM et leurs conséquences pratiques qui doivent être l'une des préoccupations fondamentales de l'ingénieur constructeur. Il doit permettre également à l'étudiant partant d'un nombre restreint de connaissances de base, d'accéder d'une façon progressive, par un travail personnel effectué sur des exercices de difficulté variée et croissante, à la maîtrise du domaine d'analyse des structures.

Ce polycopié se décompose en six chapitres. Le contenu du premier chapitre concerne une introduction générale à la résistance des matériaux. Le second définit les caractéristiques géométriques des sections droites. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la flexion simple des poutres droites isostatiques. Aux chapitres 4 et 5, l'étudiant se familiarise avec les notions de sollicitation simple, de diagramme d'efforts intérieurs, de section dangereuse, de contrainte et enfin de dimensionnement. Il s'agit de la traction (ou compression) et le cisaillement simple, respectivement. Et enfin, le dernier chapitre introduit le dimensionnement des barres soumises à la sollicitation de torsion.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	i
Table des matières	ii

Chapitre : 1 INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions et hypothèses	2
1.2. Propriétés des matériaux	3
1.3. Convention de signe des axes	3
1.4. Classification des solides (poutre, plaque, coque)	4
1.4.1. Poutre	4
1.4.2. Plaque	5
1.4.3. Coque	5
1.5. Différents types de chargements	6
1.6. Réaction d'appui (types de liaisons)	7
1.6.1. Appui simple	7
1.6.2. Appui double (articulation)	8
1.6.3. Encastrement	8
1.7. Conditions d'équilibre	9
1.8. Résolution d'un problème de statique	10
1.9. Efforts internes	10
1.9.1. Effort normal	11
1.9.2. Efforts tranchants	11
1.9.3. Moments fléchissants	12
1.9.4. Moment de torsion	12
1.10. Méthode des sections	12
1.11. Conventions de signes des efforts intérieurs	13
1.12. Applications	16
Exercices	18

Chapitre : 2 CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUE DES SECTIONS DROITES

2.1. Introduction	23
2.2. Caractéristiques cartésiennes	23
2.2.1. Centre de gravité	23
2.2.2. Moments statiques	24
2.2.3. Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)	25
2.2.4. Moment d'inertie polaire	26
2.2.5. Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)	28
2.3. Formule de transformation des moments d'inertie	28

2.3.1. Translation d'axes (théorème de Huygens)	29
2.3.2. Rotation d'axes	30
2.4. Moments d'inertie principaux	31
2.5. Module de résistance	31
2.6. Rayon de giration	31
2.7. Application	32
Exercices	34

Chapitre : 3 FLEXION SIMPLE

3.1. Introduction	38
3.2. Définition	39
3.3. Efforts tranchants et moments fléchissants	41
3.4. Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants	42
3.5. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant	42
3.6. Relation entre effort tranchant et chargement réparti	43
3.7. Applications	45
3.8. Contraintes normales en flexion plane	47
3.9. Contraintes tangentielles en flexion	50
3.10. Calcul de résistance en flexion	51
3.11. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)	52
Exercices	54

Chapitre : 4 TRACTION ET COMPRESSION SIMPLES

4.1. Introduction	59
4.2. Définition	59
4.3. Déformation des barres en traction et compression	60
4.4. Courbe contrainte-déformation	61
4.5. Systèmes de barres isostatiques	62
4.6. Systèmes de barres hyperstatiques	63
4.7. Condition de résistance	65
4.8. Application	65
Exercices	67

Chapitre : 5 CISAILLEMENT SIMPLE

5.1. Introduction	71
5.2. Définition	72
5.3. Contrainte tangentielle de cisaillement	72
5.4. Déformation de cisaillement	73
5.5. Loi de Hooke	74
5.6. Condition de résistance au cisaillement	75
5.7. Applications	75

5.7.1. Assemblage par rivets	75
5.7.2. Assemblage par boulons	78
Exercices	80
Chapitre : 6 TORSION	
6.1. Introduction	85
6.2. Définition	85
6.3. Hypothèses sur le solide	86
6.4. Hypothèses sur les forces	86
6.5. Contraintes et déformation	86
6.6. Torsion des barres à sections transversales non circulaires	90
6.7. Condition de résistance	91
6.8. Condition de rigidité	91
6.9. Application	92
Exercices	95
Bibliographie	98

Chapitre 1

INTORDUCTIONS ET GÉNÉERALITÉS

1.1. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES

La résistance des matériaux (RDM) est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie.

La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux qui ne peuvent être disponibles qu'à travers les résultats des travaux expérimentaux comme le témoigne l'histoire du développement de la résistance des matériaux qui constitue une combinaison fascinante de la théorie et l'expérience.

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes.

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

- **L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau:** On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.
- **L'élasticité et la linéarité du matériau:** On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.
- **La petitesse des déformations:** Les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.
- **Hypothèse des sections planes (hypothèse de Navier-Bernoulli):** Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.
- **Hypothèse de Saint Venant:** Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

La résistance des matériaux a donc pour but d'assurer qu'on utilise dans une structure donnée, une quantité minimale de matériaux, tout en satisfaisant aux exigences suivantes:

1. **Résistance** : La pièce doit supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées, (la capacité qu'a un corps de résister aux forces appliquées).
2. **Rigidité** : La pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée, (la propriété qu'a un corps à résister aux déformations).
3. **Stabilité** : La pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement).
4. **Endurance** : La pièce, si elle est soumise à un chargement répété, doit pouvoir tolérer sans rupture un certain nombre de cycles de sollicitation variable (fatigue).
5. **Résiliences** : Enfin, dans le cas où un chargement dynamique (impact) est à prévoir, la pièce doit pouvoir absorber une certaine quantité d'énergie sans s'en trouver trop endommagée.

1.2. PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX

Les matériaux résistent, dans la plupart des cas, aux sollicitations auxquelles ils sont soumis car les forces extérieures qui leur sont appliquées, constituent un système en équilibre. Parmi ces forces, il ne faut noter les réactions d'appuis ainsi que les liaisons. Mais ce n'est pas tout, c'est aussi parce que ces matériaux sont doués de propriétés physiques données.

On note parmi les propriétés physiques importantes en résistance des matériaux : l'élasticité, la résistance, la rigidité, la ductilité, la malléabilité, ... Grâce à ces propriétés, les efforts internes engendrés dans les matériaux, sont capables de s'opposer à l'action des forces extérieures, où :

1. **Élasticité** : La propriété physique d'un corps à reprendre sa forme après suppression de la sollicitation (charge).
2. **Ductilité** : La propriété d'un corps à pouvoir être étiré en fils très mince.
3. **Malléabilité** : La propriété d'un corps de pouvoir être réduit en feuilles minces. Un corps ductile est généralement malléable. Un corps qui n'est pas ductile, ni malléable est un corps dit cassant.

1.3. CONVENTION DE SIGNE DES AXES

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY et OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs des ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Fig. 1.1), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axe Z est suivant la direction d'un vis tournant de l'axe X vers l'axe Y.

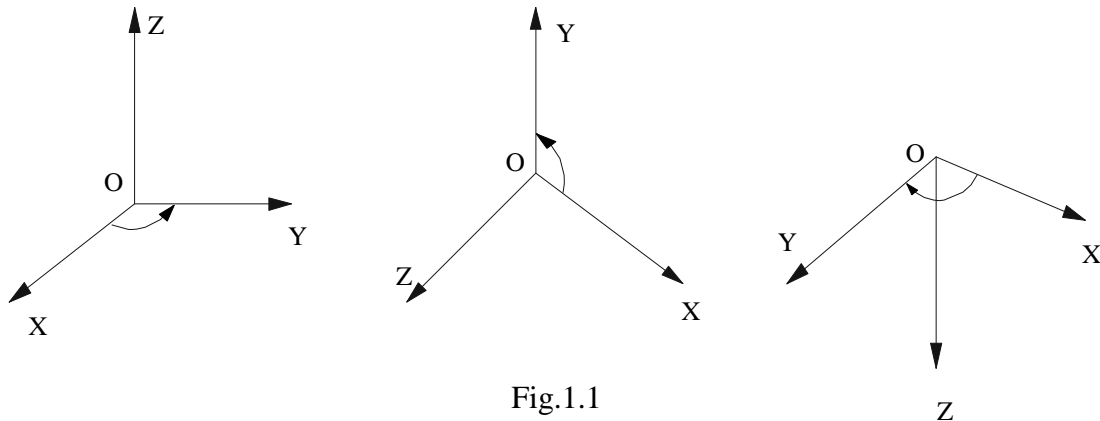


Fig.1.1

1.4. CLASSIFICATION DES SOLIDES (POUTRE, PLAQUE, COQUE)

1.4.1. Poutre

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (Σ) dont le centre G décrit une courbe appelée ligne moyenne. Le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport aux dimensions de la section droite (Σ).

- La section droite (Σ) de centre de surface G varie progressivement (Fig. 1.2) ou est constante (Fig. 1.3).
- La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- La poutre possède un plan de symétrie.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites constituent des lignes appelées fibres (Fig. 1.2).
- La ligne moyenne est aussi appelée fibre neutre.
- Lorsque la ligne moyenne est une droite, alors la poutre est appelée poutre droite (Fig. 1.3).
- Les sections droites des poutres étudiées ont un plan de symétrie et qu'elles sont chargées dans ce plan.

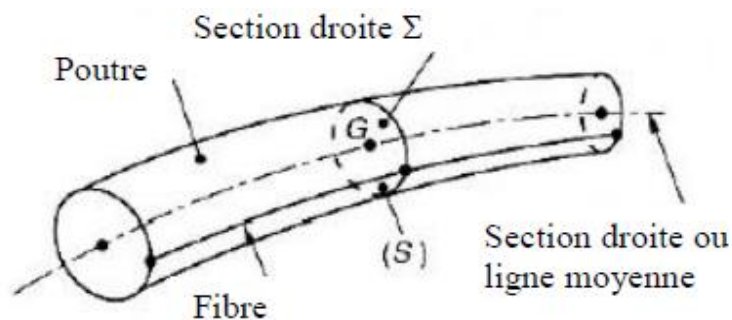


Fig. 1.2

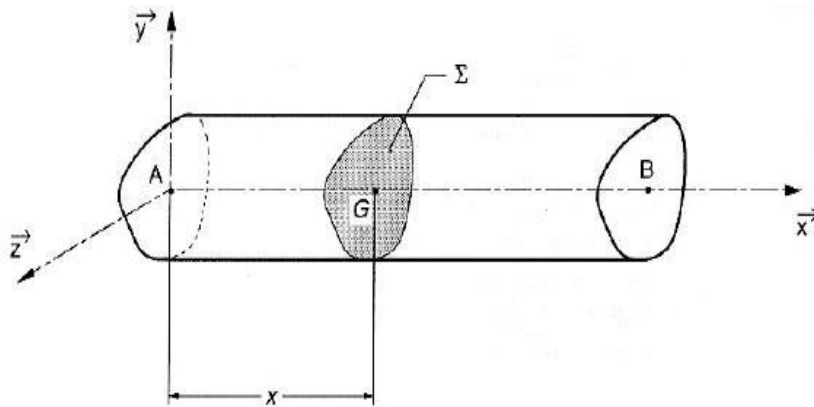


Fig. 1.3

1.4.2. Plaque

Une plaque est un élément prismatique d'épaisseur h petite devant les deux autres directions de l'espace (Fig. 1.4). Le plan moyen sera le plan (O, x, y) , le déplacement transverse étant la direction z . On suppose que l'hypothèse des petits déplacements vérifiée.

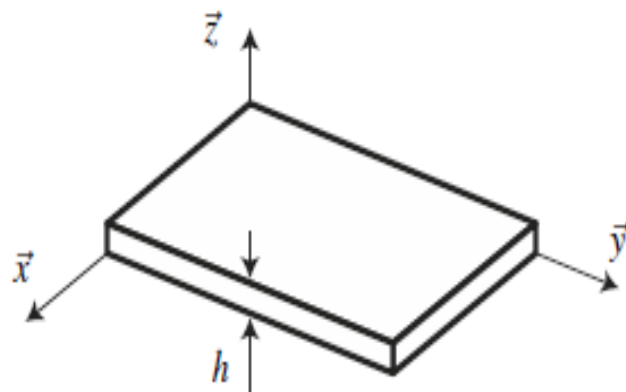


Fig. 1.4

1.4.3. Coque

Une coque est un solide délimité par deux surfaces proches et approximativement parallèles (Fig. 1.5). Elle est soit fermée sur elle-même, soit délimitée en outre par une surface périphérique (le bord) qui joint les deux surfaces principales.

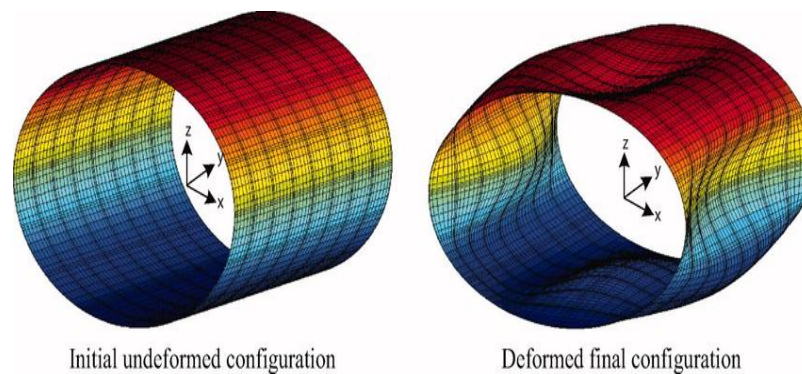


Fig. 1.5

1.5. DIFFÉRENTS TYPES DE CHARGEMENTS

Les chargements peuvent être classifiés de différentes manières. On distingue deux types de chargements (ou actions mécaniques):

- les actions mécaniques de contact (liaisons de contact entre solides, pression,...);
- les actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, force électromagnétique,...).

Le premier type d'action est une action qui s'applique sur la surface du solide (action surfacique) tandis que le second s'exerce au niveau de son volume (action volumique).

On distingue aussi les actions extérieures et les actions intérieures à un système de solides.

- On appelle effort (ou action) extérieur appliqué à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact ; soit des actions à distances (gravité).
- Les efforts intérieurs sont les efforts que s'exercent mutuellement les différentes parties du système isolé.

• Modélisation des actions mécaniques

L'analyse des actions mécaniques ne peut se faire qu'en utilisant des modèles pour représenter les actions et leurs effets sur le solide. On distingue principalement deux modèles pour représenter et étudier les actions mécaniques, le modèle local et le modèle global.

Le modèle local (Fig. 1.6) permet d'étudier l'action et son effet en tout point de la zone où elle s'exerce: étude des pressions de contact, contraintes dans les matériaux, déformation du solide, ...

Dans le modèle global (Fig. 1.7), on associe à l'action mécanique un torseur (dit Torseur d'Action Mécanique). Ce modèle fait disparaître l'effet local de l'action mais rend son utilisation pratique pour l'étude de l'équilibre ou de la dynamique.

Ces deux modèles, global et local, ne sont pas interchangeables; si on peut déterminer le torseur d'action mécanique à partir de la répartition locale des efforts, on ne peut faire le travail inverse sans faire des hypothèses sur la répartition.

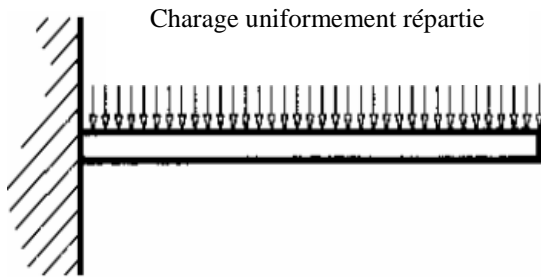


Fig. 1.6

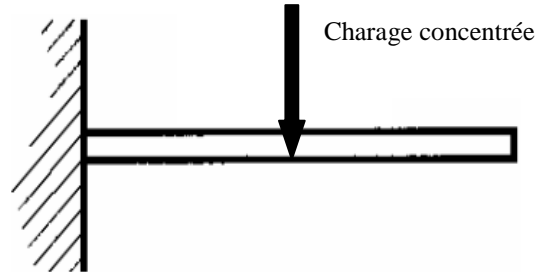


Fig. 1.7

La charge uniformément répartie (Fig. 1.6) est remplacée par l'effort équivalent \vec{F} (Fig.1.7).

- **Définition d'un torseur**

La définition complète d'un effort (force) fait intervenir deux vecteurs :

- une force \vec{R} appelée résultante,
- un moment $\vec{M}(\vec{R})_O$ en un point O quelconque, appelé moment.

Ces deux vecteurs, appelés éléments de réduction, peuvent être regroupés en une seule écriture dans un nouvel outil mathématique appelé "Torseur".

On note $\{\vec{\tau}\}$ un torseur quelconque et $\{\vec{\tau}\}_O$ ses éléments de réduction au point O.

1.6. RÉACTION D'APPUI (TYPES DE LIAISONS)

Les appuis sont destinés à bloquer les déplacements d'une structure. Dans le plan, trois possibilités de déplacements sont possibles ; deux translations suivant les deux axes X et Y et la rotation ; donc trois degrés de libertés (d.d.l.).

Les appuis peuvent être :

1.6.1. Appui simple

Ce type d'appui matérialisé par la Fig.1.8, le seul déplacement bloqué se trouve en direction perpendiculaire au plan de l'appui, soit une seule réaction (R) d'appui et deux d.d.l.

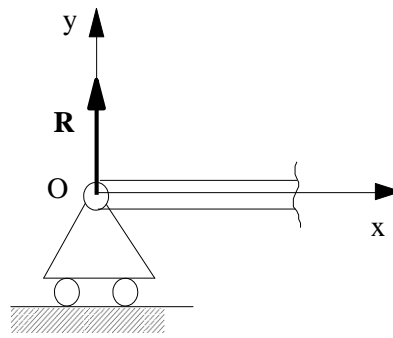


Fig.1.8

1.6.2. Appui double (articulation)

Matérialisé par une rotule (Fig. 1.9), les déplacements sont bloqués dans la direction parallèle et perpendiculaire au plan de l'appui, donc deux réactions R_x et R_y et un seul d.d.l.

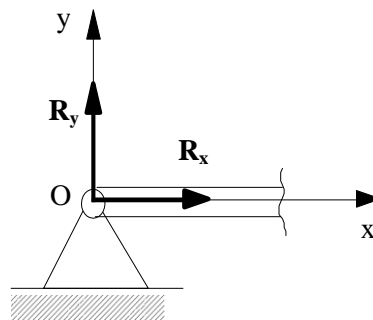


Fig. 1.9

1.6.3. Encastrement

L'encastrement est schématisé sur la Fig. 1.10. Les trois déplacements possibles dans le plan sont bloqués, soit trois réactions d'appui R_x , R_y , M et zéro de d.d.l.

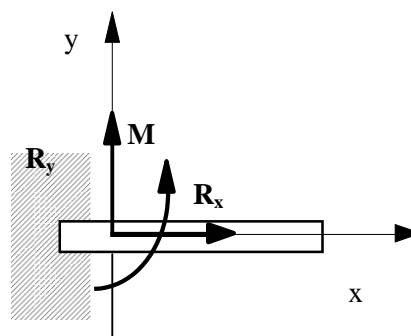





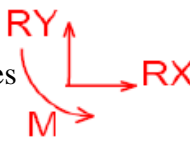


Fig. 1.10

- **Récapitulation sur la modélisation des liaisons**

Les différentes liaisons souvent réalisées en domaine du génie civil sont récapitulées sur le tableau 1.1.

Tableau 1.1. Modélisation des liaisons

Type de liaison	Modélisation	Inconnue de liaison
Appui simple (ou mobile)		1 inconnue 
Appui double (articulation)		2 inconnues 
Encastrement		3 inconnues 

1.7. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

- **Systèmes dans le plan**

Puisque l'ensemble des forces peut être remplacé par une résultante unique ou dans certain cas par deux forces formant un couple M , donc pour qu'un système soit en équilibre dans le plan (OXY) on doit avoir :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{et} \quad \sum M_{F/0} = 0$$

- **Systèmes spatiaux**

Un solide est en équilibre si le système des forces qui lui sont appliquées est équivalent à zéro. Donc un solide dans l'espace pour qu'il soit en équilibre les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \text{et} \quad \sum M_z = 0$$

M_x , M_y et M_z sont les moments de toutes les forces par rapport aux axes X, Y, Z respectivement.

1.8. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE STATIQUE

La résolution d'un problème de statique consiste à déterminer toutes les actions extérieures au système de solides isolé, notamment les composantes des torseurs mécaniques de liaison.

Il est possible d'écrire les trois équations (vus précédemment) du principe fondamental de statique pour chaque solide isolé, on dispose donc de $3n$ équations pour un système comportant n solides.

Les équations du principe fondamental de statique permettront de déterminer les actions de liaison à condition que le nombre total d'inconnues ne soit pas supérieur à $3n$.

Il existe trois cas :

- **Système hypostatique** : si le nombre total d'inconnues de liaison i est inférieur au nombre d'équations de la statique $3n$. Le système est un mécanisme.
- **Système isostatique** : le nombre d'inconnue de liaison i est égal au nombre d'équations de la statique $3n$. On dispose alors d'autant d'équations que d'inconnues et il est possible de déterminer toutes les inconnues de liaison.
- **Système hyperstatique** : le nombre d'inconnue de liaison i est supérieur au nombre d'équations de la statique $3n$. il est donc impossible de déterminer les inconnues de liaison en utilisant uniquement les équations de la statique. Il faut alors avoir recours à des principes énergétiques afin d'obtenir $(i - 3n)$ équations manquantes.

1.9. EFFORTS INTERNES

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi les réactions d'appuis. Sous l'effet de ces charges, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces efforts internes.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle, on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation (Fig.1.11). Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force F (N , T_z , T_y) et le vecteur moment M (M_x , M_y , M_z) résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.

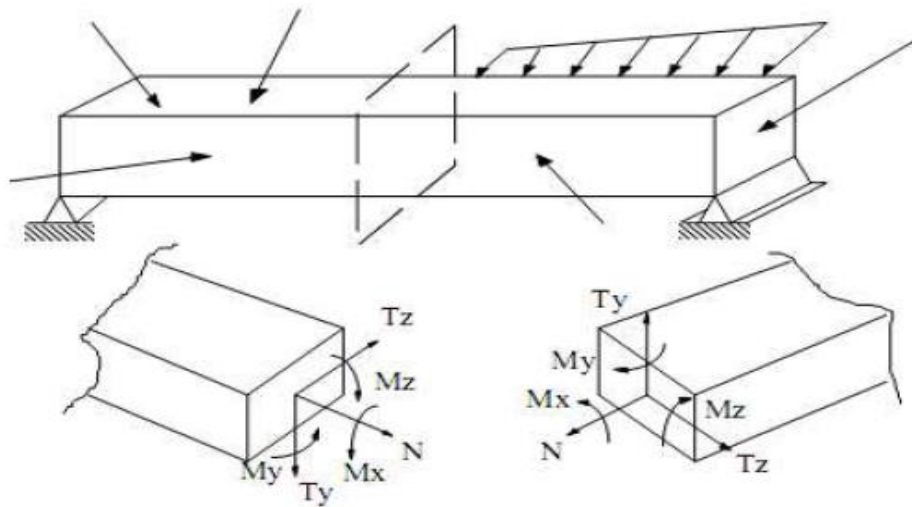


Fig.1.11

1.9.1. Effort normal

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

1.9.2. Efforts tranchants

Les forces transversales T_z , et T_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y . Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la Fig. 1.12.

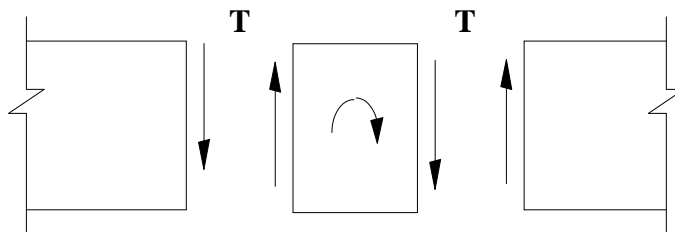


Fig.1.12

1.9.3. Moments fléchissants

Les composantes M_y , et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. La Fig. 1.13 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

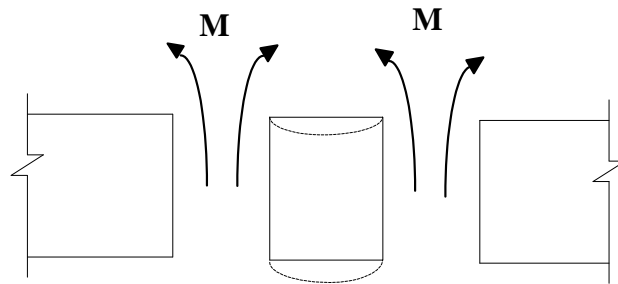


Fig. 1.13

1.9.4. Moment de torsion

Le moment de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X. Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure (Fig. 1.14)

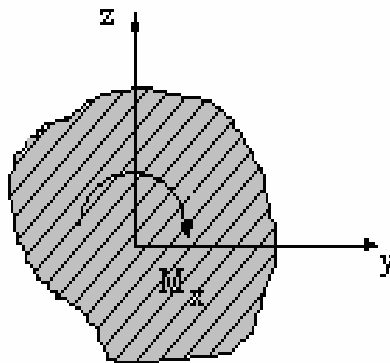


Fig. 1.14

1.10. MÉTHODE DES SECTIONS

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode des sections. Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures (Fig.1.15). Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N , T et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

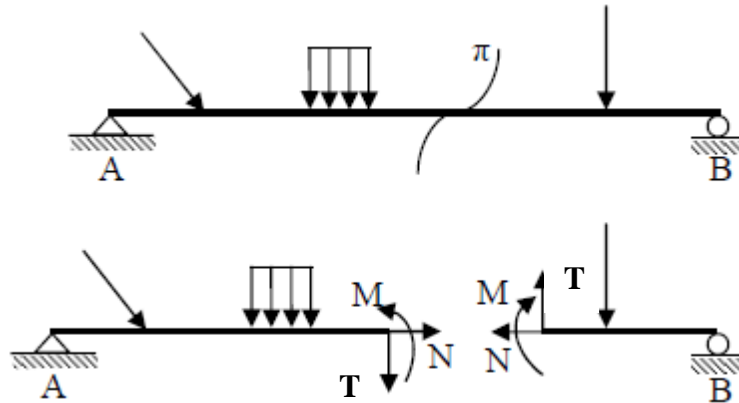


Fig.1.15

1.11. CONVENTIONS DE SIGNES DES EFFORTS INTÉRIEURS

Les efforts intérieurs en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs. Ces efforts intérieurs prennent les notations suivantes (Fig. 1.16):

- N est l'effort normal (dans la direction x)
- T_y est l'effort tranchant dans la direction y
- T_z est l'effort tranchant dans la direction z
- $T = T_y + T_z$ est l'effort tranchant
- M_t est le moment de torsion (autour de l'axe x)
- M_y est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe y)
- M_z est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe z)
- $M = M_y + M_z$ est le moment de flexion

• **Remarque :**

Le signe de N a un sens physique : $N > 0$ signifie une traction. $N < 0$ signifie une compression. Il est facile de voir que cela est indépendant de l'orientation de la ligne moyenne.

