Chapitre 2 : Degré de libertés – Architecture

2.1 