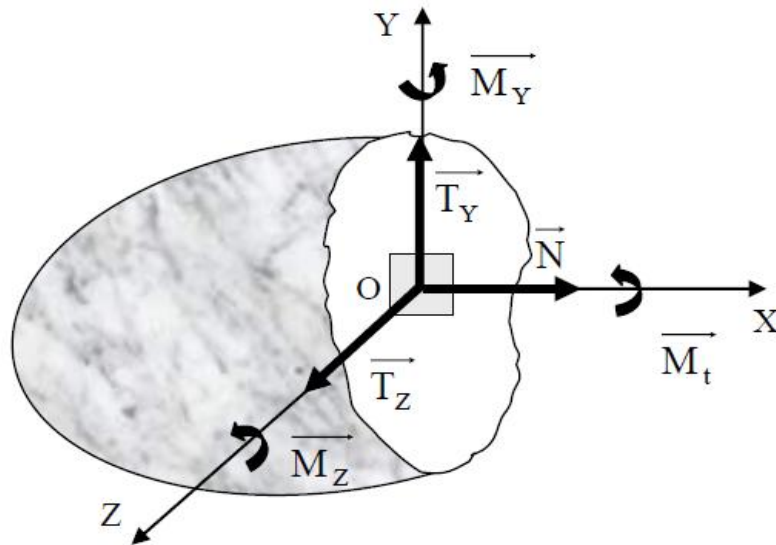


Fig. 1.16

- **Diagrammes des efforts intérieurs**

On appelle diagrammes des efforts intérieurs les courbes représentant la variation de chacun des efforts intérieurs selon la ligne moyenne. Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées.

- **Sollicitations simples**

Les sollicitations couramment rencontrées sont la traction ou la compression, la flexion, la torsion et le cisaillement. Quelques types de sollicitations simples sont donnés sur le tableau 1.2. La Fig. 1.17 schématise ces types de sollicitations.

Tableau 1.2. Quelques types de sollicitations

Sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion
Traction/compression	$N \neq 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Cisaillement pur	$N = 0$	T_y (ou T_z) $\neq 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Torsion pure	$N = 0$	$T = 0$	$M_t \neq 0$	$M_f = 0$
Flexion pure	$N = 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	M_z (ou M_y) $\neq 0$
Flexion simple	$N = 0$	T_y (ou T_z) $\neq 0$	$M_t = 0$	M_z (ou M_y) $\neq 0$

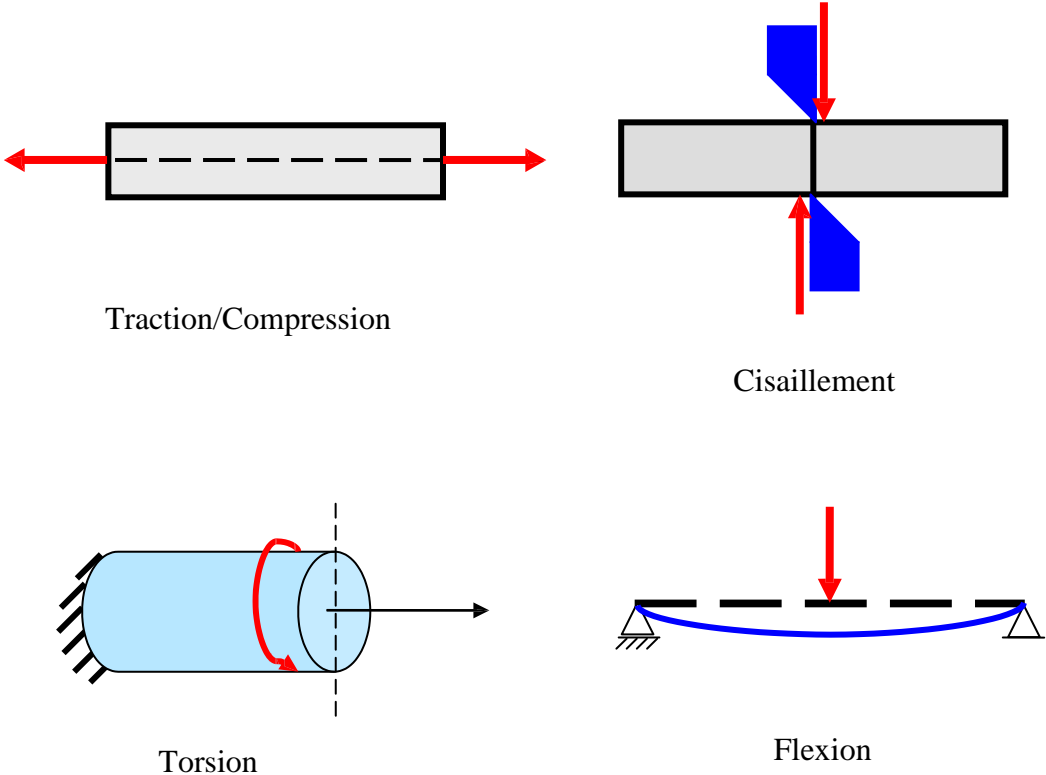


Fig. 1.17

1.12. APPLICATIONS

Exemple 1 :

Une poutre sur deux appuis reçoit des charges concentrées (Fig.1.18), déterminer les réactions d'appui.

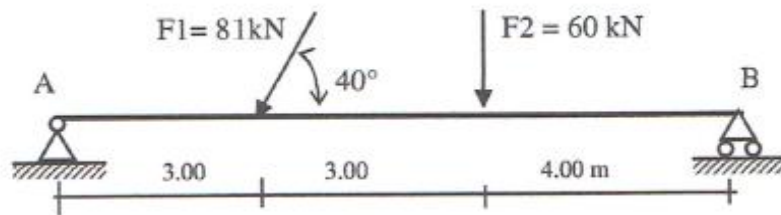
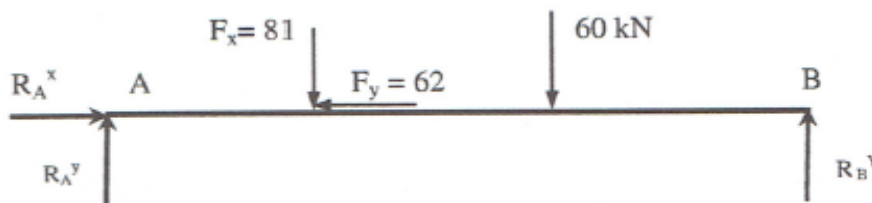


Fig.1.18

Solution :

On montre sur la figure suivante les composantes suivant x et y des réactions d'appui en A et B, les intensités de la force F_2 et des composantes de la force F_1 .



On a :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A^x - F_1 \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^y + R_B^y - F_1 \sin \alpha - F_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \cdot R_B^y - 3 \cdot F_1 \sin \alpha - 6 \cdot F_2 = 0 \quad (3)$$

de ces trois équations, on trouve que :

$$R_A^y = 60.4 \text{ kN}$$

$$R_B^y = 51.6 \text{ kN}$$

$$R_A^x = 62 \text{ kN}$$

Exemple 2 :

Déterminer les réactions d'appui de la poutre AB (Fig.1.19) soumise à une charge q verticale uniformément répartie par unité de longueur.

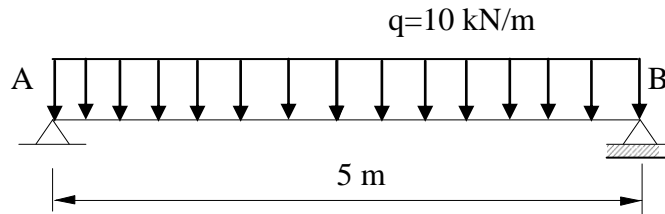
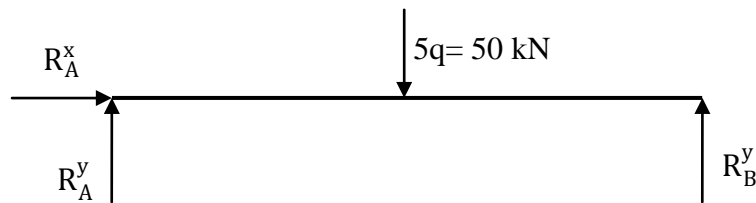


Fig.1.19

Solution :

On a :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A^x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^y + R_B^y - 5q = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 5 \cdot R_B^y - \frac{5}{2} \cdot (5q) = 0 \quad (3)$$

de ces trois équations, on trouve que :

$$R_B^y = 25 \text{ kN}$$

$$R_A^y = R_B^y = 25 \text{ kN}$$

$$R_A^x = 0 \text{ N}$$

EXERCICES

1.1. Soit un repère orthonormé XOY dans le plan. Déterminer la force résultante et le moment résultant par rapport à O des forces F_1 et F_2 .

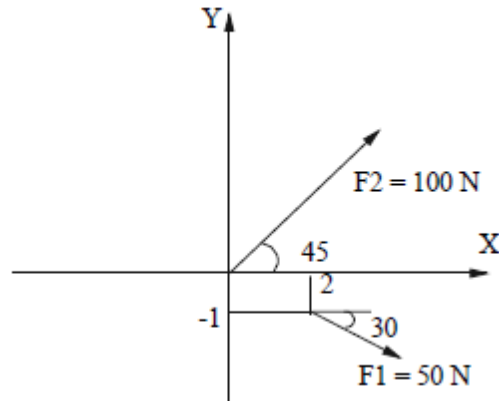


Fig. E1.1

1.2. Quel est le module minimal de F_2 et l'angle correspondant pour que le moment résultant par rapport à O soit nul ?

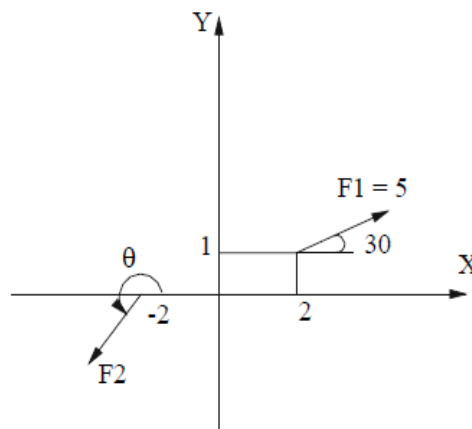


Fig. E1.2

1.3. Déterminer les composantes F_x et F_y de chacune des trois forces F_1 , F_2 , et F_3 . Trouver la valeur de la résultante de ces forces et l'angle entre cette résultante et l'axe yy' .

$$F_1 = 100 \text{ N}, \alpha = 36.86^\circ$$

$$F_2 = 200 \text{ N}, \alpha = -110^\circ$$

$$F_3 = 300 \text{ N}, \alpha = 125^\circ$$

1.4. Déterminer le module minimal et l'angle correspondant d'une force appliquée au point (0,1) pour que le torseur des moments par rapport au point O soit nul.

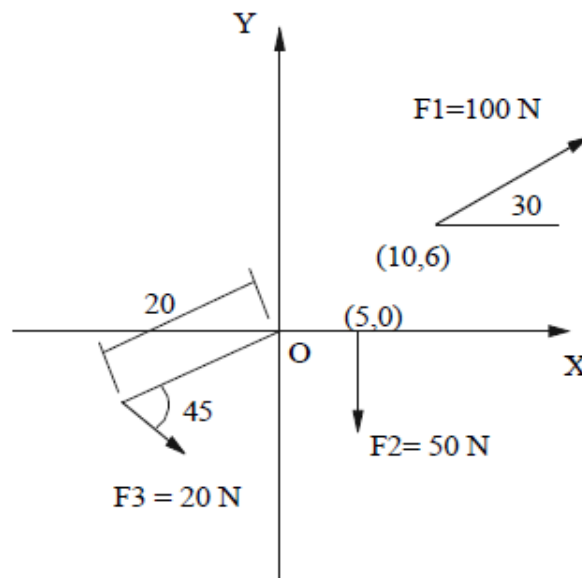


Fig. E1.4

1.5. Déterminer les composantes de la réaction résultante des forces agissant sur le système de poutres rigides de la Fig. E1.5, et le moment résultant de toutes les forces par rapport au point O.

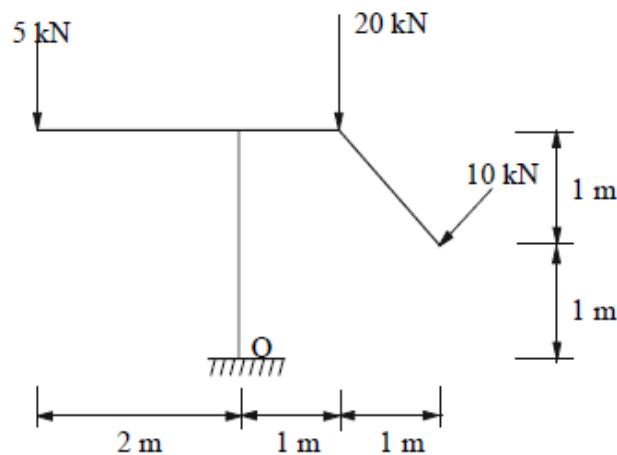


Fig. E1.5

1.6. Calculer la résultante des forces et du moment du système de la Fig. E1.6 et déterminer les points d'intersection de la ligne d'action de la résultante avec AB et CB.

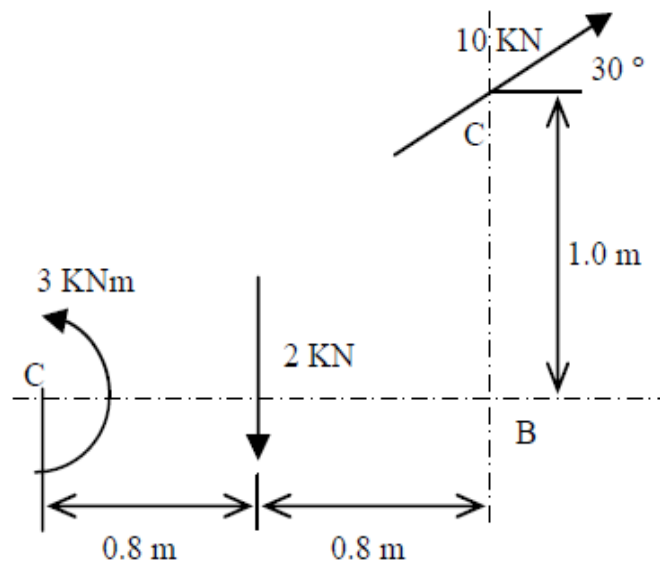


Fig. E1.6

1.7. Déterminer les réactions d'appuis des systèmes suivants :

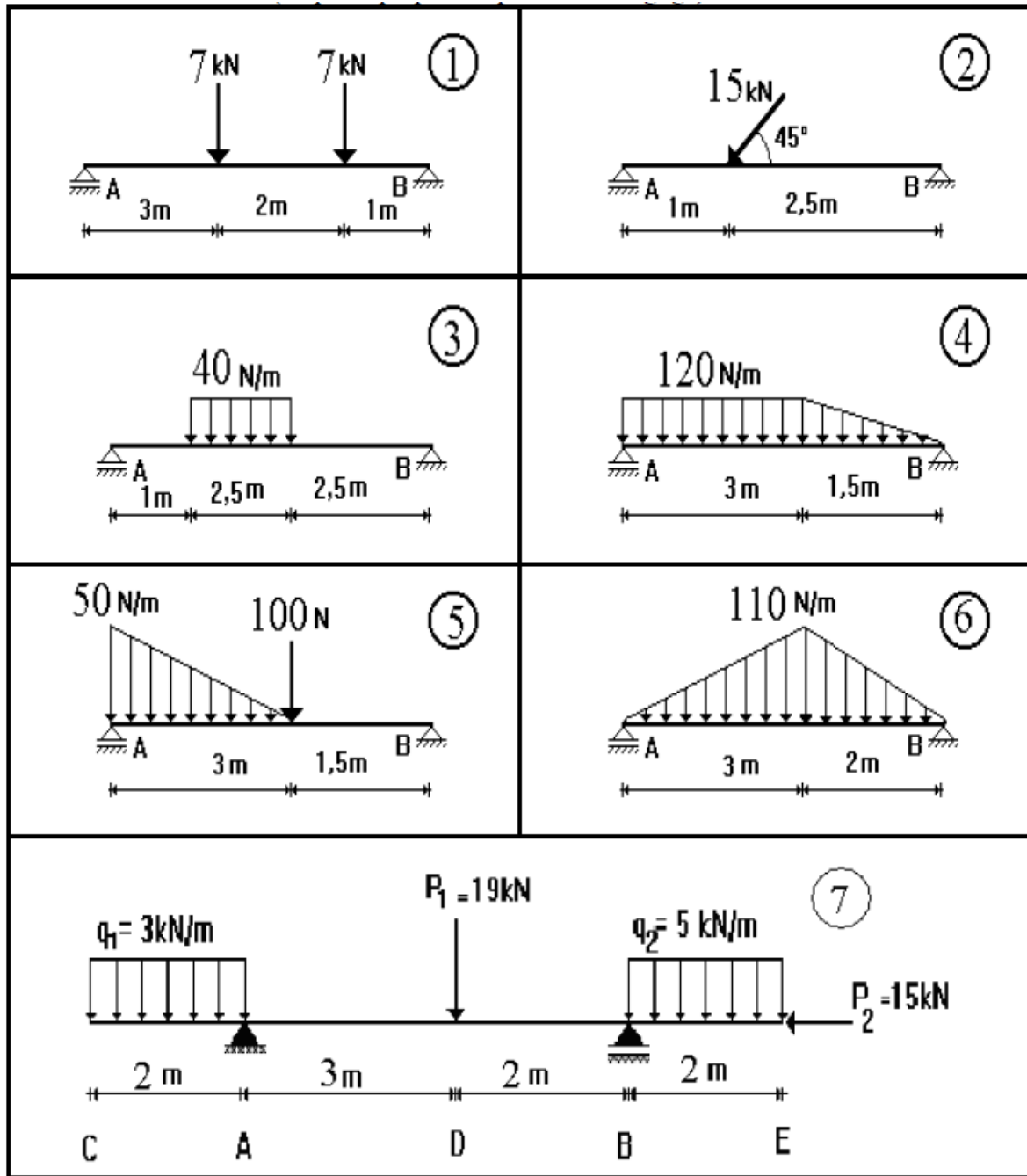


Fig. E1.7

Chapitre 2

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS DROITES

2.1. INTRODUCTION

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions n'est pas un fait du hasard. Dans la plupart des cas ces formes ont été développées pour répondre à des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité. Ce chapitre étudie les principales caractéristiques des sections droites, leurs méthodes de calcul et leurs propriétés vis-à-vis des différents cas de sollicitations.

2.2. CARACTÉRISTIQUES CARTÉSIENNES

2.2.1. Centre de gravité

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section. Les coordonnées du centre de gravité G (Y_G , Z_G) d'une section homogène (S) (Fig. 2.1) sont données par les relations:

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint_S y ds \quad (2.1)$$

$$Z_G = \frac{1}{S} \iint_S z ds$$

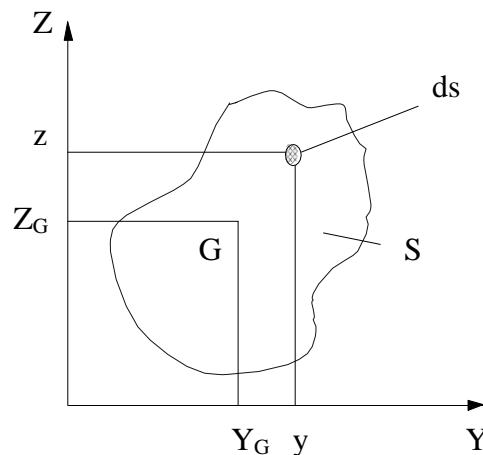


Fig. 2.1

y et z étant les coordonnées de l'aire élémentaire ds .

Ces intégrales peuvent être évaluées analytiquement si le contour de la section est exprimé par des expressions mathématiques simples. Si par contre le contour est une courbe irrégulière, on procède dans ce cas par les méthodes numériques. La méthode la plus simple consiste à discrétiser la section en éléments de surface s_i et faire la sommation comme suit:

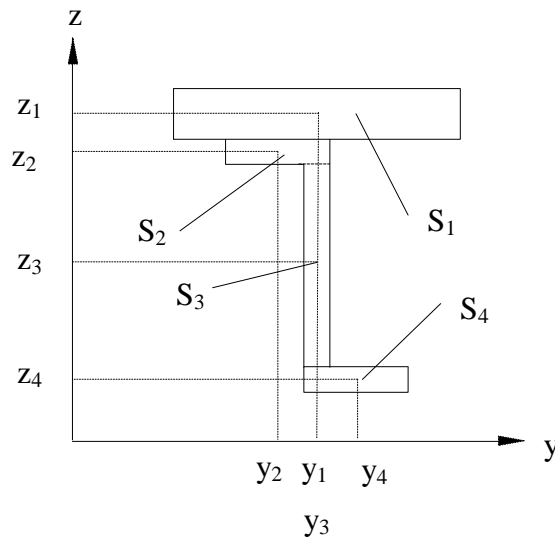


Fig. 2.2

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i} \quad (2.2)$$

$$Z_G = \frac{\sum z_i s_i}{\sum s_i}$$

Les expressions (2.2) tendent vers les solutions exactes quand les s_i couvrent complètement l'aire de la section.

2.2.2. Moments statiques

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe YOZ (Fig. 2.1). On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OY et OZ les quantités:

$$S_y = \iint_S z ds \quad (2.3)$$

$$S_z = \iint_S y ds$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

En utilisant les équations (2.1) et (2.3) deviennent:

$$S_y = S \cdot Z_G \quad (2.4)$$

$$S_z = S \cdot Y_G$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes Oy et Oz seront respectivement égaux à:

$$S_y = \sum_{i=1}^n s_i z_i \quad (2.5)$$

$$S_z = \sum_{i=1}^n s_i y_i$$

- **Remarque :**

Le moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul.

2.2.3. Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants:

$$I_y = \iint_S z^2 ds \quad (2.6)$$

$$I_z = \iint_S y^2 ds$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.

- **Section rectangulaire**

On peut déterminer les moments d'inertie d'une section rectangulaire (Fig. 2.3).

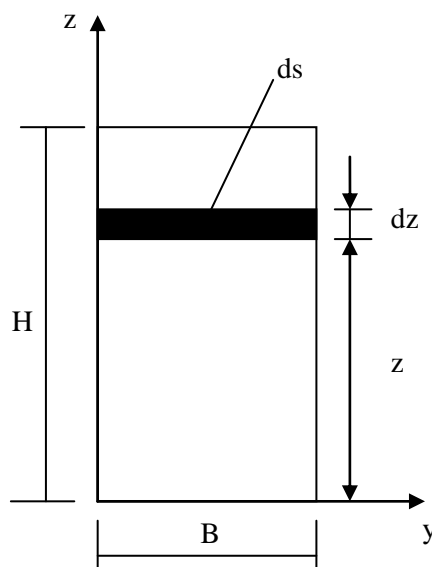


Fig. 2.3

Pour une section rectangulaire, on a :

$$ds = Bdz \quad (2.7)$$

$$I_y = \iint_S z^2 ds = B \int_0^H z^2 dz = \frac{BH^3}{3} \quad (2.8)$$

- **Section triangulaire**

On peut déterminer les moments d'inertie d'une section triangulaire (Fig. 2.4).

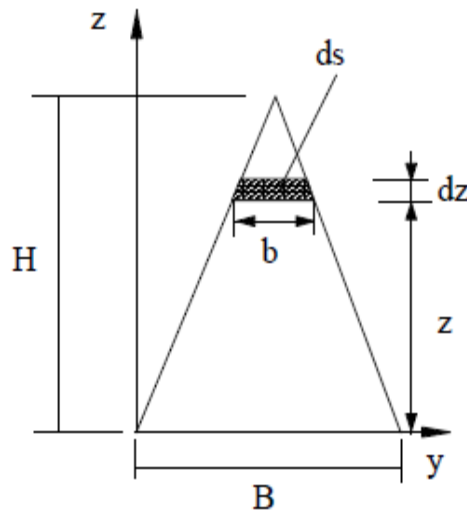


Fig. 2.4

Pour une section triangulaire, on a :

$$b(z) = \frac{B}{H}(H - z) \quad (2.9)$$

$$ds = b(z)dz \quad (2.10)$$

$$I_y = \iint_S z^2 ds = \frac{B}{H} \int_0^H z^2 (H - z) dz = \frac{BH^3}{12} \quad (2.11)$$

2.2.4. Moment d'inertie polaire

On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances r à partir du pôle. Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

$$I_p = \iint_S r^2 ds = \iint_S (z^2 + y^2) ds = I_y + I_z \quad (2.12)$$

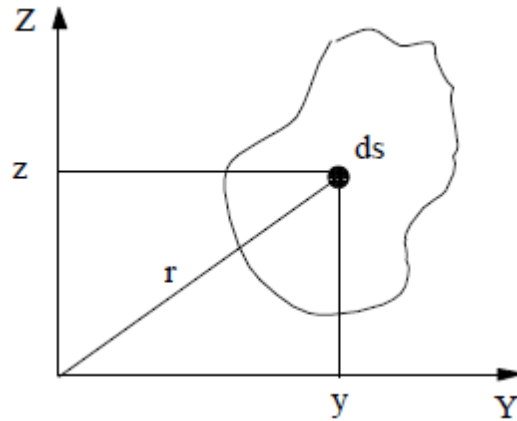


Fig. 2.5

De l'équation (2.12), il en résulte que le moment d'inertie polaire par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux passant par ce point.

Exemple 1: moment d'inertie polaire d'un cercle (Fig. 2.6)

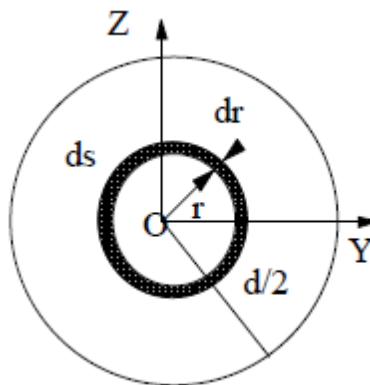


Fig. 2.6

$$I_o = \iint_S r^2 ds \quad (2.13)$$

$$I_o = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.14)$$

Exemple 2: moment d'inertie polaire d'un cercle d'un quart de cercle (Fig. 2.7)

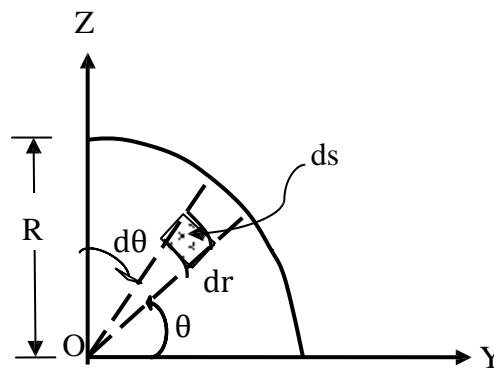


Fig. 2.7

$$I_o = \iint_S r^2 ds \quad (2.15)$$

$$I_o = \int_0^R r^2 (r dr d\theta) = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi R^4}{8} \quad (2.16)$$

2.2.5. Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)

On appelle moment produit, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées z, y :

$$I_{yz} = \iint_S yz ds \quad (2.17)$$

• Remarques :

- Les moments d'inertie quadratiques et polaire sont toujours positifs
- Selon la disposition des axes, I_{ZY} peut être positif, négatif ou nul
- En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ($I_{YZ} = 0$). Les deux axes ainsi définis sont appelés axes principaux d'inertie.
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale.

2.3. FORMULE DE TRANSFORMATION DES MOMENTS D'INERTIE

Les moments d'inertie d'une section varient selon la disposition des axes par rapport auxquels ces moments sont calculés. Deux types de transformations seront étudiés : translation et rotation d'axes. La variation des moments d'inertie par rapport à un système d'axes quelconques, est déterminée à l'aide d'une combinaison de deux transformations partant d'un système d'axe central.

2.3.1. Translation d'axes (Théorème de Huygens)

Les formules définies ci-dessous permettent la détermination des moments d'inertie par rapport à des axes Y_1, Z_1 parallèles à des axes centraux Y, Z dont les moments sont supposés connus.

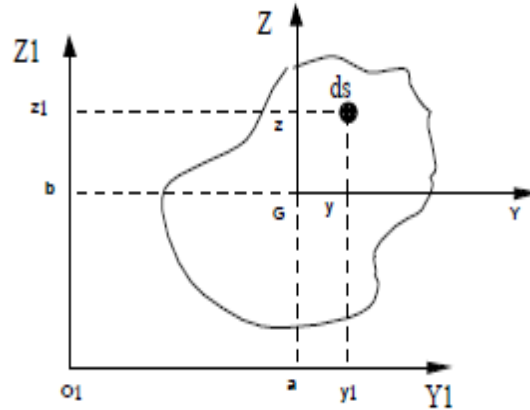


Fig. 2.8

$$I_z = \iint_S y^2 ds ; I_y = \iint_S z^2 ds ; I_{yz} = \iint_S yz ds \quad (2.18)$$

Les moments par rapport à Y_1, Z_1 :

$$I_{z_1} = \iint_S y_1^2 ds ; I_{y_1} = \iint_S z_1^2 ds ; I_{y_1 z_1} = \iint_S y_1 z_1 ds \quad (2.19)$$

La translation des axes est exprimée par :

$$y_1 = y + a \quad z_1 = z + b \quad (2.20)$$

En substituant y_1 et z_1 par leurs valeurs dans l'équation (2.19)

On obtient :

$$I_{z_1} = \iint_S (y + a)^2 ds \quad (2.21)$$

$$= \iint_S (y^2 + 2ay + a^2) ds \quad (2.22)$$

$$= \iint_S y^2 ds + 2a \iint_S y ds + a^2 \iint_S ds \quad (2.23)$$

Comme les moments statiques de l'aire par rapport aux axes centraux sont nuls, le terme

$$2a = \iint_S y ds = 0 \quad (2.24)$$

et

$$\iint_S y^2 ds = I_z \quad (2.25)$$

$$a^2 \iint_S ds = a^2 S \quad (2.26)$$

Par conséquent :

$$I_{z1} = I_z + a^2 S \quad (2.27)$$

On aurait de même:

$$I_{y1} = I_y + b^2 S \quad (2.28)$$

$$I_{y1z1} = I_{yz} + abS \quad (2.29)$$

D'où le théorème d'Huygens:

- 1- "Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes".
- 2- "Le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système d'axes orthogonal est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés plus le produit de l'aire de la section par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes.

2.3.2. Rotation d'axes

Les moments et produits d'inertie sont supposés connus dans le système d'axes OYZ . Les moments et produits d'inertie par rapport au système d'axes OY_1Z_1 obtenu par une rotation α des axes initiaux sont donnés par:

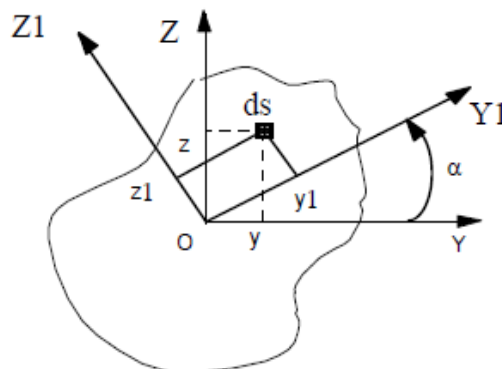


Fig. 2.9

$$I_{y1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.30)$$

$$I_{z1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.31)$$

$$I_{y1z1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (2.32)$$

En ajoutant les équations (2.30) et (2.31) terme à terme, on obtient :

$$I_y + I_z = I_{y1} + I_{z1} \quad (2.33)$$

$$I_p = I_{p1}$$

2.4. MOMENTS D'INERTIE PRINCIPAUX

Les équations de transformations expriment les variations des moments d'inertie en fonction de l'angle de rotation α . Les valeurs maximales et minimales sont particulièrement recherchées. Ils correspondent à un moment d'inertie centrifuge $I_{yz} = 0$.

On obtient ainsi l'orientation des axes principaux :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (2.34)$$

Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenues à partir des formules générales si l'on y pose $\alpha = \alpha_0$.

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.35)$$

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.36)$$

2.5. MODULE DE RÉSISTANCE

Le moment de résistance d'une section droite est le rapport entre le moment d'inertie axial et la distance la plus éloignée de cet axe.

$$W_x^{\min} = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y^{\min} = \frac{I_y}{x_{\max}} \quad (2.37)$$

2.6. RAYON DE GIRATION

Le rayon de giration d'une surface S selon l'axe x ou l'axe y est défini par :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} \quad \text{ou} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} \quad (2.38)$$

2.7. APPLICATION

Exemple :

Déterminer les moments d'inertie principaux et centraux de la section en forme de L ci-dessous.

$$S_1 = 10 \text{ cm}, Z_1 = 5 \text{ cm}, Y_1 = 0.5 \text{ cm}$$

$$I_{Z1} = 83.33 \text{ cm}^4, I_{Y1} = 0.83 \text{ cm}^4$$

$$S_2 = 9 \text{ cm}, Z_2 = 0.5 \text{ cm}, Y_2 = 5.5 \text{ cm}$$

$$I_{Z2} = 0.75 \text{ cm}^4, I_{Y2} = 60.75 \text{ cm}^4$$

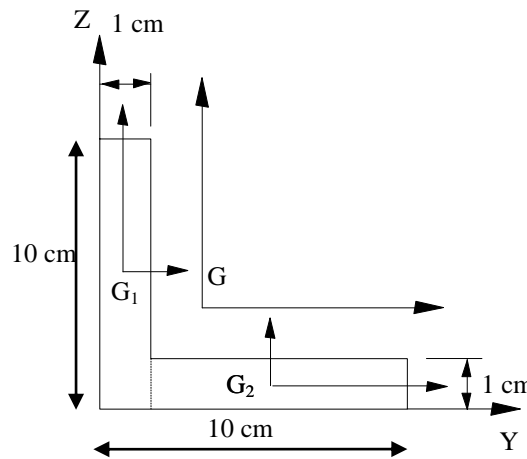


Fig. 2.10

Les coordonnées du centre de gravité sont:

$$Y_G = \frac{\sum s_i y_i}{\sum s_i} = \frac{10 \times 0.5 + 9 \times 5.5}{19} = 2.87 \text{ cm}$$

$$Z_G = \frac{\sum s_i z_i}{\sum s_i} = \frac{10 \times 5 + 9 \times 0.5}{19} = 2.87 \text{ cm}$$

Les distances entre les centres de gravité locaux et le centre de gravité de la section sont:

$$a_1 = Z_1 - Z_G = 2.13 \text{ cm} \quad a_2 = Z_2 - Z_G = -2.37 \text{ cm}$$

$$b_1 = Y_1 - Y_G = -2.37 \text{ cm} \quad b_2 = Y_2 - Y_G = 2.63 \text{ cm}$$

Les moments d'inertie centraux par rapport aux axes parallèles à OY et OZ:

$$I_y = \sum I_{yi} + S_i b_i^2 = 0.83 + 60.75 + 10 \times (-2.37)^2 + 9 \times (2.63)^2 = 180 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \sum I_{zi} + S_i a_i^2 = 83.33 + 0.75 + 10 \times (2.13)^2 + 9 \times (-2.37)^2 = 180 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = \sum I_{yzi} + S_i a_i b_i = 0 + 0 + 10 \times (2.13)(-2.37) + 9 \times (-2.37)(2.63) = -106.6 \text{ cm}^4$$

Les moments d'inertie centraux principaux sont :

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 180 \pm 106.6 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 286.6 \text{ cm}^4 \quad \text{et} \quad I_2 = 73.4 \text{ cm}^4$$

L'orientation des axes principaux :

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \Rightarrow 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

EXERCICES

2.1. Déterminer le centre de gravité de la section plane ci-dessous.

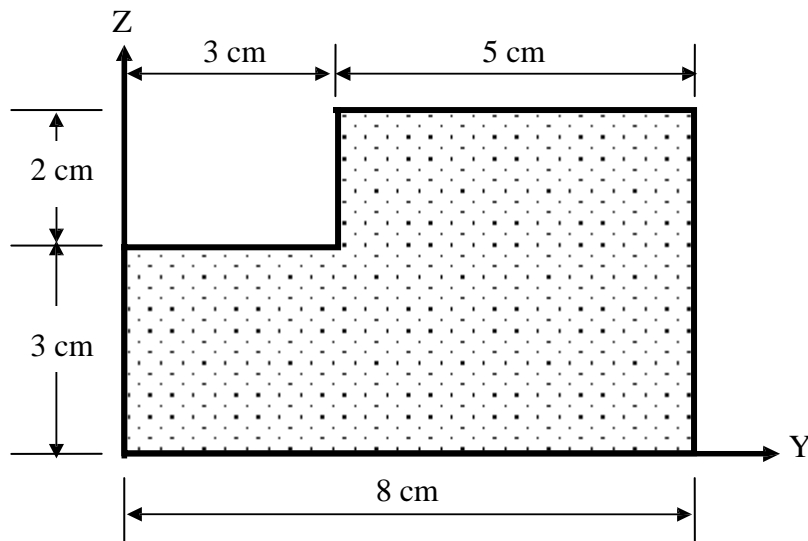


Fig. E2.1

2.2. Déterminer les moments statiques S_y et S_z de la section représentée sur la figure ci-contre et déduire les coordonnées Y_G et Z_G du centre de gravité de cette section.

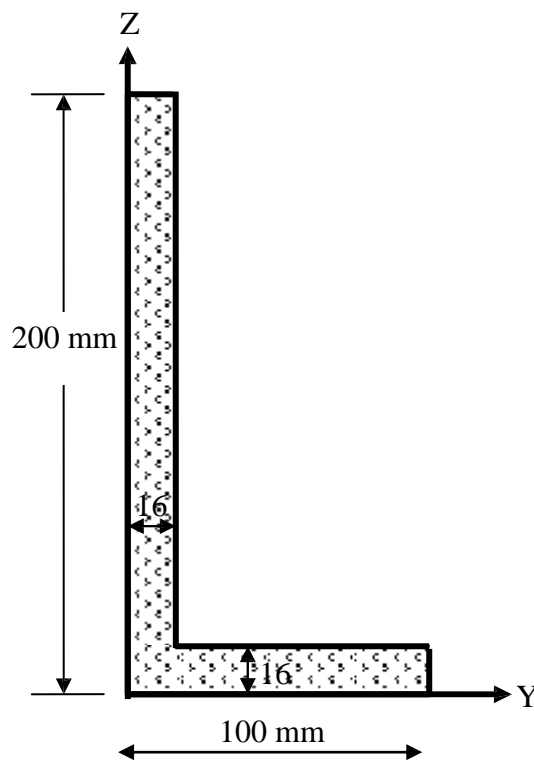


Fig. E2.2

2.3. Déterminer les moments d'inertie principaux et centraux des sections de la Fig. E2.3.

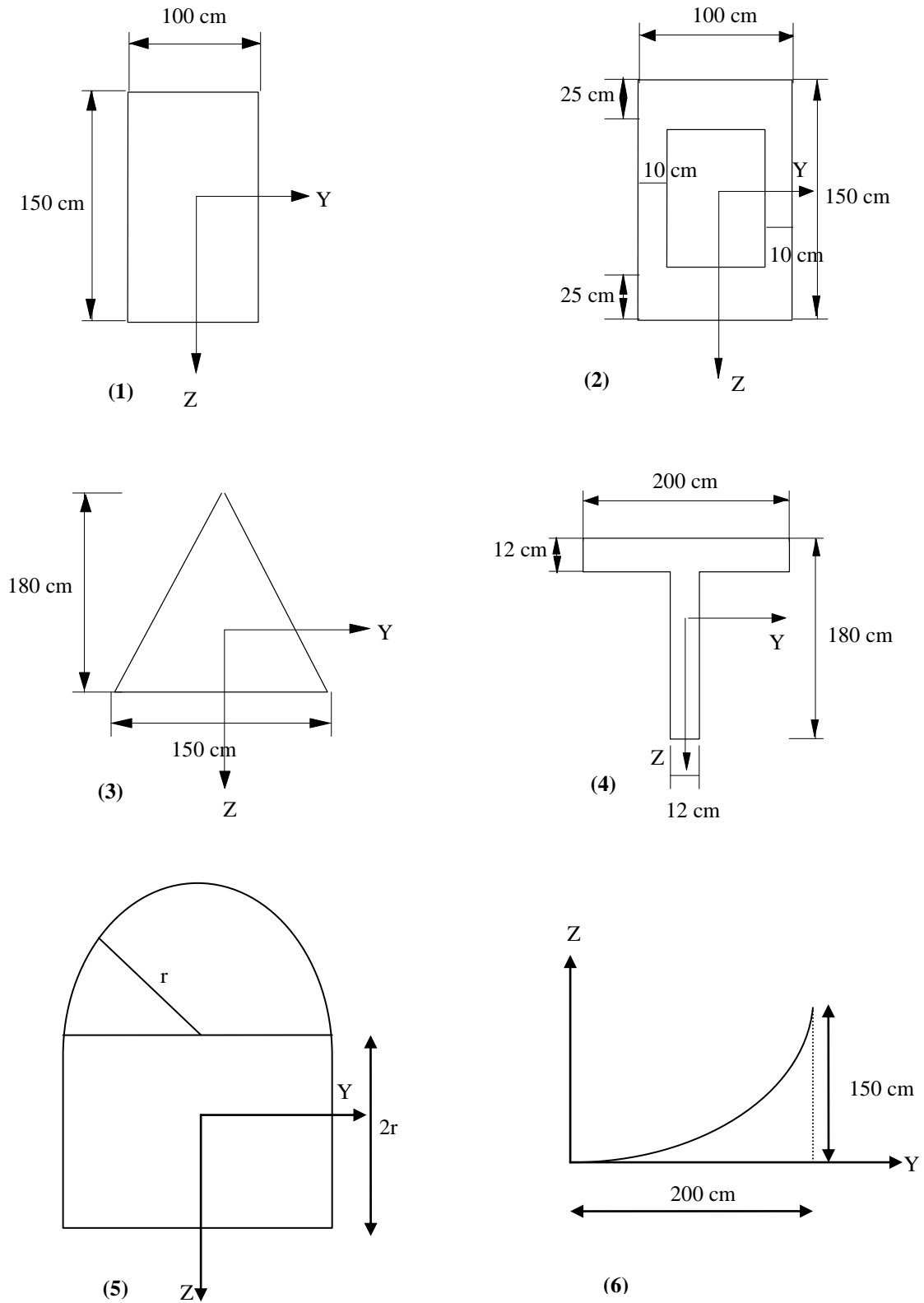


Fig. E2.3

2.4. Calculer les moments d'inertie principaux et centraux de l'ensemble représenté sur la Fig. E2.4.

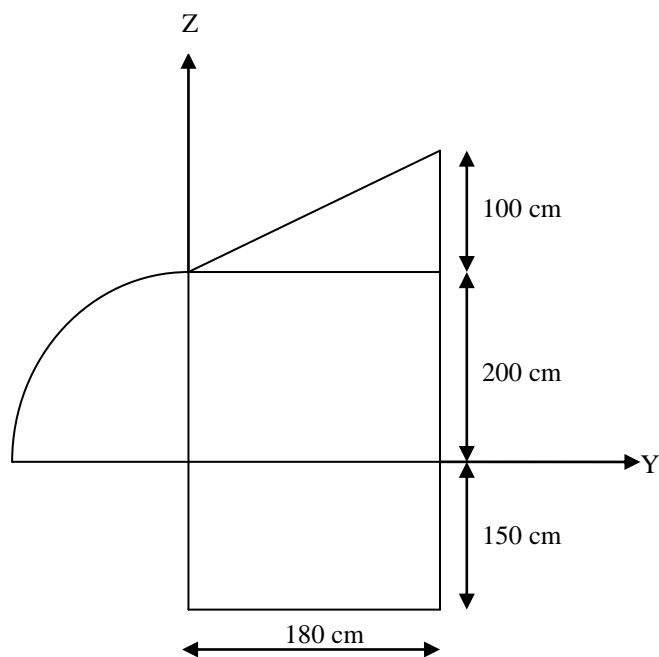


Fig. E2.4

Chapitre 3

FLEXION SIMPLE

3.1. INTRODUCTION

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinal initialement droit en une courbe curviligne (Fig. 3.1). L'état d'une section de poutre ou de toutes les composantes des efforts internes, seule un moment fléchissant M_y ou M_z n'est pas nul, est dit état de **flexion plane pure**. La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la **flèche**. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite **flexion simple**.

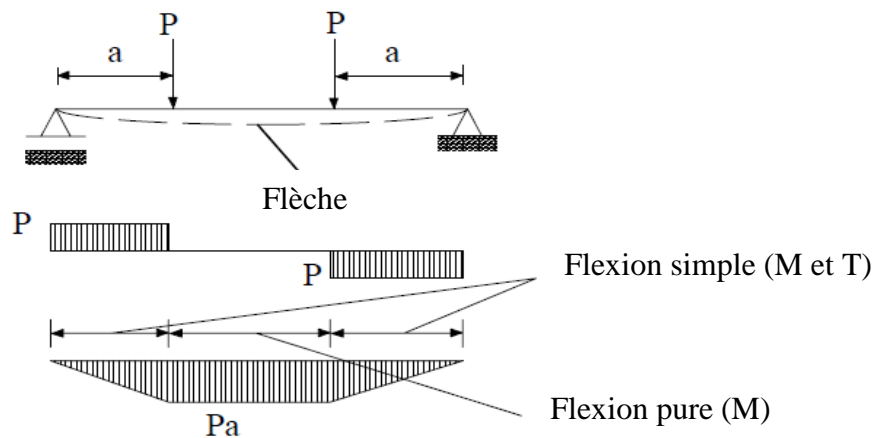


Fig. 3.1

- **Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme**

Soit k le nombre d'équations d'équilibre (6 dans l'espace, 3 dans le plan). Soit r le nombre d'inconnues (résultantes de liaison et moments de liaison).

Si $r = k$: Les actions de liaison sont déterminées par les équations de la statique. La structure est dite **isostatique** (Fig. 3.2a).

Si $r > k$: Le nombre d'équations d'équilibre est alors insuffisant à la détermination des actions de liaison inconnues. La structure est dite **hyperstatique** de degré $r - k$ (Fig. 3.2b).

Si $r < k$: l'équilibre est impossible en général. Le système est **hypostatique (mécanisme)**. L'étude des mécanismes déborde du cadre la résistance des matériaux (Fig. 3.2c).

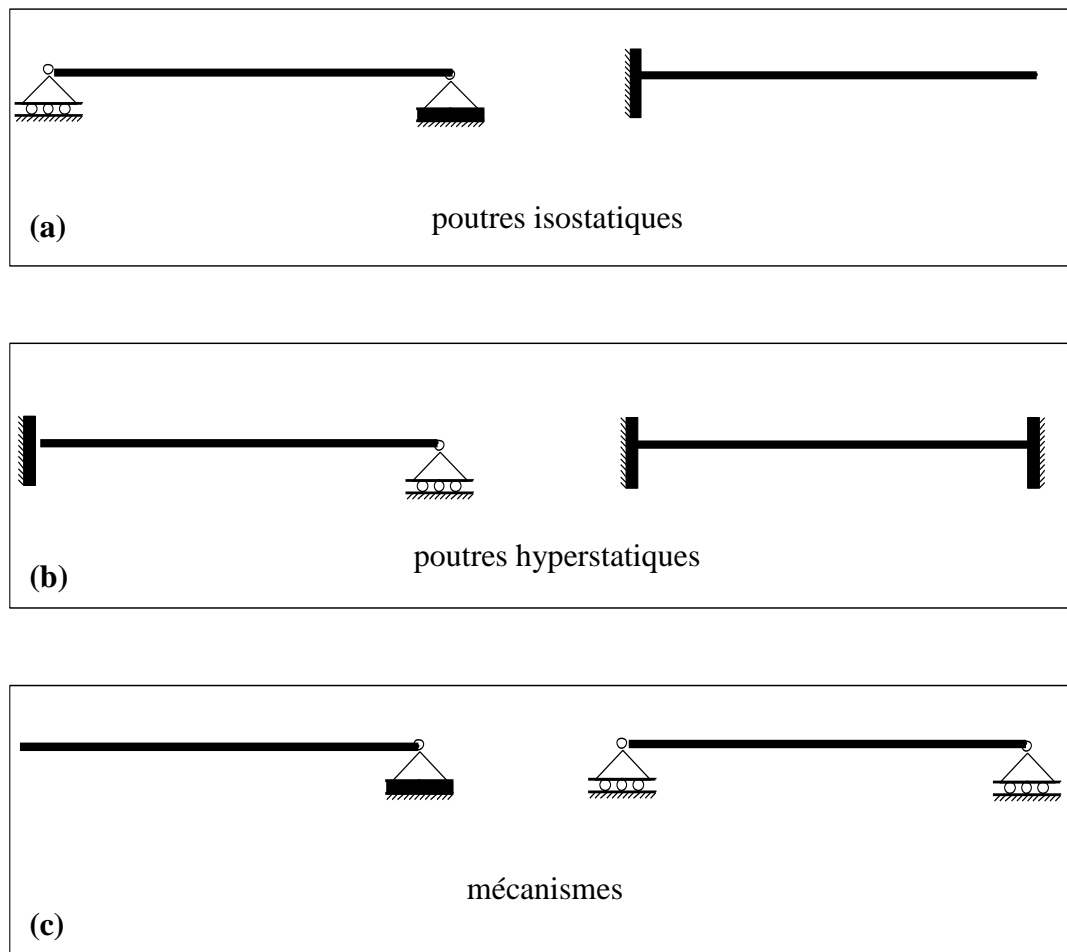


Fig. 3.2

3.2. DÉFINITION

Une poutre est soumise à la **flexion** lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa **courbure** (Fig. 3.3).

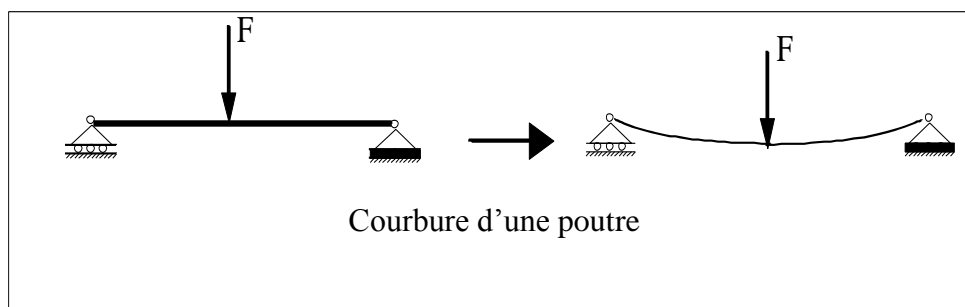


Fig. 3.3

- On entend par **flexion simple** un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre il existe deux composantes des efforts intérieurs: le moment fléchissant M_{FZ} (ou M_{FY}) et l'effort tranchant T_Y (ou T_Z).

La flexion est dite **simple**, lorsque la poutre possède un **plan de symétrie** et que les forces fléchissantes agissent dans ce plan, **perpendiculairement** au grand axe de la poutre (Fig.3.4).

Nous nous limiterons dans ce cours à l'étude de la flexion des poutres droites isostatiques, c'est-à-dire celle pour lesquelles les équations d'équilibre suffisent à la détermination des actions de liaison. Nous nous limiterons également aux poutres dont le plan de symétrie est vertical (Gxy).

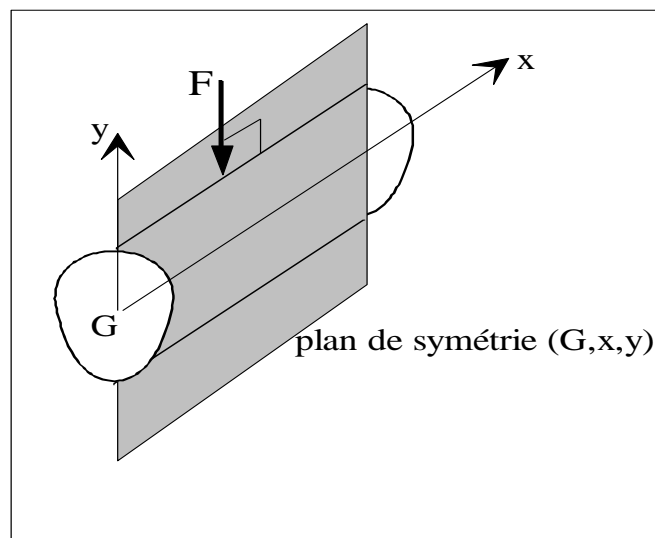


Fig.3.4

- **Hypothèses :**

- Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- Hypothèse de Navier-Bernoulli : Les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

3.3. EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLÉCHISSANTS

La construction des diagrammes des éléments de réduction constitue une étape essentielle dans toute étude de RDM. Un diagramme est un graphe qui indique la valeur (intensité et nature) de la sollicitation considérée dans toutes les sections du système étudié.

Les diagrammes des éléments de réduction permettent de localiser les sections les plus sollicitées (sièges des contraintes les plus élevées) et servent au dimensionnement des différents éléments des structures.

Dans la construction des diagrammes, les valeurs positives et négatives sont portées de part et d'autre d'un axe-origine. Par ailleurs, pour le diagramme du moment fléchissant, on a pour habitude de porter les ordonnées toujours du côté des fibres tendues.

Soit la poutre ci-dessous (Fig. 3.5) soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point C qui divise la poutre en deux parties notées gauche et droite. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).

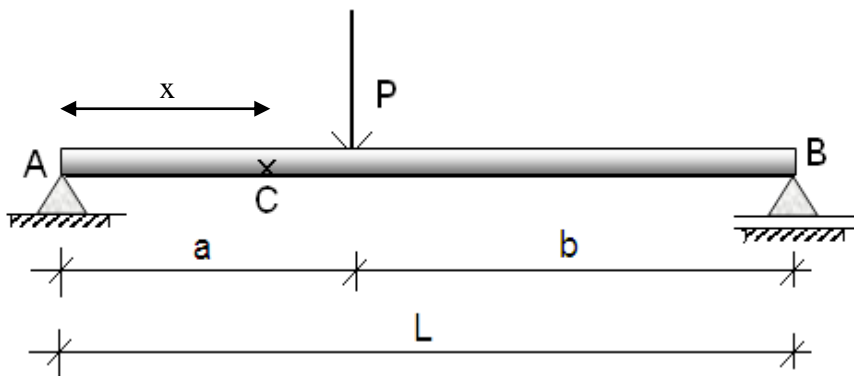


Fig. 3.5

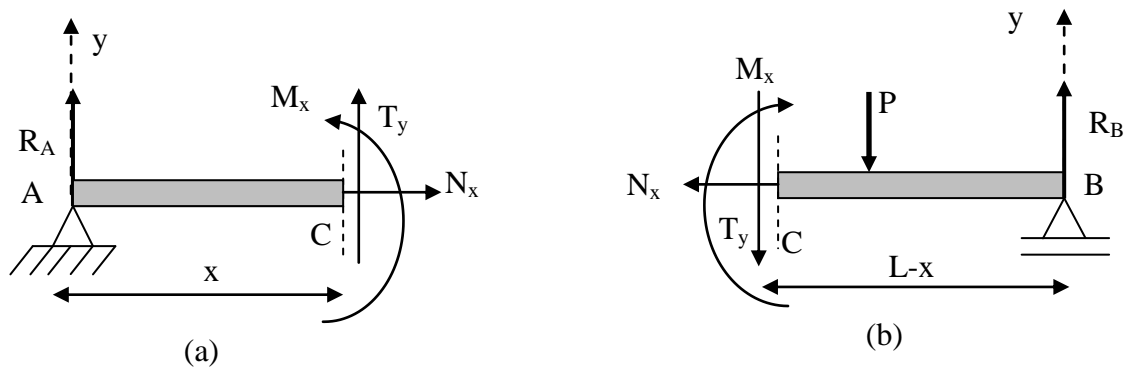
Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que :

- Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- Chaque partie est en équilibre

Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la Fig.3.6.

L'effort tranchant $T(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la partie gauche.

Le moment fléchissant $M(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur la partie gauche.



- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
 - $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = - Pb/L$
 - $\sum M/c = 0 \Rightarrow M_x = (Pb/L) \cdot x$
- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
 - $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = Pa/L - P \Rightarrow T_y = - Pb/L$
 - $\sum M/c = 0 \Rightarrow M_x = (Pa/L) \cdot (L-x) - p(L-x-b)$
 $\Rightarrow M_x = (Pb/L) \cdot x$

Fig. 3.6

3.4. DIAGRAMME DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS FLÉCHISSANTS

En général, les efforts et moments agissant dans différentes sections varient le long de la poutre. Entre autres les valeurs maximales et minimales de ces efforts et moments sont d'une grande importance pour la sécurité de la poutre, on s'intéresse donc à tracer des courbes qui montrent comment changent les efforts et les moments d'une section à une autre, on appelle ces courbes les diagrammes des efforts et des moments.

On se limite dans cette section à l'étude des diagrammes des efforts et des moments dans les poutres à deux dimensions (plan XOY), ce qui réduit le nombre des efforts et des moments à trois, à savoir un effort normal N, un effort tranchant Ty, et un moment fléchissant Mx.

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction T(x) et le diagramme des moments fléchissants est la courbe représentative de la fonction M(x), où x est l'abscisse de la poutre de l'une de ses extrémités.

3.5. RELATION ENTRE MOMENT FLÉCHISSANT ET EFFORT TRANCHANT

Considérons un élément de poutre pris entre deux sections (Σ) et (Σ') infiniment voisines, distantes de dx (Fig.3.7).

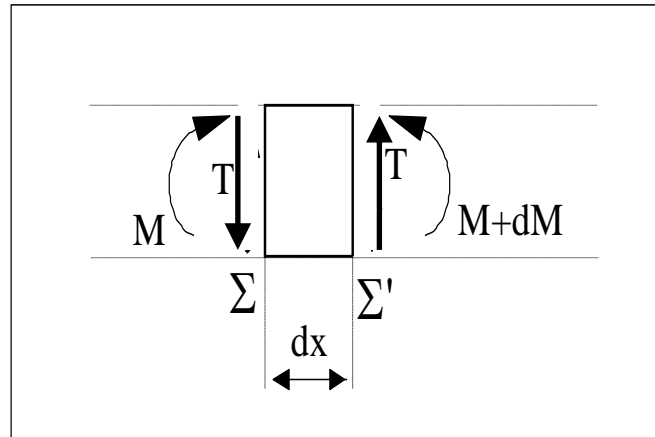


Fig.3.7

L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par T et M .

L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par T' , et M' .

Si aucun effort ne s'exerce sur la poutre entre les sections (Σ) et (Σ'), les efforts tranchants de ces deux sections sont égaux ($T' = T$). Par contre le moment fléchissant M' diffère de M :

$$(M' = M + dM).$$

L'équilibre de l'élément s'écrit :

$$M - T dx - M - dM = 0$$

Soit :

$$\frac{dM}{dx} = - T \quad (3.1)$$

Ainsi, sur toute portion de poutre comprise entre des charges, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse x du moment fléchissant.

3.6. RELATION ENTRE EFFORT TRANCHANT ET CHARGEMENT RÉPARTI

Considérons le cas où une charge répartie, d'intensité q , s'exerce entre les sections (Σ) et (Σ') (Fig. 3.8). La charge totale appliquée sur l'élément est $q dx$.

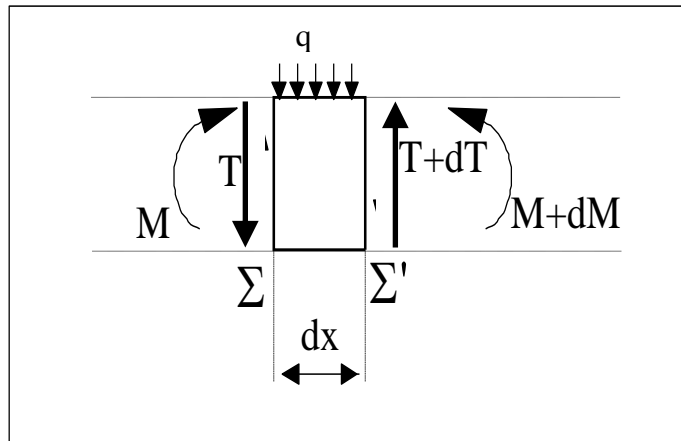


Fig. 3.8

Si q est compté positivement vers le bas, on conclut d'après l'équilibre de l'élément que :

$$-T - q dx + T + dT = 0.$$

Ce qui veut dire que :

$$\frac{dT}{dx} = q \quad (3.2)$$

L'équilibre des moments donne :

$$M - T dx + q dx \frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

En négligeant le second ordre ($q \frac{(dx)^2}{2}$), il reste $T = -\frac{dM}{dx}$. Ce qui veut dire que la relation entre effort tranchant et moment fléchissant reste valable au premier ordre.

- **Remarque :** Au passage d'une charge concentrée

Lorsqu'une charge concentrée s'exerce entre (Σ) et (Σ') (Fig. 3.9). L'équilibre s'écrit $T = T' - F$. L'effort tranchant varie d'une quantité F lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge. En ce point, la pente du moment fléchissant (dM/dx) varie brusquement (point anguleux).

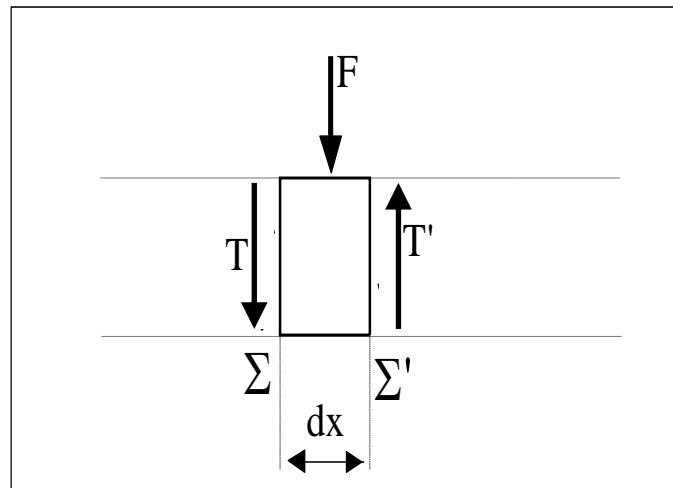


Fig. 3.9

- **Important**

Ces relations sont d'une importance capitale et permettent, dans la majorité des cas, d'éviter les calculs fastidieux et de tracer rapidement les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants.

3.7. APPLICATIONS

Etudier et tracer les diagrammes des éléments de réduction (M, T, N) pour les différents cas suivants :

1. Cas d'une poutre simplement appuyée (Fig. 3.10), soumise à une force P concentrée à mi-travée

Détermination des réactions :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_B = 0.5 P$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A = 0.5 P$$

Expressions des efforts internes :

Tronçon I : $0 \leq x \leq L/2$

$$N = 0$$

$$T(x) = -0.5P$$

$$M(x) = 0.5P \cdot x$$

$$M(0) = 0, \quad M(L/2) = PL/4$$

Tronçon II : $L/2 \leq x \leq L$

$N = 0$

$T(x) = -0.5p + p = 0.5P$

$M(x) = 0.5P \cdot x - P(x - L/2)$

$M(L/2) = PL/4, M(L) = 0$

$M_{max} = M(L/2) = PL/4 = 0.25 PL$

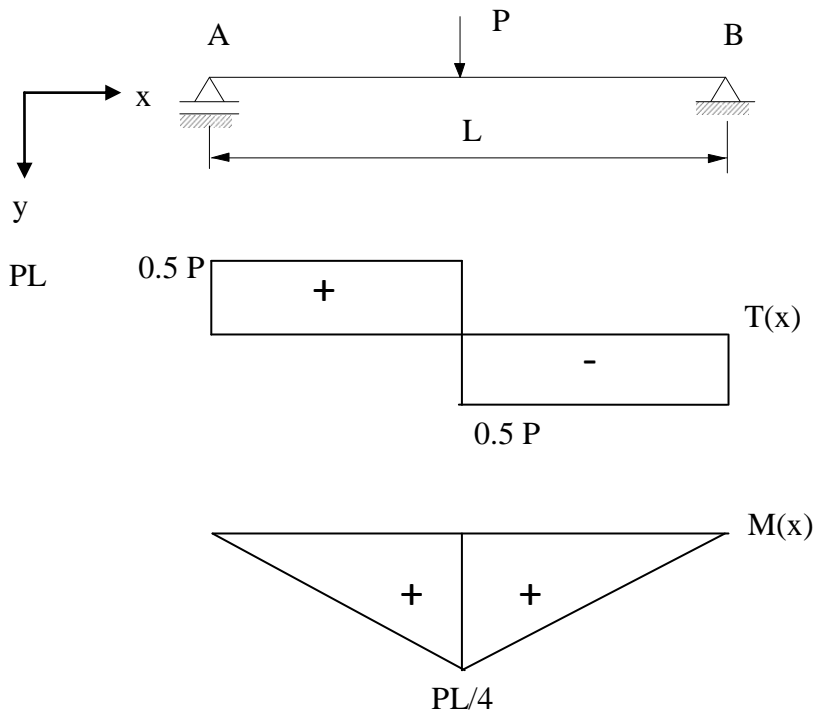


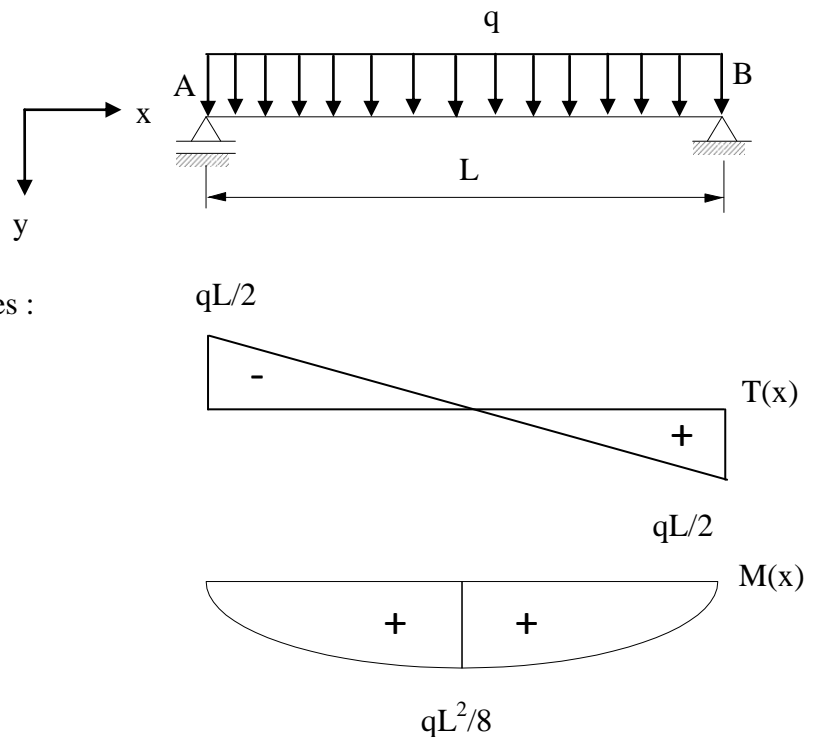
Fig. 3.10

2. Cas d'une poutre simplement appuyée (Fig. 3.11), soumise à une charge uniformément répartie q

Détermination des réactions :

$R_A = qL/2$

$R_B = qL/2$



Expressions des efforts internes :

$0 \leq x \leq L$

$N = 0$

$T(x) = -qL/2 + qx$

$T(0) = -qL/2$

$T(L) = qL/2$

$M(x) = (qL/2) \cdot x - qx^2/2$

$M(0) = 0, M(L) = 0$

$M_{max} = M(L/2) = qL^2/8$

Fig. 3.11

3. Cas d'une poutre simplement appuyée (Fig. 3.12), soumise à une charge triangulairement répartie q

Détermination des réactions :

$$R_A = qL/6$$

$$R_B = qL/3$$

Expressions des efforts internes :

$$0 \leq x \leq L$$

$$N = 0$$

$$T(x) = -qL/6 + q \cdot (x/L) \cdot (x/2)$$

$$T(0) = -qL/6$$

$$T(L) = qL/3$$

$$M(x) = (qL/6)x - q \cdot (x/L) \cdot (x/2) \cdot (x/3)$$

$$M(0) = (qL/6)x - (q/6L)x^3$$

$$M(L) = 0$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = 0.04 qL^2$$

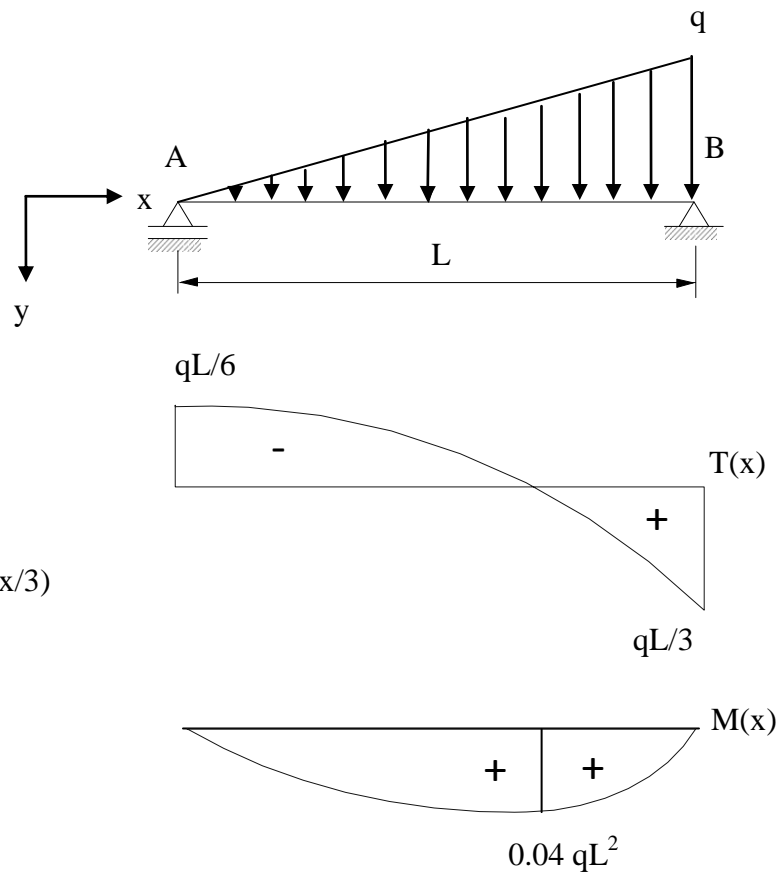


Fig. 3.12

3.8. CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION PLANE

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La Fig. 3.13 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:

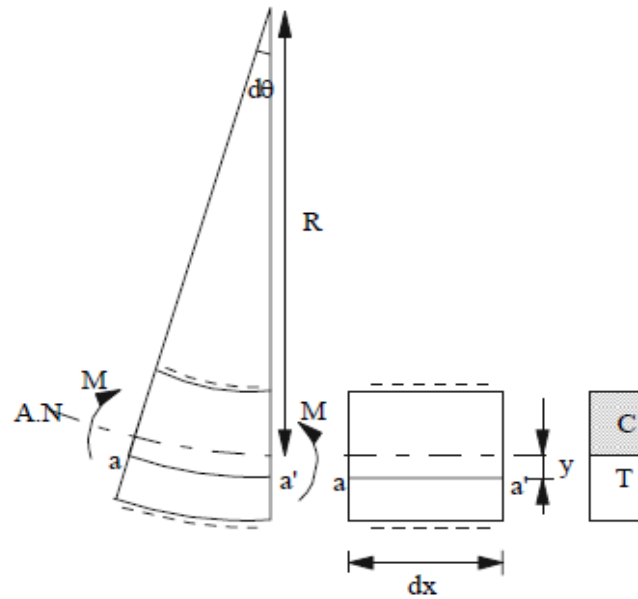


Fig. 3.13

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx} \quad (3.3)$$

avec

$$dx = R d\theta \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.6)$$

$$\text{D'où } \sigma = \frac{E}{R} y \quad (3.7)$$

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre (Fig.3.14) est :

$$\iint_S \sigma y \, ds = M \quad (3.8)$$

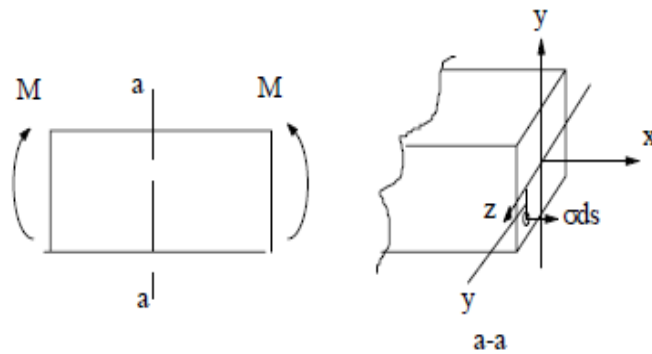


Fig. 3.14

En introduisant la valeur de σ de l'équation (3.7) dans l'expression (3.8) on obtient :

$$M = \iint_s \frac{E}{R} y^2 ds \quad (3.9)$$

$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds \quad (3.10)$$

$$M = \frac{EI_z}{R} \quad (3.11)$$

En introduisant l'équation (3.7) dans (3.11), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur :

$$\sigma = \frac{M y}{I_z} \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) est appelée formule de Navier dont on note que :

- Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie I .
- Les contraintes varient linéairement avec la distance y de l'axe neutre.
- La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

3.9. CONTRAINTES TANGENTIELLES EN FLEXION

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire (Fig.3.15) sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles). L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontrée par superposition de deux poutres de hauteur h simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi-travée (Fig. 3.16). On constate qu'il y a un glissement des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur $2h$.

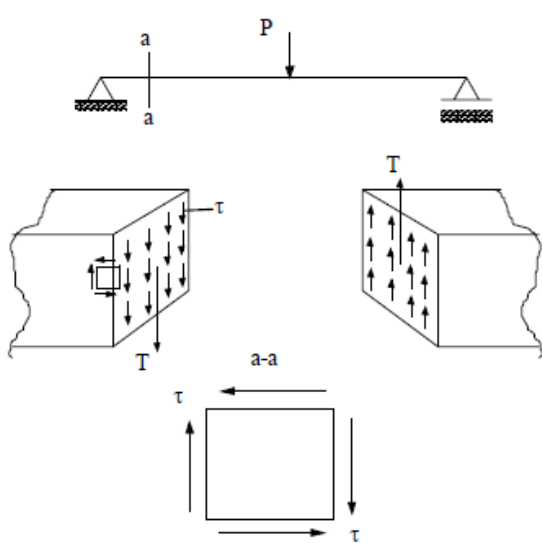


Fig. 3.15

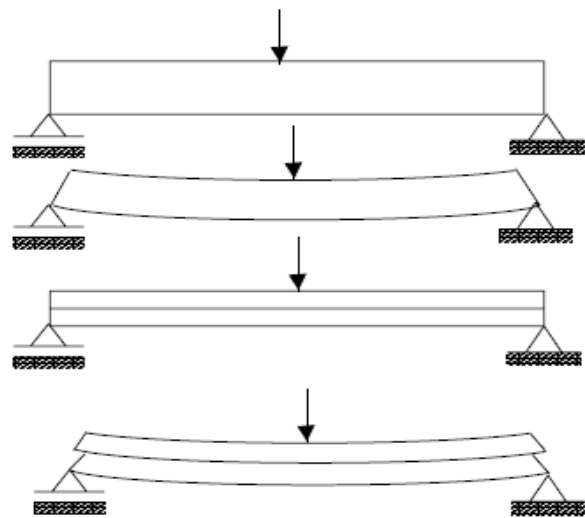


Fig. 3.16

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant constant T et un moment fléchissant variant de M à $M+dM$ (Fig. 3.17).

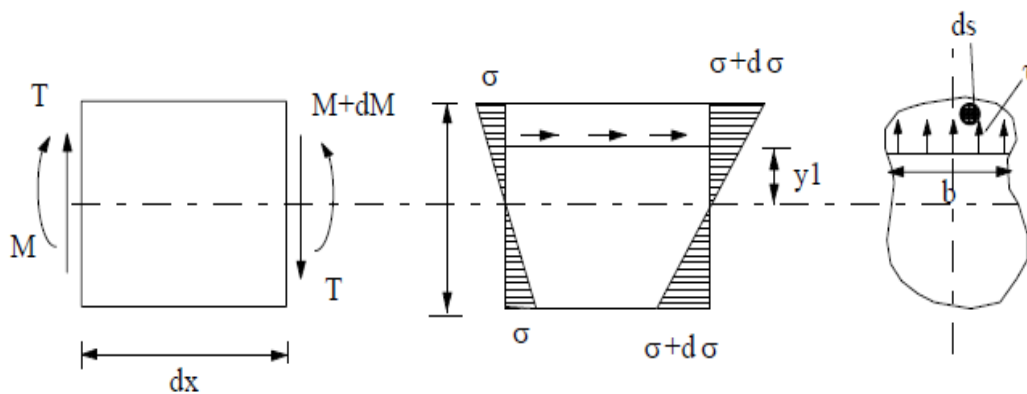


Fig. 3.17

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y_1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx , $\sigma+d\sigma$ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ .

Ecrivons l'équation d'équilibre:

$$\iint_{s_1} \sigma ds - \iint_{s_1} (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b dx = 0 \quad (3.13)$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section bdx :

$$\tau b dx = \iint_{s_1} d\sigma ds = \iint_{s_1} \frac{dM}{I} y ds \quad (3.14)$$

$$= \frac{dM}{I} \iint_{s_1} y ds \quad (3.15)$$

$$= \frac{dM}{I} S_1^* \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{Ib} = \frac{TS_1^*}{Ib} \quad (3.17)$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par :

$$\tau = \frac{TS_z^*}{I_z b} \quad (3.18)$$

avec

τ : contrainte tangentielle

b : largeur de la section dans la couche considérée

I_z : moment d'inertie

S_z^* : moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée

T : l'effort tranchant

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée y comme le rapport S_z^*/b . τ est nul aux points les plus éloignés du centre de gravité et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de S_z^*/b .

3.10. CALCUL DE RÉSISTANCE EN FLEXION

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où σ est maximale $\tau = 0$, par contre là où τ est maximale $\sigma = 0$.

D'habitude on vérifie les contraintes normales et tangentielles séparément. Comme le cas d'une flexion pure, la condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{\max} y}{I} \leq [\sigma] \quad (3.19)$$

On devra aussi vérifier :

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max} S_{\max}^*}{bI} \leq [\tau] \quad (3.20)$$

Cependant dans le cas où dans des sections de poutre il existe des points supportant l'action simultanée d'importantes contraintes normales et tangentielles, il convient de vérifier la résistance de la poutre par rapport aux contraintes principales, en utilisant les diverses théories de résistance.

3.11. DÉFORMÉE D'UNE POUTRE SOUMISE À LA FLEXION SIMPLE (FLÈCHE)

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. On désigne par **flèche** à l'abscisse x , le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à cette abscisse. Elle est comptée positivement si le déplacement s'effectue vers le haut. Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de **déformée** (Fig. 3.18).

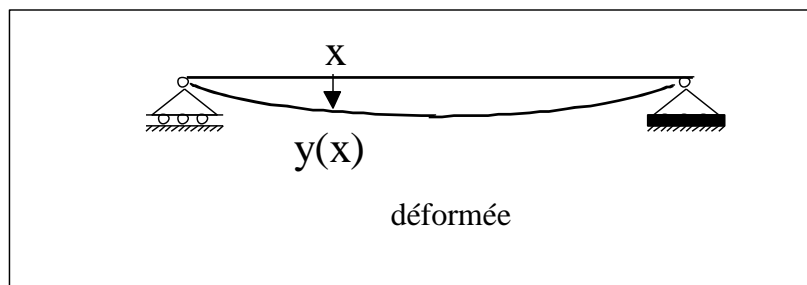


Fig. 3.18

On admet la relation suivante qui permet le calcul de la déformée :

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI} \quad (3.21)$$

$y''(x)$: dérivée seconde de la flèche par rapport à x

$M(x)$: moment fléchissant à la section d'abscisse x

E : module d'élasticité longitudinale (module d'Young)

I : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Δ passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre. La Fig. 3.19 montre des expressions du moment d'inertie central pour des sections usuelles.

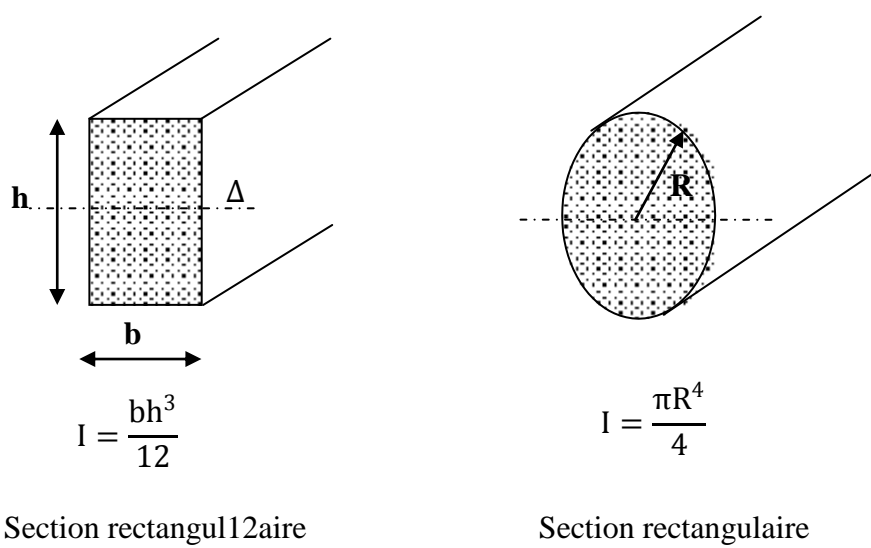


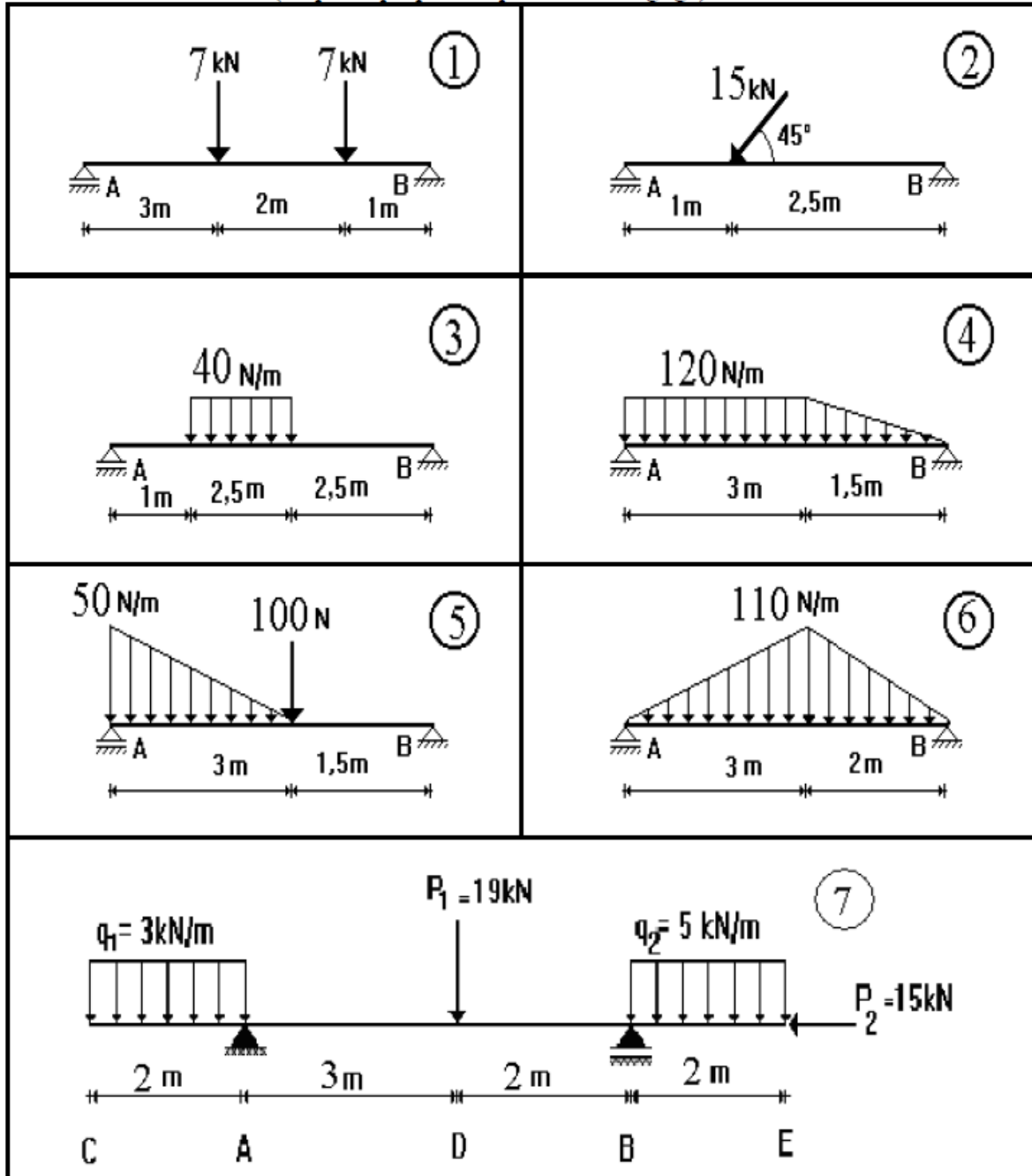
Fig. 3.19

Pour avoir la flèche y , il faut donc intégrer cette équation deux fois, d'où l'obtention d'une équation fonction de deux constantes que l'on obtient par les conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent, généralement:

- Pour **un appui** : $y = 0$
- Pour **un encastrement**: $y = 0$ et $y' = 0$ (formules de Bresse)

EXERCICES

3.1. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant T et le momoent fléchissant M_f des systèmes ci-dessous (Fig. E3.1).



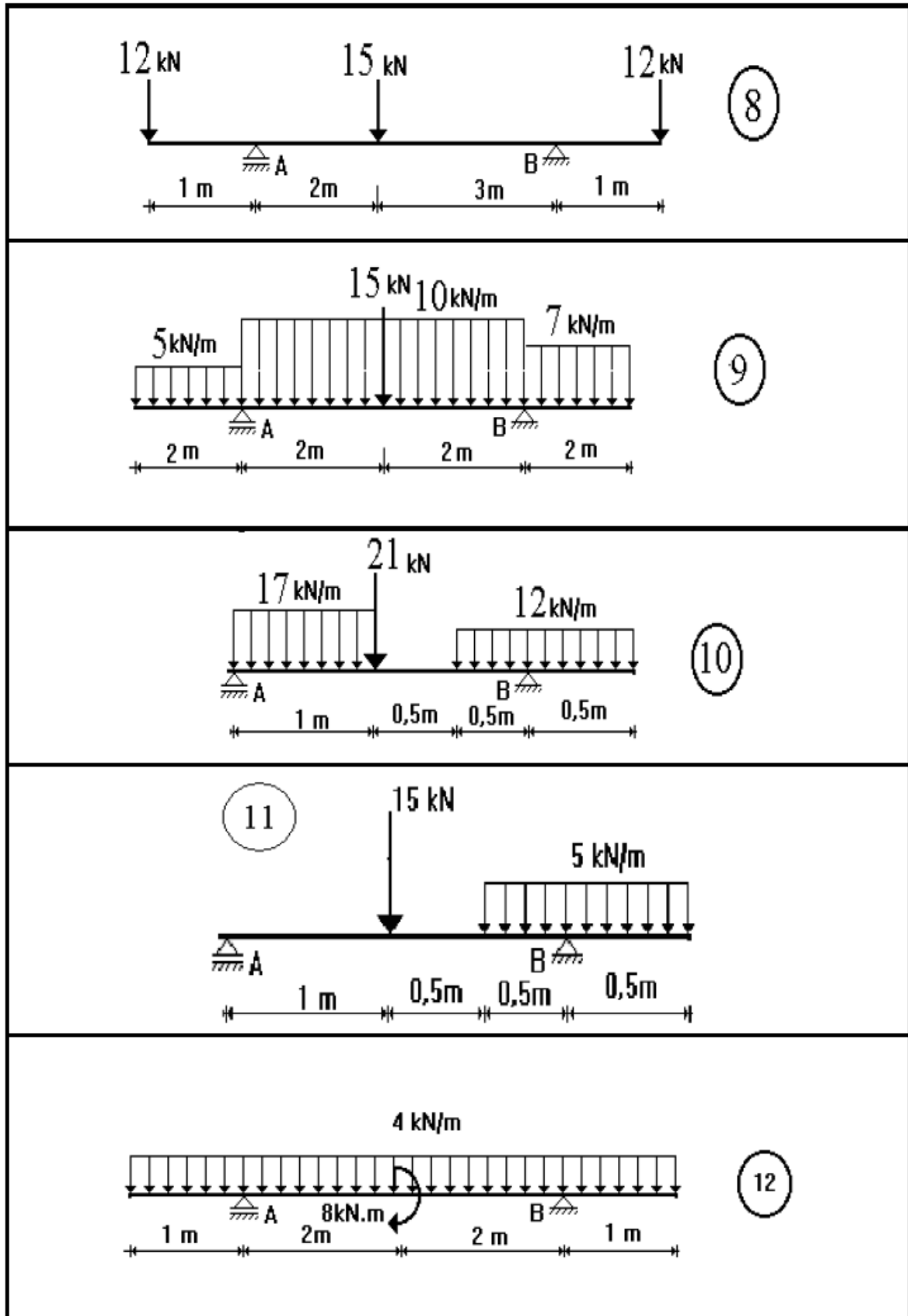


Fig. E3.1

3.2. Déterminer le moment fléchissant de résistance maximal d'une poutre en T soumise à une flexion simple, sachant que la largeur de la semelle est de 150 mm, la hauteur totale de la section est de 150 mm et l'épaisseur de l'âme et de la semelle est de 12 mm. La contrainte admissible de tension ou de compression est de 155 N/mm^2 .

- Quelle est la valeur maximale d'une force concentrée à mi-travée d'une poutre de 4 m de long et simplement appuyée aux extrémités.

3.3. Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous (Fig. E3.3) si la contrainte admissible $[\sigma]=160 \text{ N/mm}^2$.

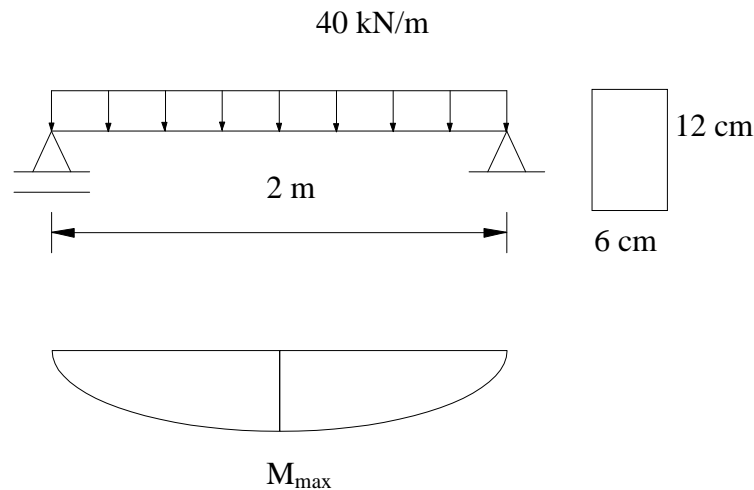


Fig. E3.3

3.4. Une section rectangulaire de 100 mm de hauteur et 12 mm de largeur est soumise à un effort tranchant de 20 kN suivant la hauteur de la section.

1- Calculer la contrainte tangentielle maximale.

2- La contrainte tangentielle sur une bande située à 25 mm de la base de la section.

3.5. Une poutre en bois de section rectangulaire est simplement appuyée aux extrémités. Sachant que $[\sigma] = 12 \text{ N/mm}^2$ et $[\tau] = 1 \text{ N/mm}^2$.

- Déterminer le rapport de la portée de la poutre sur la hauteur de la section qui permet à une force appliquée à mi-travée de provoquer à la fois des contraintes tangentielles et normales admissibles.

3.6. Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire, comme le montre la figure cidessous (Fig. E3.6).

1- Calculer les réactions aux appuis.

2- Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant tout au long de la poutre.

3- Déterminer la section (ou les sections) dangereuse.

4- Tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre, pour la section (ou les sections) dangereuse.

5- Déterminer la dimension b sachant que $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$, $h = 15 \text{ cm}$.

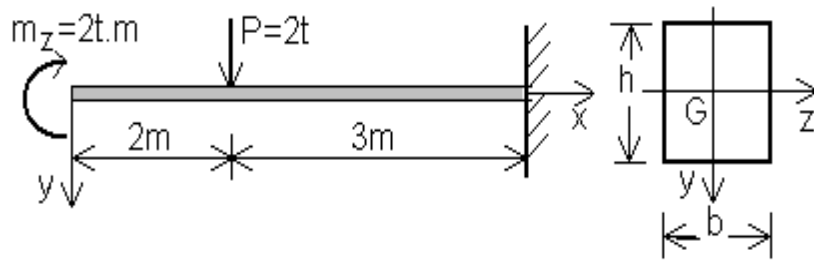


Fig. E3.5

3.7. Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous (Fig. E3.7).

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre D de la section si $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$.

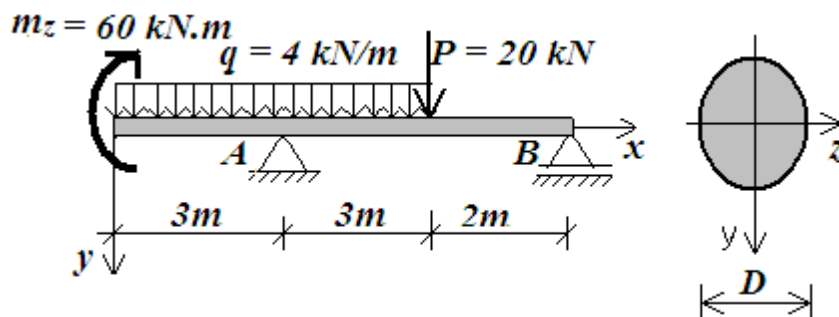


Fig. E3.7

3.8. Soit une poutre en acier de section transversale triangulaire (Fig. E3.8). Déterminer la dimension b de la section transversale. On donne $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$, $h = 12 \text{ cm}$.

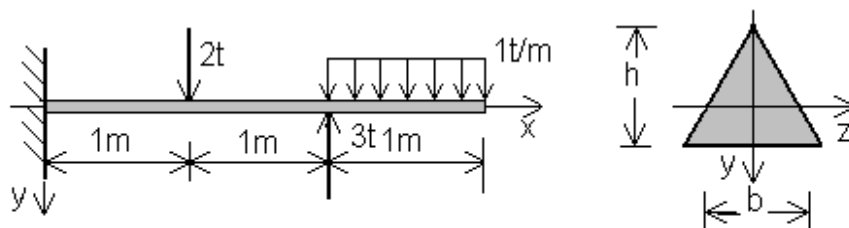


Fig. E3.8

Chapitre 4

TRACTION ET COMPRESSION SIMPLES

4.1. INTRODUCTION

Ce chapitre étudie le comportement des éléments de structure sollicités axialement. Tous les éléments ayant des lignes moyennes droites et soumis à des efforts axiaux (de traction ou de compression) font l'objet de cette étude.

Ce type d'éléments (généralement des barres) peuvent être rencontrés dans différentes structures tel que les systèmes réticulés (ferme, poutre à treillis,...etc.), les diagonales de contreventement, les boulons, et les poteaux des bâtiments...etc. Les aires des sections de ces éléments peuvent avoir plusieurs formes: section pleine, creuse, ou à paroi épaisse.

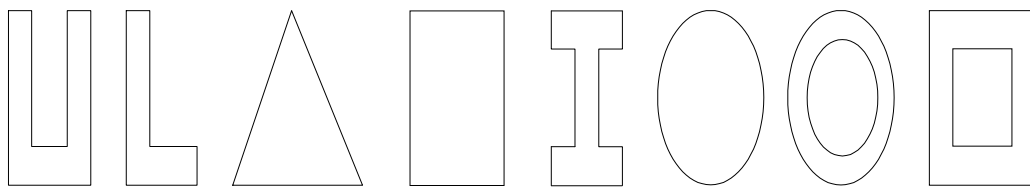


Fig. 4.1

Le calcul des contraintes maximales développées et les déformations longitudinales constituent une étape essentielle dans l'analyse et la conception des structures formées d'éléments sollicités par des efforts axiaux.

4.2. DÉFINITION

Une barre rectiligne (Fig. 4.2) sollicitée par deux forces égales et directement opposées agissant suivant sa fibre moyenne est soumise à un effort normal. Cet effort est :

- un effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre.
- un effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.

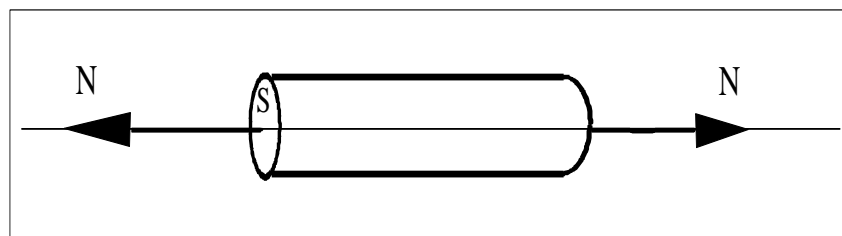


Fig. 4.2

4.3. DÉFORMATION DES BARRES EN TRACTION ET COMPRESSION

Soit une barre prismatique de longueur L soumise à un effort de traction N (Fig. 4.3).

$$\text{La contrainte normale : } \sigma = \frac{N}{S} \quad (4.1)$$

avec

N : effort de traction

S : aire de la section

$$\text{La déformation relative : } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (4.2)$$

$$\text{La loi de Hooke : } \sigma = E \varepsilon \quad (4.3)$$

En substituant (4.1) et (4.2) dans (4.3)

On obtient :

$$E \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{S} \Rightarrow N = \frac{ES}{L} \Delta L \quad (4.4)$$

Par analogie avec un ressort de raideur K sollicité par un effort N qui se déforme de ΔL , tel que :

$$N = K \Delta L \quad (4.5)$$

La rigidité longitudinale d'une barre est obtenue par identification de l'équation (4.4) et (4.5):

$$K = \frac{ES}{L} \quad (4.6)$$

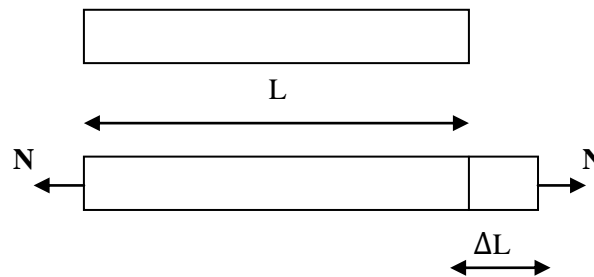


Fig. 4.3

La rigidité longitudinale ou l'aptitude d'un élément à se déformer longitudinalement dépend donc des caractéristiques mécaniques et géométriques de l'élément.

Pour une barre composée de plusieurs tronçons (Fig. 4.4), la déformation totale est donnée par:

$$\Delta L = \sum \frac{N_i L_i}{E_i S_i} \quad (4.7)$$

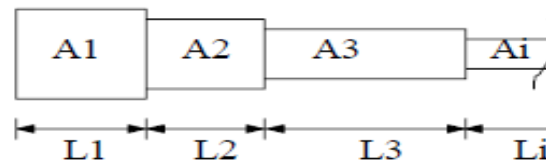


Fig. 4.4

Et pour le cas le plus général où l'aire de la section droite et l'effort normal N varient le long de la ligne moyenne de l'élément, l'équation (4.7) devient alors:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{ES(x)} dx \quad (4.8)$$

4.4. COURBE CONTRAINTE-DÉFORMATION

Tout solide soumis à un effort se déforme. Cette déformation peut être :

- 1) **Elastique** : Le solide reprend sa forme initiale après arrêt de l'action des forces.
- 2) **Plastique** : Le solide reste déformé après arrêt de l'action des forces.

Aucun matériau n'est parfaitement élastique. Généralement la déformation est élastique pour les efforts suffisamment faibles, puis devient plastique à partir d'un certain seuil de contrainte σ_e appelé **limite élastique** (voir courbe contraintes-déformations).

- **Important**

La limite d'élasticité est une contrainte caractéristique du matériau. Elle ne dépend ni des dimensions de la pièce ni des sollicitations qui lui sont appliquées.

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons exclusivement aux matériaux élastiques. Ceci veut dire que nous supposerons toujours que les sollicitations auxquelles sont soumises les structures étudiées sont suffisamment faibles pour que les déformations soient élastiques. La courbe contrainte-déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement d'une expérience de traction effectuée sur une barre de section constante. Lors de cette expérience l'effort normal est augmenté progressivement provoquant l'allongement de la barre. A chaque incrément d'effort, la contrainte normale et la déformation de la barre sont portées sur une courbe. Cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre. La courbe ainsi obtenue est la courbe contrainte-déformation du matériau. Elle a généralement (de manière simplifiée) l'allure illustrée sur la Fig 4.5.

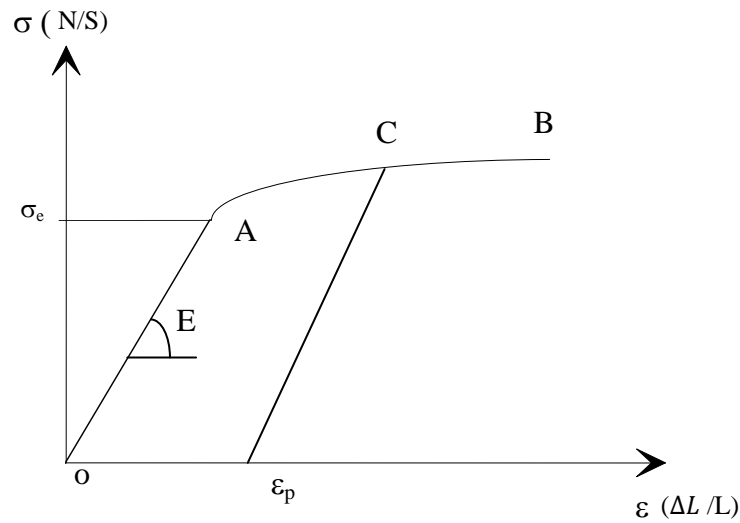


Fig. 4.5

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. Dans ce cas l'élasticité est linéaire (OA) est une droite). La pente E de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young. Il représente le rapport entre contrainte et déformation ε dans la zone élastique. La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la **loi de Hooke** :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.3)$$

La partie (AB) est la partie plastique. La limite élastique est dépassée. Si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale. Le chemin de décharge est, de manière simplifiée parallèle à la droite (OA). Lorsque l'effort appliqué s'annule, il persiste une déformation résiduelle ε_p qui ne disparaît plus.

- **Ordres de grandeur du module de Young (E)**

Acier : $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$,

Béton : $E = 2000 \text{ daN/mm}^2$,

Aluminium : $E = 7000 \text{ daN/mm}^2$

4.5. SYSTÈMES DE BARRAS ISOSTATIQUES

Un système est isostatique quand on peut déterminer les efforts internes par les seules équations d'équilibre.

Exemple :

Déterminer les efforts, les contraintes et les déformations dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la Fig. 4.6, sachant que $d_{1-1} = 50$ mm, $d_{2-2} = 100$ mm, $d_{3-3} = 200$ mm et $E = 2.1 \times 10^5$ N/mm²

Section 1-1 :

$$N + 400 = 0 \Rightarrow N = -400 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-400 \times 10^3}{\pi(25)^2} = -203.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-203.7 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -2.91 \text{ mm}$$

Section 2-2 :

$$N + 4 + 2 \times 500 = 0 \Rightarrow N = -1400 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-1400 \times 10^3}{\pi \times (50)^2} = -178.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-178.3 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -2.55 \text{ mm}$$

Section 3-3 :

$$N + 400 + 2 \times 500 + 2 \times 800 = 0$$

$$N = -3000 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{s} = \frac{-3000 \times 10^3}{\pi(100)^2} = -95.5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-95.5 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -1.36 \text{ mm}$$

$$\Delta L_t = -2.91 - 2.55 - 1.36 = -6.82 \text{ mm}$$

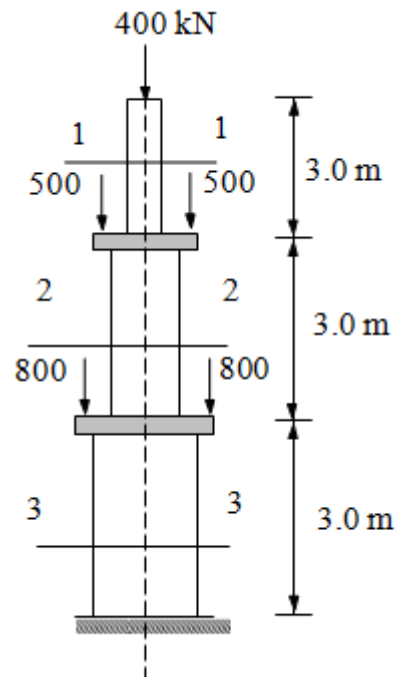


Fig.4.6

4.6. SYSTÈMES DE BARRES HYPERSTATIQUES

On appelle structures hyperstatiques les structures pour lesquelles les efforts qui sollicitent leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations statiques. La résolution de ces systèmes s'effectue en considérant les aspects décrits ci-dessous :

1. Aspect statique : écrire les équations d'équilibre des barres sectionnées.
2. Aspect géométrique: établir le rapport entre les déformations à partir de la compatibilité géométrique.
3. Aspect physique du problème: établir les relations effort-déformation en utilisant la loi de Hooke : $\Delta L = \frac{NL}{ES}$ pour transformer les expressions de déformation en équations ayant des efforts normaux comme inconnus.
4. Résolution du système d'équations.

Exemple :

Soit le système de barres défini sur la Fig. 4.7 ci-après.

Etant données : $L_1, S_1, L_2, S_2, L_3, S_3, P$ et α avec $L_2 = L_3$.

Déterminer les efforts dans les barres.

Solution :**1- Aspect statique**

$$\sum F_X = 0$$

$$N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = N_3 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

$$\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P \quad (2)$$

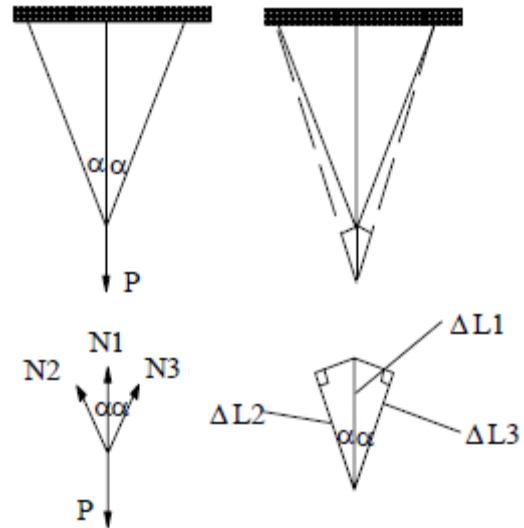


Fig.4.7

2- Aspect géométrique

$$\Delta L_2 = \Delta L_3 = \Delta L_1 \cos \alpha \quad (3)$$

3- Aspect physique :

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{ES} \quad \text{et} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{ES} \quad (4)$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N_2 L_2}{ES} = \frac{N_1 L_1}{ES} \cos \alpha \Rightarrow N_2 L_2 = N_1 L_1 \cos \alpha \quad (5)$$

4- Synthèse et résolution des équations

$$\text{On élimine } N_3 \text{ de (2)} \Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P \quad (6)$$

$$\text{De (5) on tire } N_1 = N_2 \frac{L_2}{L_1 \cos \alpha} \quad (7)$$

et en combinant(6) et (7) on aura alors :

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3 \alpha} \quad \text{et} \quad N_2 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

4.7. CONDITION DE RÉSISTANCE

Pour vérifier la condition de résistance d'une pièce sollicitée en traction ou en compression, on doit s'assurer que:

$$\sigma \leq [\sigma] = \sigma_{adm} \quad (4.9)$$

Où σ_{adm} est la contrainte admissible pour le matériau étudié. Elle est donnée par l'expression:

$$\sigma_{adm} = R_{pg} = \frac{\sigma_e}{s} \quad (4.10)$$

avec

R_{pg} : résistance pratique du matériau

σ_e : limite élastique du matériau

s : coefficient de sécurité du matériau

4.8. APPLICATION

Exemple :

Calculer les contraintes et les allongements subis par chacune des barres (Fig. 4.8) supportant le corps rigide de section constante et de masse de 3000 kg.

Les caractéristiques des barres sont :

-Barre (1) : $E_1 = 70000 \text{ MPa}$; $S_1 = 240 \text{ mm}^2$

-Barre (2) : $E_2 = 210000 \text{ MPa}$; $S_2 = 180 \text{ mm}^2$

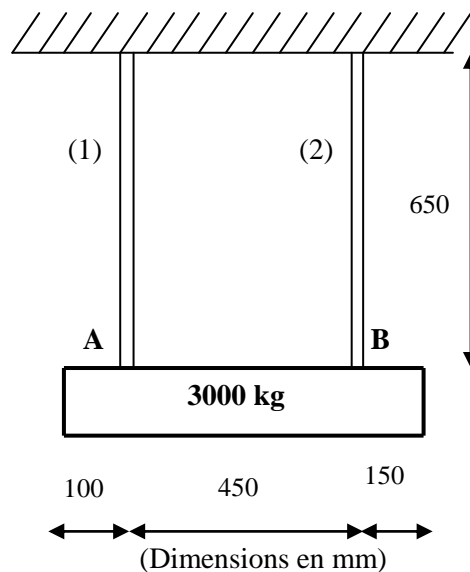


Fig.4.8

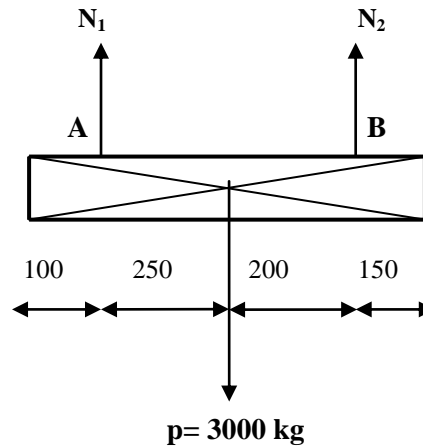
Solution :

Les barres (1) et (2) sont soumises à une traction sous l'effet du poids du bloc.

On isole le bloc des deux barres (1) et (2).

- On remplace les coupures par des efforts internes (et les efforts extérieurs).

- On vérifie l'équilibre (PFS), on détermine les inconnues du problème.



Équations d'équilibre :

$$\sum M_{/A} = 0 \Leftrightarrow -P \cdot 250 + N_2 \cdot 450 = 0 \Rightarrow N_2 = 1666.67 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Leftrightarrow P \cdot 200 - N_1 \cdot 450 = 0 \Rightarrow N_1 = 1333.33 \text{ kg}$$

$$N_1 + N_2 = P \Rightarrow 1333.33 + 1666.67 = 3000 \text{ kg}$$

Contraintes dans les barres :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{13333.3}{240} = 55.55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{16666.7}{180} = 92.59 \text{ MPa}$$

Allongements dans les barres :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 S_1} = \frac{13333.3 \cdot 650}{70000 \cdot 240} = 0.52 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 S_2} = \frac{16666.7 \cdot 650}{210000 \cdot 240} = 0.28 \text{ mm}$$

EXERCICES

4.1. Déterminer l'allongement de longueur totale d'un barreau de section constante S et de longueur L (Fig. E4.1) suspendu verticalement à un plan horizontal et rigide et soumis à son poids propre P . Le barreau est en acier de poids volumique γ et de module de Young E .

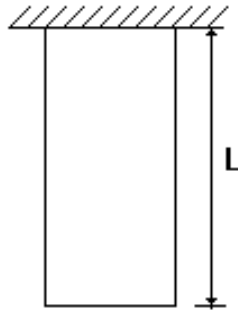


Fig. E4.1

4.2. Un barreau d'acier de section $S = 500 \text{ mm}^2$, sollicité par les forces représentées dans la Fig. E4.2. Calculer l'allongement total du barreau.

Sachant que :

Les forces : $F_1 = 35 \text{ kN}$, $F_2 = 55 \text{ kN}$, $F_3 = 45 \text{ kN}$ et $F_4 = 25 \text{ kN}$.

- Pour l'acier $E = 200 \text{ GN/m}^2$.

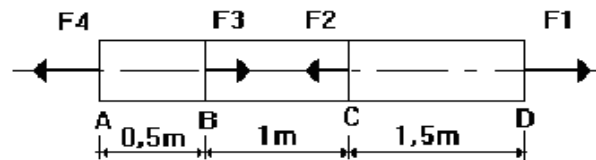


Fig. E4.2

4.3. Deux barreaux prismatiques fixes ensemble rigidement et sont soumis à une charge de 50 kN (Fig. E4.3). Le barreau supérieur est en acier de poids volumique $\gamma_1 = 7,7 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$, de longueur $L_1 = 10 \text{ m}$ et de section $S_1 = 6000 \text{ mm}^2$.

Le barreau inférieur est en bronze, de poids volumique $\gamma_2 = 8,25 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$, de longueur $L_2 = 6 \text{ m}$ et de section $S_2 = 5000 \text{ mm}^2$.

Pour l'acier $E_1 = 200 \text{ GN/m}^2$ et pour le bronze $E_2 = 90 \text{ GN/m}^2$.

On demande de :

- 1- Calculer la réaction d'appuis en A.
- 2- Tracer le diagramme de la contrainte normale le long de AC.
- 3- Calculer la déformation totale du système.

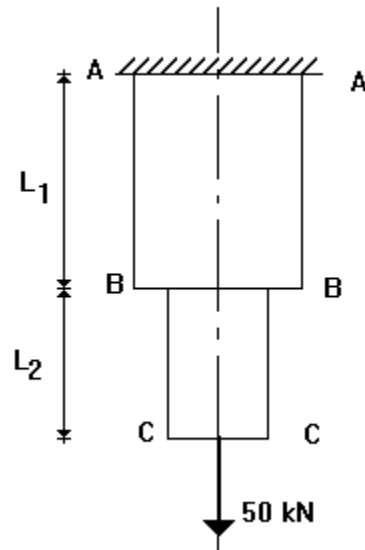


Fig. E4.3

4.4. La poutre AD rigide et indeformable, suspendue a un plan incline par quatre cables (Fig. E4.4) dont les caracteristiques sont les suivantes :

$L_1 = 5,5 \text{ m}$, $S_1 = 200 \text{ mm}^2$ et $E_1 = 230 \text{ GN/m}^2$,

$L_2 = 4 \text{ m}$, $S_2 = 260 \text{ mm}^2$ et $E_2 = 210 \text{ GN/m}^2$,

$L_3 = 2,5 \text{ m}$, $S_3 = 280 \text{ mm}^2$ et $E_3 = 215 \text{ GN/m}^2$,

$L_4 = 1 \text{ m}$, $S_4 = 210 \text{ mm}^2$ et $E_4 = 190 \text{ GN/m}^2$.

Si la charge $P = 20 \text{ kN}$, calculer pour chaque cable:

- 1- L'effort interne de traction.
- 2- La contrainte normale et l'allongement.

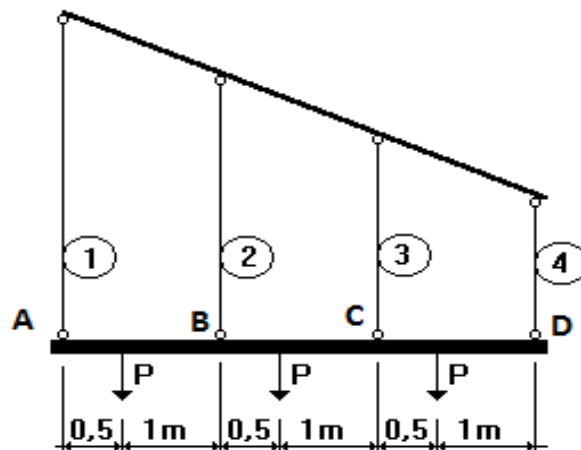


Fig. E4.4

4.5. Un corps de poids est suspendu en C à deux axes rigides fixes A et B au moyen de 2 sandows en caoutchouc AC et CB identiques (Fig. E4.5.). L'ensemble est symétrique par rapport à l'axe vertical, la droite AB est horizontale. La déformation reste toujours élastique.

On donne :

$$AB = 2a = 10 \text{ m}$$

Longueur initiale des sandows, $L=6 \text{ m}$

Charge suspendue, $p = 100 \text{ daN}$

Module de Young du caoutchouc, $E = 7.5 \text{ daN/cm}^2$.

Résistance pratique du caoutchouc, $R_p = 5 \text{ daN/cm}^2$.

Calculer :

1. la section S des sandows.
2. l'angle α lorsque la position d'équilibre est atteinte.
3. l'allongement des sandows.

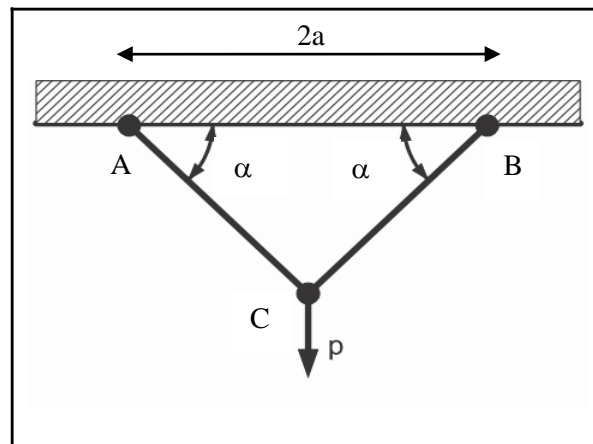


Fig. E4.5

4.6. Une poutre supportée par deux poutres est soumise à une charge p (Fig. E4.6). Quel est le rapport des diamètres des deux poutres pour que la poutre reste horizontale.

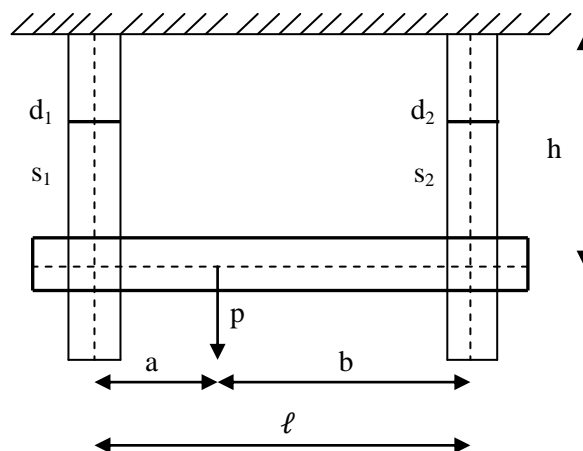


Fig. E4.6

Chapitre 5

CISAILLEMENT SIMPLE

5.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les contraintes tangentielles engendrées par un effort tranchant en présence d'un moment fléchissant. Nous allons maintenant considérer les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant seul.

Ces contraintes tendent à cisailer la section et provoquent ainsi des déformations angulaires. Si en pratique il est difficile de séparer les sollicitations les une des autres, il est encore plus difficile de réaliser des déformations de cisaillement dans sa forme pure, elles sont généralement accompagnées de déformations de flexion. Cependant les exemples considérés comme étant en cisaillement pur sont nombreux : les composants des assemblages métalliques constituent la majorité.

Les contraintes de cisaillement surgissent dans beaucoup d'autres problèmes pratiques. La Fig. 5.1 montre deux plaques liées par un rivet simple, soumise à une force de traction F . Nous imaginons que le rivet est divisé en deux parties au niveau du plan ab ; alors la moitié supérieure du rivet tend à glisser au-dessus de la moitié inférieure, et une contrainte de cisaillement est établie dans le plan ab (Fig. 5.2).

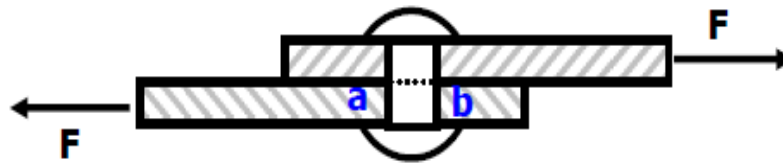


Fig. 5.1

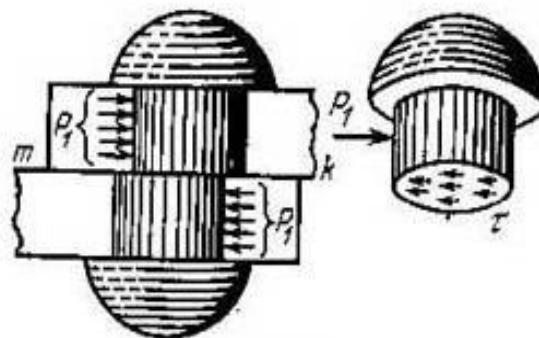


Fig. 5.2

5.2. DÉFINITION

Une pièce est sollicitée au cisaillement lorsqu'elle est soumise à deux forces opposées qui tendent à le séparer en deux tronçons glissant l'un par rapport à l'autre suivant le plan d'une section (exemple : découpage d'une tôle (Fig. 5.3).

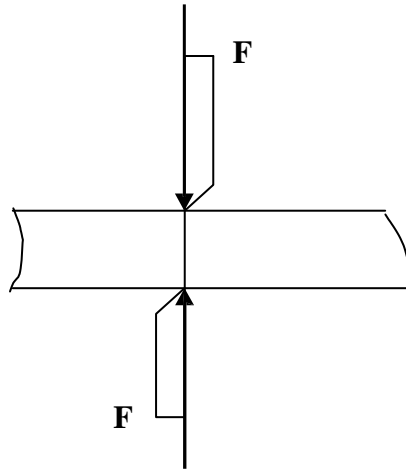


Fig. 5.3

5.3. CONTRAINTE TANGENTIELLE DE CISAILLEMENT

Considérons le cas d'un tronçon de poutre à deux forces comme le montre la Fig. 5.4. Nous avons l'effort tranchant :

$$T = F \quad (5.1)$$

Et la relation entre l'effort tranchant et la contrainte tangentielle agissant sur la face de la section s'écrit :

$$T = \iint_S \tau \, ds \quad (5.2)$$

Pour une distribution uniforme des contraintes sur le plan de la section l'équation s'écrit donc :

$$T = \tau S \quad (5.3)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T}{S} \quad (5.4)$$

$$\text{Ou d'après (5.1) } \tau = \frac{F}{S} \quad (5.5)$$

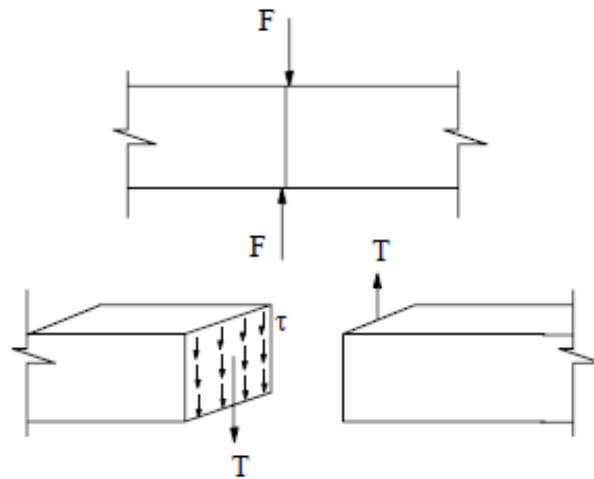


Fig. 5.4

En réalité les contraintes tangentielles ne sont pas uniformément réparties sur le plan de la section car elles s'annulent aux voisinages des faces supérieures et inférieures d'après la loi de parité. Cependant la formule (5.5) est largement utilisée pour le calcul des assemblages boulonnés rivetés ou soudés.

5.4. DÉFORMATION DE CISAILLEMENT

L'essai de cisaillement peut être effectué comme l'indique le montage de la Fig. 5.5, l'effort T s'exerçant lentement.

Rappelons que les sections ab et a_1b_1 sont très voisines et distantes de Δx .

Après déformation, la section a_1b_1 vient en a_2b_2 et la dénivellation a_1a_2 mesure alors le glissement transversal (Fig. 5.6).

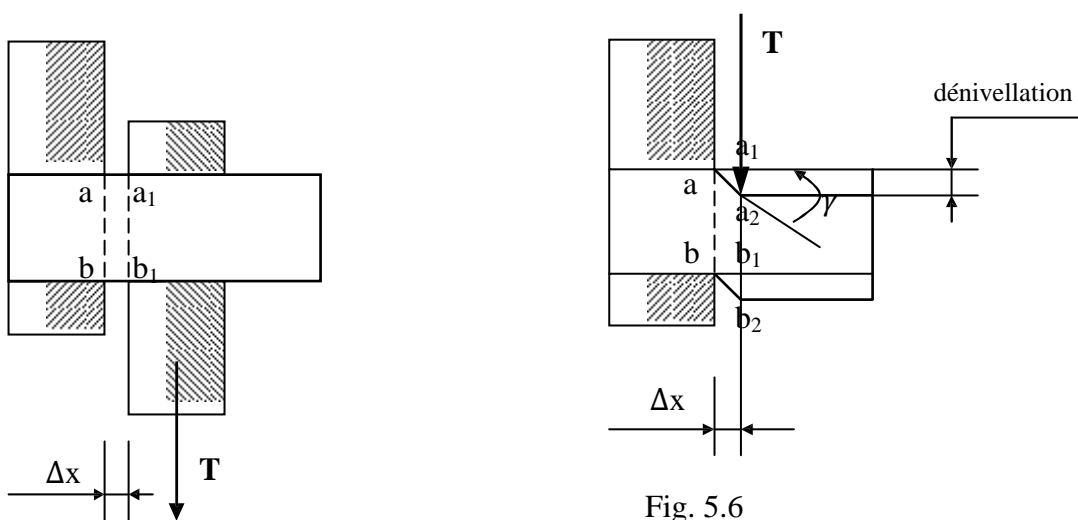


Fig. 5.6

Fig. 5.5

Si on admet que aa_2 reste rectiligne, on définit la déformation par le rapport :

$$\text{tang } \gamma = \frac{a_1 a_2}{\Delta x} \quad (5.6)$$

avec

γ : angle de glissement (distorsion ou déformation de cisaillement)

Par ailleurs, puisque nous restons dans le domaine élastique, nous avons :

$$\frac{T}{a_1 a_2} = C_{te} \quad (\text{par analogie avec l'essai de traction et } \text{tang } \gamma \approx \gamma) \quad (5.7)$$

$$\text{Soit, } \frac{\frac{T}{S}}{\frac{a_1 a_2}{\Delta x}} = G \quad (5.8)$$

$$\text{d'où } \gamma = \frac{T}{G S} \quad (5.9)$$

avec

T en [N]

G en [N/mm²]

S en [mm²]

γ en [rd]

On peut encore écrire $\tau = G \gamma$ (relation analogue à $\sigma = E \varepsilon$).

G est appelé module d'élasticité transversale.

Exemples :

Pour les métaux courants, on a constaté que $G = 0.4 E$, par exemple :

- Aciers : $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$ et $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$
- Fontes : $E = 100\,000 \text{ N/mm}^2$ et $G = 40\,000 \text{ N/mm}^2$

5.5. LOI DE HOOKE

Pour beaucoup de matériaux, la déformation de cisaillement est linéairement proportionnelle à la contrainte de cisaillement dans certaines limites (glissement faible). Cette dépendance linéaire est semblable au cas de la traction et de la compression directe. Dans les limites de la proportionnalité, on a :

$$\tau = G \gamma \quad (5.10)$$

Le coefficient de proportionnalité G est appelé module d'élasticité transversale ou de cisaillement et est semblable au module de Young E , pour la traction et la compression. Pour la plupart des matériaux E est environ 2.5 fois plus grand que G . Pour les métaux $G \approx 0.4 E$. La relation (5.6) s'appelle la **loi de Hooke** pour le cisaillement.

5.6. CONDITION DE RÉSISTANCE AU CISAILEMENT

Le calcul de cisaillement pur consiste à déterminer la contrainte tangentielle τ_{max} dans l'élément le plus sollicité et comparer cette valeur avec la contrainte admissible. La condition de résistance au cisaillement s'écrit sous la forme:

$$\tau = \frac{T}{S} \leq [\tau] = \tau_{adm} \quad (5.11)$$

$$\tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} \quad (5.12)$$

avec

R_{pg} : résistance pratique au cisaillement du matériau

R_{eg} : limite élastique au cisaillement du matériau

s : coefficient de sécurité adopté du matériau

- **Remarque :**

Les essais ont montré que le rapport entre la limite élastique au cisaillement (R_{eg}) et la limite élastique à l'extension (R_e) n'était pas constant pour tous les matériaux. A moins de posséder les résultats d'essais précis pour le matériau utilisé, on peut admettre avec une bonne approximation :

- | pour les aciers doux $R_{eg} = 0.5 R_e$
- pour les aciers mi-durs $R_{eg} = 0.7 R_e$
- pour les aciers durs et fontes $R_{eg} = 0.8 R_e$

5.7. APPLICATIONS

En pratique, un bon nombre d'éléments de structure travaille principalement sous cisaillement. Le cisaillement peut être utilisé dans le dimensionnement de pièces travaillant en cisaillement. Les exemples les plus simples sont les assemblages par boulons ou par rivets, ou encore les assemblages par soudure.

5.7.1. Assemblage par rivets

Les assemblages par rivets servent aux pièces d'épaisseur faible ou moyenne, comme les tôles et les profilés, en charpente et en chaudronnerie. Ils nécessitent un perçage préalable des pièces à assembler, ainsi que l'emploi de riveteuses, machines qui servent à écraser l'extrémité du rivet opposée à la tête, afin de réaliser l'assemblage.

Si le système assemblé se trouve sollicité en traction, l'effort de traction va être transmis au rivet qui va travailler en cisaillement pur. Nous traiterons ci-dessous des exemples d'assemblage par rivets.

Exemple 1 :

Deux bandes d'acier sont assemblées par 2 rivets comme le montre la Fig. 5.7. Vérifier la résistance de l'assemblage.

$$[\sigma] = 100 \text{ N/mm}^2 \text{ (Plaque)}$$

$$[\sigma] = 80 \text{ N/mm}^2 \text{ (Rivets)}$$

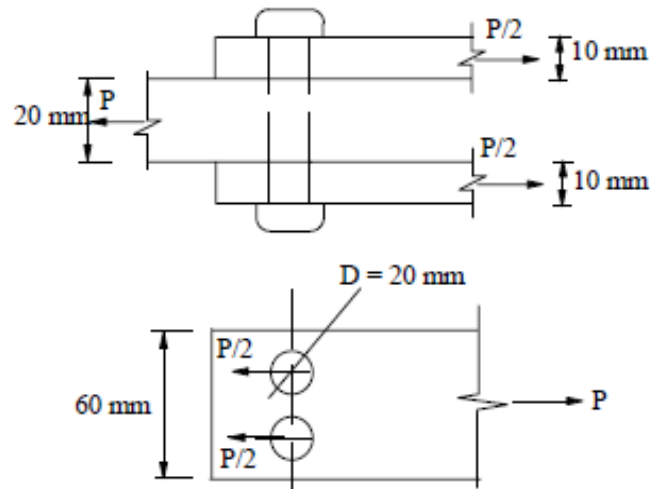


Fig. 5.7

Solution :

1) Les rivets :

Effort tranchant au niveau de chaque section de rive :

$$T = \frac{P/2}{2} = \frac{P}{4}$$

Contraintes tangentielle :

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{4T}{\pi d^2} = \frac{P}{\pi d^2} = \frac{5 \times 10^4}{\pi (20)^2} = 39.8 \text{ N/mm}^2 < 0.6 \times 80 = 48 \text{ N/mm}^2$$

2/ La plaque :

La section nette :

$$60 \times 10 - 2 \times 10 \times 20 = 200 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{N}{S_{\text{nette}}} = \frac{5 \times 10^4 / 2}{200} = 125 \text{ N/mm}^2 > 100 \text{ N/mm}^2$$

Quelle est donc b_{\min} pour que la plaque résiste ?

$$S_{\text{nette}} = 10b - 400$$

$$\frac{p/2}{10b - 400} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow (10b - 400) = 2.5 \times 10^4$$

$$\Rightarrow b_{\min} = \frac{2.5 \times 10^4 + 4 \times 10^4}{10 \times 100} = 65 \text{ mm}$$

Exemple 2:

Il s'agit d'assembler les deux cornières (2) et (3) sur le gousset (1) (Fig.5.8): V est l'effort qui s'exerce sur l'ensemble des cornières ; les rivets en acier doux ont pour diamètre d et pour résistance pratique R_{pg} . Déterminer le nombre de rivets ($n = ?$).

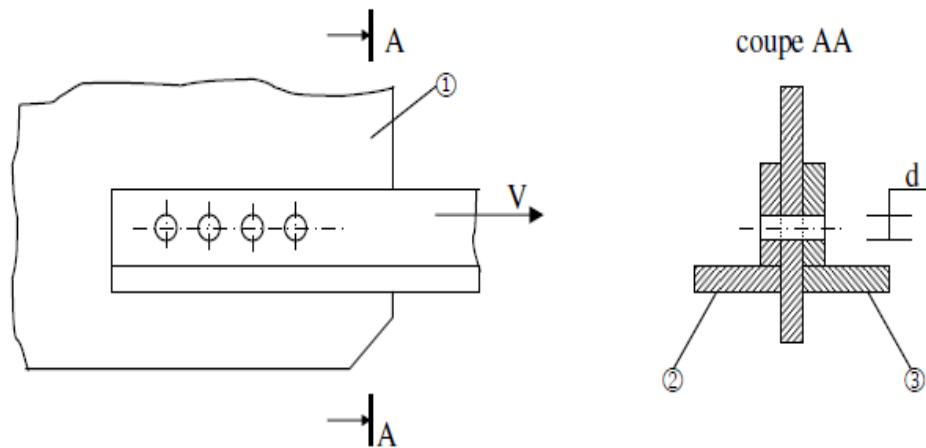


Fig. 5.8

Solution :

Chaque rivet a tendance à se cisailer suivant deux sections.

Condition de résistance au cisaillement : $\frac{V}{S} \leq R_{pg}$

avec

$$S = 2 n S_0$$

et

$$S_0 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\text{Soit } n \geq \frac{V}{2S_0 R_{pg}}$$

A.N:

Pour $V = 100 \text{ kN}$, $d=16\text{mm}$ et $R_{pg} = 70 \text{ N/mm}^2$

$$n \geq \frac{10^5}{2 \left(\frac{\pi 16^2}{4} \right) 70}$$

$$n \geq 3.5$$

On prendra donc 4 rivets $\Rightarrow n = 4$

5.7.2. Assemblage par boulons

Les boulons sont composés d'une vis et d'un écrou (Fig. 5.9). Ils sont utilisés lorsque l'on désire démonter ultérieurement les pièces ou que les autres types d'assemblages mécaniques ne correspondent pas aux performances souhaitées.

Dans le cas de l'assemblage par boulons ordinaires, on empêche le déplacement relatif des éléments de l'assemblage en amenant ces éléments au contact du corps de la vis. C'est alors la résistance au cisaillement de la vis qui assure la tenue de l'assemblage (Fig. 5.10).

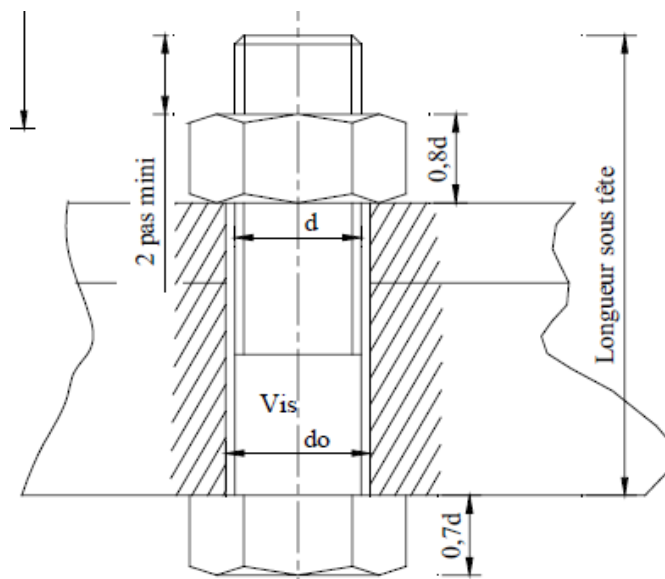


Fig. 5.9

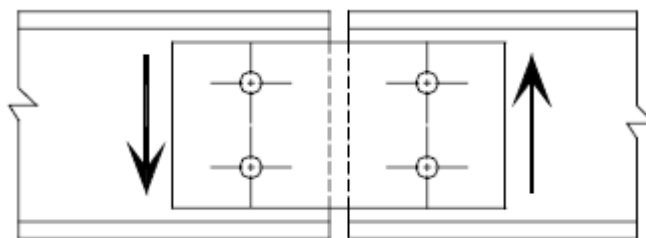


Fig. 5.10

Le calcul au cisaillement se fait de la même manière que pour les rivets. De plus, lors de l'assemblage, le boulon doit vérifier:

1. Le serrage du boulon de sorte que le diamètre de la vis soit égal à celui du trou qui lui est destiné. Les trous sont, en général, percés à un diamètre supérieur de 1 à 2 mm environ du diamètre nominal de la vis (Fig. 5.9).
2. La résistance au glissement. En effet, lors du serrage, la vis du boulon sera soumise à un effort de traction N (Fig. 5.11). Cet effort provoquera un cisaillement dans la surface:

$$S_c = \pi d h \quad (5.13)$$

La condition de résistance au cisaillement sera donc:

$$\tau = \frac{N}{S_c} \leq \tau_{adm} \quad (5.14)$$

La condition de résistance à la traction et par conséquent:

$$\sigma = \frac{N}{S_t} \leq \sigma_{adm} ; \quad S_t = \frac{\pi d^2}{4} \quad (5.15)$$

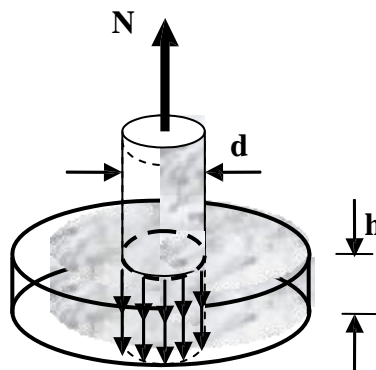


Fig. 5.11

EXERCICES

5.1. Calculer le nombre de rivets de 10 mm de diamètre nécessaire pour assembler la pièce de la Fig. E5.1, sachant que $[\sigma] = 100 \text{ N/mm}^2$.

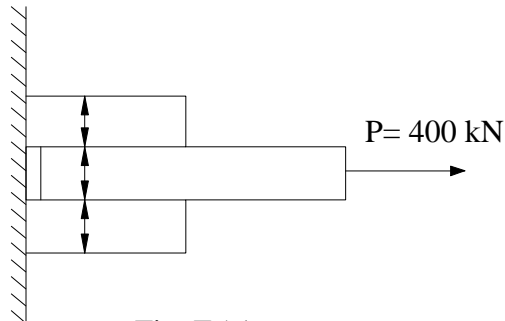


Fig. E5.1

5.2. Vérifier la résistance de l'assemblage de la Fig. E5.2 sachant que $[\sigma] = 100 \text{ N/mm}^2$ pour la plaque et $[\sigma] = 80 \text{ N/mm}^2$ pour les rivets.

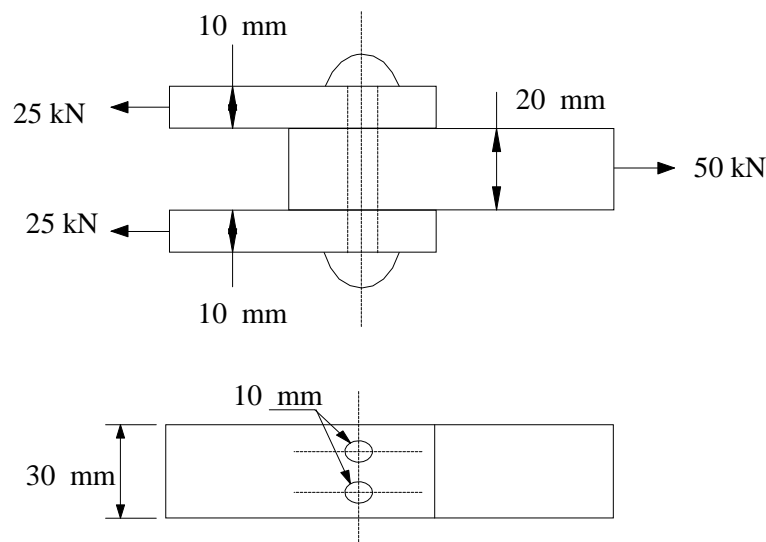


Fig. E5.2

5.3. Pour l'assemblage proposé, à trois boulons ajustés en acier, $d=12 \text{ mm}$, la contrainte admissible au cisaillement des boulons est égale à 30 daN.mm^{-2} . Déterminer l'effort admissible F .

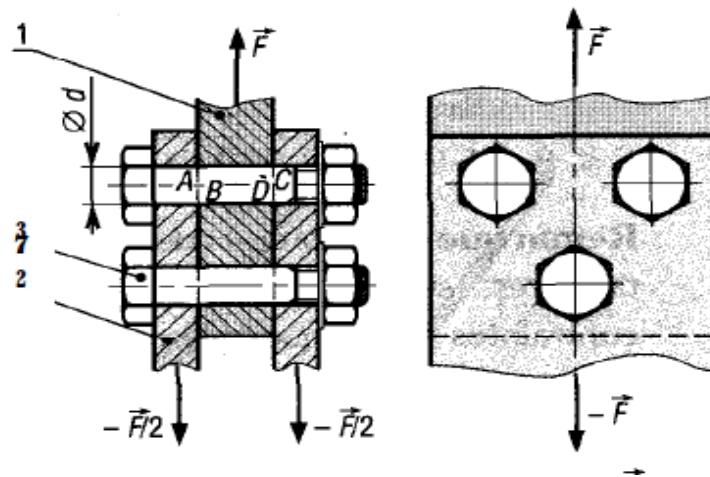


Fig. E5.3

5.4. On veut assembler, bout à bout, deux fers plats de largeur 200 mm et d'épaisseur e_1 par une rivure à double couvre-joint (Fig. E5.4). L'effort de traction sur les fers plats est de 20000 daN. La limite élastique des fers plats et des couvre-joints est la même et égale à $R_e = 24$ daN/mm². La limite élastique au cisaillement de l'acier des rivets est $R_g = 18$ daN/mm². On adoptera un coefficient de sécurité égal à 1.7.

Calculer :

- 1- l'épaisseur e_1 des fers plats.
- 2- l'épaisseur e_2 des couvre-joints.
- 3- le diamètre d des rivets et leur nombre n .

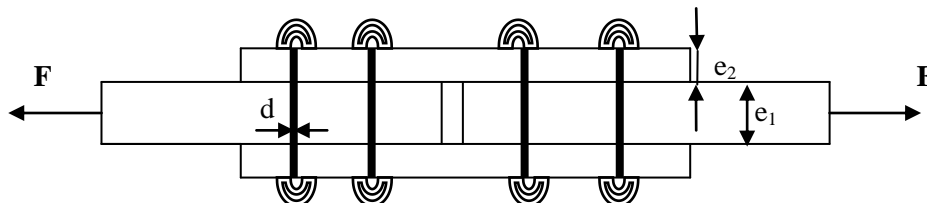


Fig. E5.4

5.5. Les cylindres 1 et 2 sont collés comme l'indique la Fig. E5.5. La résistance à la rupture par traction de la colle est de 240 daN/cm², sa résistance au cisaillement est de 180 daN/cm². La colle est répartie uniformément sur le cylindre de diamètre 30 mm et de longueur ℓ inconnue. L'effort F supporté par le montage est de 2600 daN.

- Calculer la longueur ℓ minimale à donner au joint collé du montage.

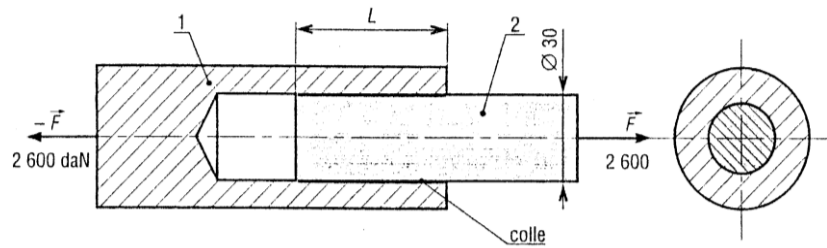


Fig. E5.5

5.6. Une articulation cylindrique entre deux barres plates 1 et 2 est réalisée comme l'indique la Fig. E5.6. La liaison est assurée par un axe cylindrique 3 de diamètre d inconnu. L'effort maximal supporté par la liaison est de 5000 daN. La résistance pratique (ou admissible) au cisaillement du matériau de l'axe est de 5 daN/mm².

- 1- Déterminer le diamètre d de l'axe 3.
- 2- Indiquer la (ou les) section(s) cisailée(s).

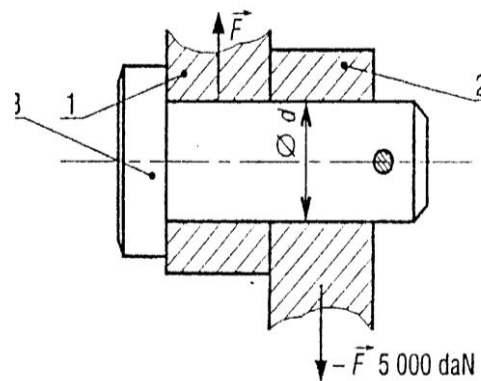


Fig. E5.6

5.7. Soit une cisaille représentée schématiquement par la Fig. E5.7. L'effort normal $F = 90$ N est appliqué en C au levier coudé ABC articulé autour de l'axe A.

- Déterminer la capacité de la cisaille (possibilité de couper un rond ou fil en acier mi-doux de diamètre d).
- On donne la résistance à la rupture par cisaillement du rond : $\tau_r = 340$ Mpa

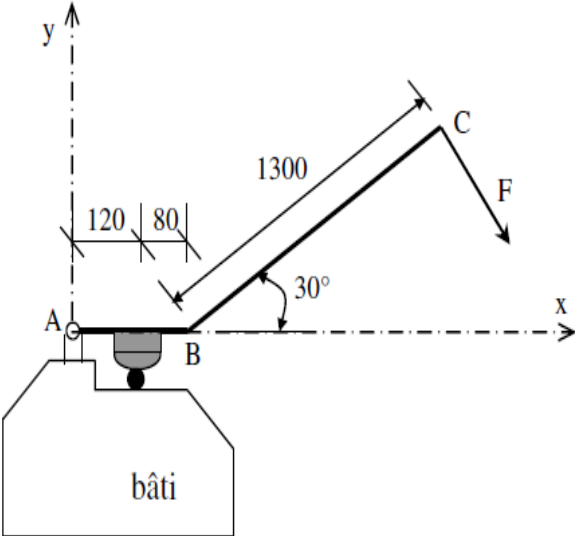


Fig. E5.7

Chapitre 6

TORSION

6.1. INTRODUCTION

Si de tous les efforts internes seul le moment M_x est présent, il provoque une torsion. Ce type de sollicitation est très répandu dans les structures de mécanique et surtout au niveau des arbres entraînés par les moteurs. L'analyse des éléments des structures de génie civil soumis à la torsion est moins fréquente.

6.2. DÉFINITION

Une poutre est sollicitée à la torsion simple (Fig.6.1) si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne.

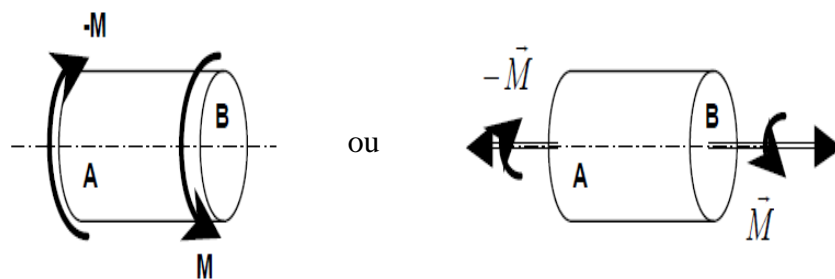


Fig. 6.1

- **Convention de signe**

Pour le moment de torsion, on a adopté la règle des signes qui suit. Si un observateur regardant la section droite du côté de la normale extérieure voit le moment de torsion M_t (M_{torsion}) dirigé dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on considère que le moment est positif. Il est négatif s'il est dirigé dans le sens contraire.

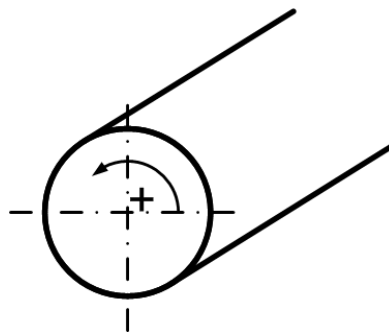


Fig. 6.2

6.3. HYPOTHÈSES SUR LE SOLIDE

- Le solide est une poutre homogène et isotrope.
- Son axe est rectiligne, disposé verticalement.
- Le poids propre du solide est négligé.
- Sa section droite est circulaire, de diamètre constant.
- Sa surface est parfaitement polie.

6.4. HYPOTHÈSES SUR LES FORCES

Les forces extérieures sont équivalentes à deux couples situés dans les sections droites d'extrémités. Les axes de ces couples étant situés sur l'axe de la poutre, les forces sont réparties sur les sections terminales, uniformément sur un cercle et perpendiculairement au rayon.

6.5. CONTRAINTES ET DÉFORMATION

Lorsqu'on sollicite en torsion une poutre circulaire, on constate qu'une section quelconque tourne dans son plan d'un angle proportionnel à son abscisse. Si l'angle de rotation est petit, alors la longueur de la barre et le rayon de la section restent inchangés.

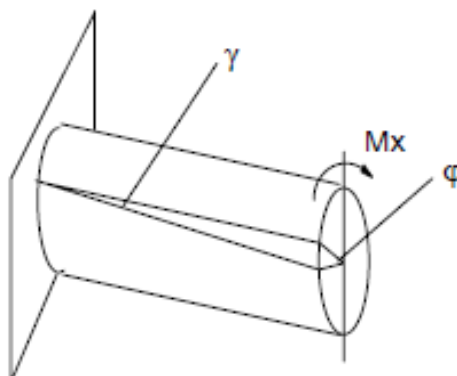


Fig. 6.3

De plus, une ligne longitudinale sur la surface de la barre ab tourne d'un petit angle vers la position ab' . On constate qu'un élément rectangulaire infinitésimal sur la surface de la barre de longueur dx se déforme en parallélogramme. L'angle de la déformation γ est appelé: distorsion exprimé par :

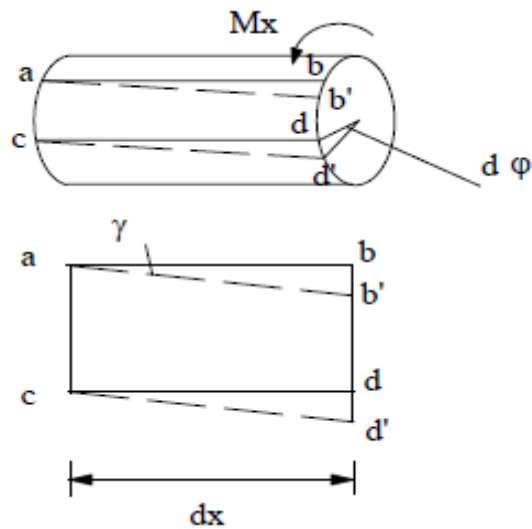


Fig. 6.4

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (6.1)$$

$$bb' = r d\varphi \text{ et } ab = dx$$

En tenant compte du fait que l'angle γ est petit on assimilera $\operatorname{tg} \gamma$ à γ et on obtient alors :

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.2)$$

γ est appelé déformation (ou angle) de cisaillement

$\frac{d\varphi}{dx}$ est l'angle de torsion unitaire [rad /mm ou ° /mm] qui est constante et on la note par θ de sorte :

$$\gamma = r \theta \quad (6.3)$$

D'après la loi de Hooke au cisaillement :

$$\tau = G \gamma \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \tau = G r \frac{d\varphi}{dx} = G r \theta \quad (6.5)$$

La relation entre le moment de torsion et l'angle φ peut être obtenue sachant que les contraintes tangentielles τ réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion M_x :

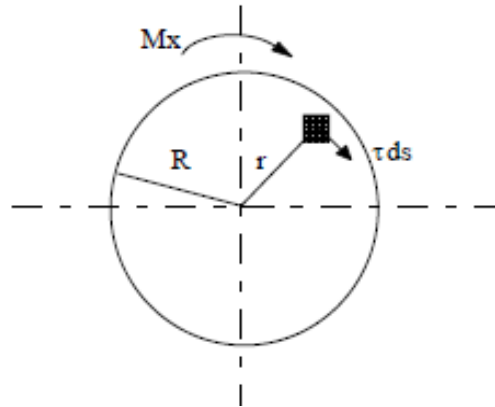


Fig. 6.5

$$M_x = \iint_s r \tau \, ds \quad (6.6)$$

En substituant τ par son expression (6.5)

$$M_x = \iint_s r^2 G \frac{d\varphi}{dx} \, ds \quad (6.7)$$

Finalement, la relation entre le moment de torsion et l'angle

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} \iint_s r^2 \, ds = G \theta \iint_s r^2 \, ds \quad (6.8)$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire :

$$I_p = \iint_s r^2 \, ds \quad (6.9)$$

D'où l'expression de la déformation angulaire relative :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_p} = \theta \quad (6.10)$$

La quantité $G I_p$ est la rigidité à la torsion.

En remplaçant $\frac{d\varphi}{dx}$ par sa valeur dans l'expression (6.5), on obtient :

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p} \quad (6.11)$$

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures (Fig. 6.6) :

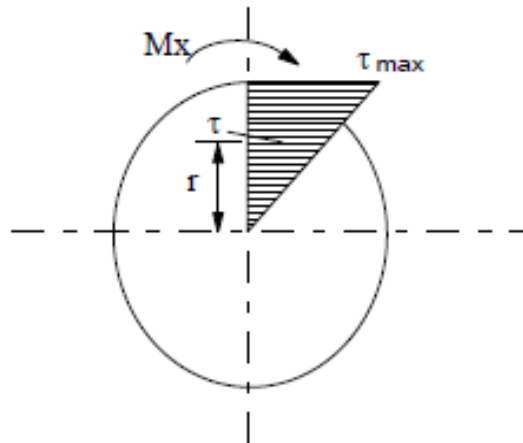


Fig. 6.6

$$\text{Pour } r = R \quad \tau_{\max} = \frac{M_x R}{I_p} = \frac{M_x}{W_p} \quad (6.12)$$

La quantité $W_p = \frac{I_p}{R}$ est appelée **module de résistance polaire** de la section.

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenu de l'expression (6.10) :

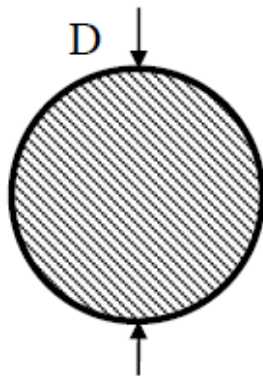
$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x}{G I_p} dx \quad (6.13)$$

Si la forme de la section et le moment sont constants alors :

$$\varphi = \frac{M_x L}{G I_p} \quad (\text{le glissement d'une extrémité par rapport à l'autre})$$

- **Exemples de calcul des modules de résistance polaires**

1. **Section circulaire pleine :**

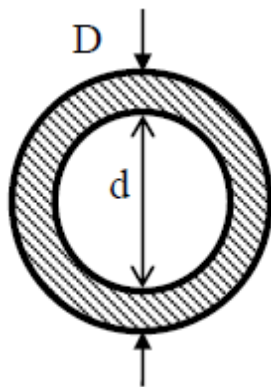


$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$r = \frac{D}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

2. Section circulaire tubulaire



$$I_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

$$r = \frac{D}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}$$

6.6. TORSION DES BARRES À SECTIONS TRANSVERSALES NON CIRCULAIRES

L'hypothèse des sections planes ne peut être admise lors de la torsion des sections non-circulaires et donc les méthodes de la résistance des matériaux ne peuvent pas être appliquées. Dans ce paragraphe, on utilisera les formules obtenues par les méthodes de la théorie d'élasticité pour le cas des sections rectangulaires.

La distribution des contraintes d'une section rectangulaire est représentée dans la Fig. ci-dessous (Fig. 6.7) et la contrainte maximale est donnée par la formule:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t} \quad (6.14)$$

avec

$$W_t = \alpha h b^2 \quad (6.15)$$

$$\tau = \beta \tau_{\max} \quad (6.16)$$

et l'angle de rotation

$$\varphi = \frac{M_x L}{G I_t} \quad (6.17)$$

avec $I_t = \eta h b^3$

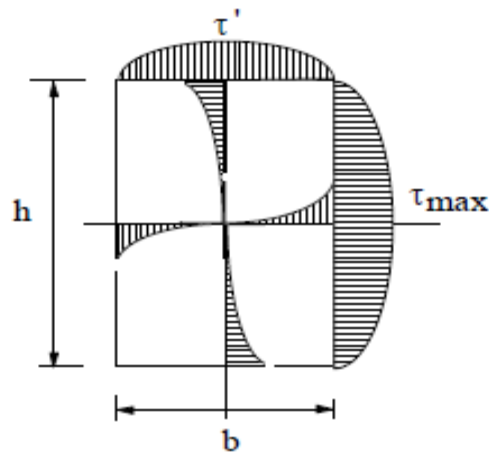


Fig. 6.7

Les coefficients α , β , et η sont données en fonction du rapport h/b dans le tableau suivant :

h/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.256	0.267
β	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753
η	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263

6.7. CONDITION DE RÉSISTANCE

La contrainte de torsion τ_{\max} doit rester inférieure à la valeur de la contrainte pratique au glissement R_{pg} , en adoptant un coefficient de sécurité s tel que $R_{pg} = R_{eg}/s$. D'où la condition de résistance d'une pièce en torsion :

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau] = \tau_{\text{adm}} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} \quad (6.18)$$

avec :

- R_{pg} : résistance pratique au glissement
- R_{eg} : résistance élastique au glissement
- s : coefficient de sécurité (sans unité)

6.8. CONDITION DE RIGIDITÉ

En effet, pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion φ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite φ_{lim} . D'où la condition de rigidité d'une pièce en torsion :

$$\varphi_{\max} = \frac{M_x L}{G I_p} \leq [\varphi] = \varphi_{\text{lim}} \quad (6.19)$$

On admet généralement $[\varphi] = 0.3^\circ/1$ m de longueur

6.9. APPLICATION

Exemple :

Vérifier la résistance et la rigidité de la barre ci-dessous (Fig. 6.8) sachant que le diamètre $d = 100 \text{ mm}$, $G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, $[\tau] = 40 \text{ N/mm}^2$, et $[\phi]/L = 0.3^\circ/\text{m}$.

Solution :

On trace le diagramme du moment de torsion pour déterminer la valeur maximale.

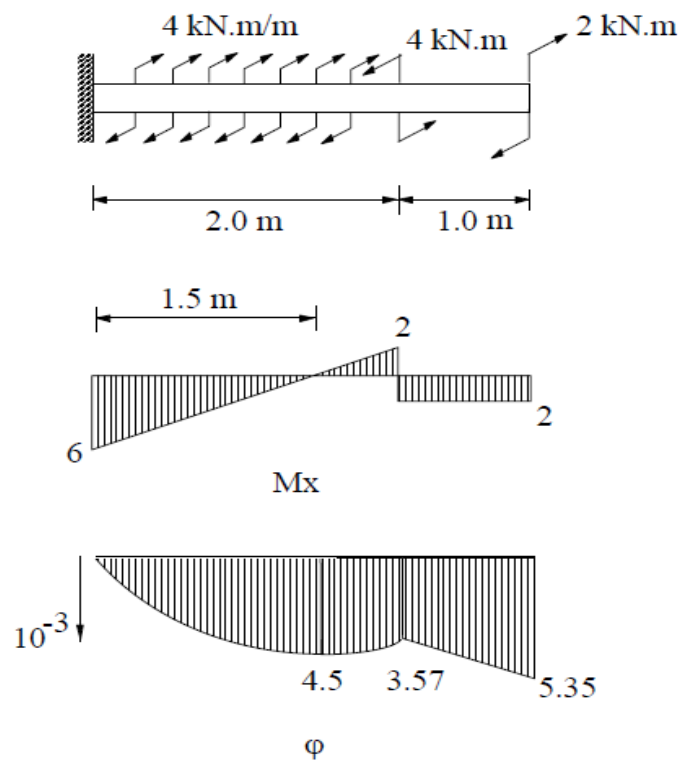


Fig. 6.8

A l'encastrement:

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow M + 2 - 4 + 4 \times 2 = 0$$

$$M = -6 \text{ kN.m}$$

Tronçon I : $0 \leq x \leq 2$

$$M = 4x - 6$$

$$M(0) = -6 \text{ kN.m} \text{ et } M(2) = 2 \text{ kN.m}$$

Tronçon II : $2 \leq x \leq 3$

$$M = 2 \text{ kN.m}$$

$$\text{D'où } M_{\max} = 6 \text{ kN.m}$$

Vérification à la résistance :

$$W_t = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^4}{32 \times d/2} = \frac{\pi}{16} d^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{6 \times 16 \times 10^6}{\pi \times 10^6} = 30.57 \text{ N/mm}^2 < [\tau]$$

Vérification à la rigidité :

$$\varphi = \int_0^x \frac{M_x}{GI_t} dx$$

avec

$$G = 8.10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$I_p = 0.1(100)^4 = 0.1 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

Comme le moment n'est pas constant le long de la barre, on détermine dans chaque tronçon la loi de variation de l'angle de rotation et on déduit la valeur maximale.

Tronçon I :

$$M = 4x - 6$$

$$\varphi = \frac{1}{GI_p} \int_0^x (4x - 6) dx = \frac{1}{GI_p} (2x^2 - 6x)$$

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(2) = -4 / GI_p$$

$$\varphi' = 0 \Rightarrow x = 1.5 \text{ m} \Rightarrow \varphi_{\max} = \frac{-4.5 \times 10^3 \times 10^6}{8 \times 0.1 \times 10^8 \times 10^4} = 5.63 \times 10^{-3} < [\varphi]$$

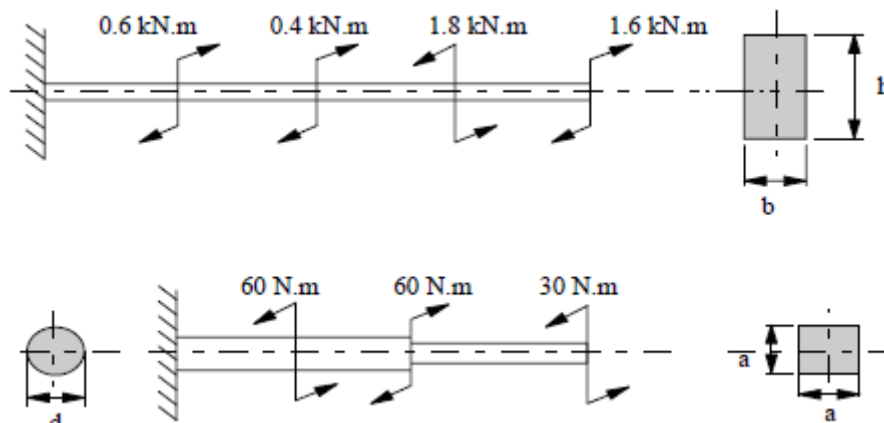


Fig. 6.9

Tronçon II :

$$M = -2kN.m$$

$$\varphi'' = \frac{1}{GI_p} \int_0^x -2dx = \frac{-2x}{GI_p}$$

$$\varphi''(x=0) = \varphi'(2) = 5.63 \times 10^{-3}$$

$$\varphi''(x=1) = -5.63 \times 10^{-3} - \frac{2 \times 10^6 \times 10^3}{8 \times 10^4 \times 0.1 \times 10^8} = -7.5 \times 10^{-3}$$

EXERCICES

6.1. Vérifier la résistance et la rigidité du tube de la Fig. E6.1, sachant que $[\tau] = 70 \text{ N/mm}^2$, $[\phi] = 0,3^\circ$ et $G = 0,8 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$.

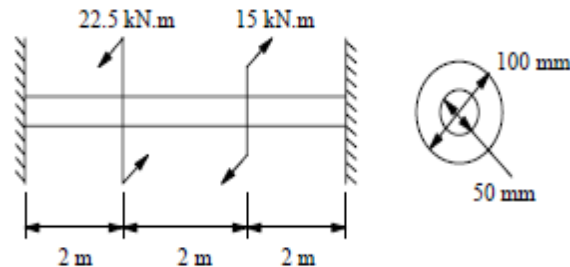


Fig. E6.1

6.2. Un arbre cylindrique de diamètre d transmet un couple de moment $M=100 \text{ N.m}$. Le type de construction exige une grande rigidité. On limite la déformation unitaire à $0,25 \text{ degré/m}$. Le matériau de cet arbre est un acier pour lequel $\tau_e=75 \text{ Mpa}$ et $G=8104 \text{ MPa}$.

- 1- Déterminer le diamètre minimal de l'arbre.
- 2- Déterminer la contrainte tangentielle maximale pour $d=41 \text{ mm}$.
- 3- Quelle est la valeur du coefficient de sécurité dont on dispose?

6.3. Soit deux arbres de transmission pleins construits à partir du même acier, $G = 8000 \text{ daN/m}^2$. Le premier est de diamètre D ; le second de diamètre $d= 0,8 D$. La résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de 10 daN.mm^{-2} .

- Déterminer les dimensions optimales des deux arbres.

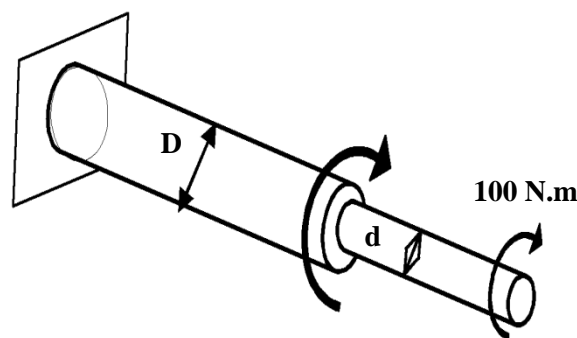


Fig. E6.3

6.4. Un arbre de 50 mm de diamètre est solidaire à un tube de 100 mm de diamètre extérieur. L'assemblage comme le montre la Fig. E6.4 est assuré par 10 boulons sur une circonférence de 250 mm de diamètre.

- Déterminer le diamètre intérieur du tube et celui des boulons pour pouvoir transmettre le moment maximale de l'arbre, sachant que ce dernier a une contrainte tangentielle admissible de 50 N/mm² et celle des boulons est de 25 N/mm².

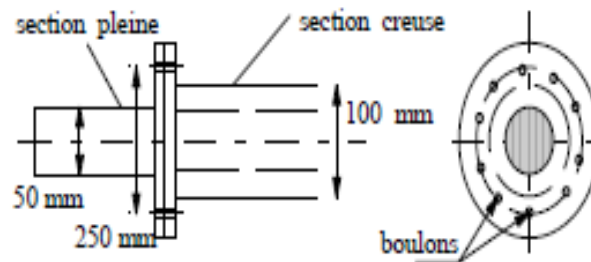


Fig. E6.4

6.5. Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D , de diamètre intérieur d , de longueur 1200 mm, doit transmettre une puissance $P = 314$ KW à la vitesse de rotation $n=1500$ tr/min et l'angle de torsion total entre les extrémités doit être 20° . Cet arbre en acier à une résistance pratique $R_{pg}=400$ N/mm² ; $G=8.10^4$ N/mm².

- Calculer les valeurs des diamètres D , d et faite la vérification.

6.6. Une barre de 20 mm de diamètre et 1 m de long est encastree à ses extrémités. A une distance de 250 mm de l'une des extrémités, on applique un moment de torsion qui provoque une contrainte tangentielle maximale dans le matériau de 35 N/mm².

- Calculer l'intensité du moment de torsion et l'angle de rotation au point d'application du moment. On donne $G = 76$ kN/mm².

6.7. Un cylindre est soumis à un couple de torsion $C = 2.5$ kNm. Le module de cisaillement du matériau vaut 78 GPa.

Calculer :

1- la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.

2- la distorsion des génératrices en rd et en °.

3- l'angle de rotation des sections extrêmes en °.

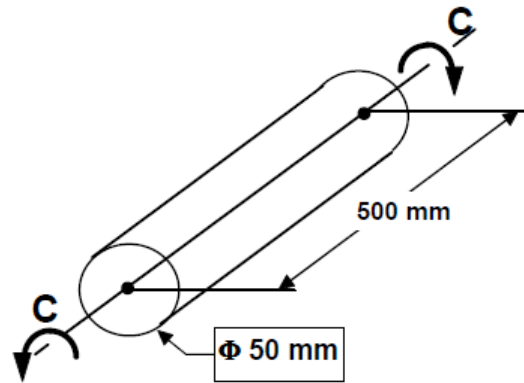


Fig. E6.7

6.8. Calculer le couple C qui provoque une rotation des sections extrêmes du tube de 2° sachant que $G = 27$ GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum.

- Calculer, pour d'un cylindre de même poids que le tube et qui supporte le même couple, l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte tangentielle maximum.

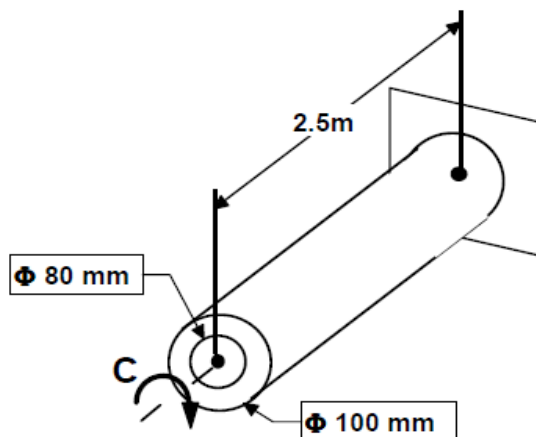


Fig. E6.8

6.9. Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D , de diamètre intérieur d , de longueur 1200 mm, est sollicité par un couple de 2000 N.m. Sous l'action de ce couple, l'angle de torsion total de l'une des extrémités par rapport à l'autre doit être de $20^\circ \pm 0.5^\circ$. La contrainte maximum admissible en torsion est de 400 MPa. Le module de cisaillement du matériau vaut 80 GPa.

- 1- Calculer la distorsion angulaire maximum en radians en appliquant la loi de Hooke.
- 2- En déduire le diamètre extérieur D en mm (arrondir le résultat au mm).
- 3- Quel est alors le diamètre intérieur d en mm (arrondir le résultat au mm).
- 4- Avec les valeurs trouvées en 2) et 3) calculer la contrainte maximum de torsion (en MPa) et l'angle de torsion des sections extrêmes (en $^\circ$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aleinik L., Durler J. Résistance des matériaux cours de base, Edition Bibliotheque de l'ingenieur, 1973.
- [2] Alexandru D.C. Quelques chapitres de la résistance des matériaux. Ed. OPU, Alger.
- [3] Ashby R. J., Chilver A. H. Problems in engineering structures, Edition E.A, 1958.
- [4] Boucard P.A. Cours de dimensionnement des structures - résistance des matériaux. IUT Cachan, Paris, 2011.
- [5] Bourahla N. Résistance des matériaux de base, Groupement Economique de Contrôle Technique de la Construction, GECOTEC, 2005.
- [6] Case J., Chilver L., Ross C.T.F. Strength of materials and structures. Ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.
- [7] Coates R. C., Coutie M. G., Kong F. K. Structural analysis, 2^{ème} édition, VNR Ltd 1980.
- [8] Decelle A. F., Legendre D. Mécanique appliquée au génie civil, Editions Eyrolles, 1983.
- [9] Del Pedro M., Gmür T., Botsis J. Introduction à la mécanique des solides et structures. PPUR presses polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, 2004.
- [10] Dias da Silva V. Mechanics and strength of materials. Ed. Springer, New York, 2006.
- [11] Doberscu C. A. Quelques chapitres de résistance des matériaux, tome 1, OPU 04-91.
- [12] Giet A., Geminard L. Résistance des matériaux, 5^{ème} édition, Dunod, Paris, 1968.
- [13] Jalil W. A., Ader P. Calcul pratique des structures, 4^{ème} édition, Editions Eyrolles, 1985.
- [14] Miroloubov I. et al. Résistance des matériaux, manuel de résolution de problèmes, 4^{ème} édition, Edition MIR Moscou, 1977.
- [15] Montagner R. Cours de résistance des matériaux, 12^{ème} edition, Editions Eyrolles, 1988.
- [16] Mott R.L. Applied strength of materials. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- [17] Mott R.L. Solution manual to accompany applied strength of materials. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [18] Muvdi B. B., McNabb J. W. Engineering mechanics of materials, Macmillan Publishing Company, 1984.
- [19] Nofel M., Warda M., Latouf M. Résistance des materiaux, Tome 1, 2, OPU 04-91.
- [20] Osman Zakaria M. Analyse des structures, Tome 1, 2, OPU, Alger, 1989.
- [21] Ouzandja D. Notes de cours de résistance des matériaux, Faculté de Technologie, Université Med Boudiaf de M'sila, Algérie, 2014.
- [22] Patnaik S.N., Hopkins D.A. Strength of materials: a unified theory. Ed. Elsevier, USA, 2004.
- [23] Pissarenko G., Yakovlev A., at Matveev v. Aide mémoire de résistance des matériaux, Editions de Moscou, 1979.
- [24] Rahmouni Z. Notes de cours de résistance des matériaux, Faculté de Technologie, Université Med Boudiaf de M'sila, Algérie, 2016.
- [25] Richard Liew J.Y., Shanmugam N.W., Yu C.H. Structural analysis. In structural engineering handbook. Ed. Chen Wai-Fah Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.

- [26] Timoshenko S. Résistance des matériaux, Tome 1: Théorie élémentaire et problèmes. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968.
- [27] Timoshenko S. Résistance des matériaux, Tome 2: Théorie développée et problèmes, 3^{ème} Ed., Dunod, Paris, 1968.
- [28] Zedira H., Lahbari N. Résistance des matériaux, Tome 1, OPU Collection le cours de génie civil, 06-1990.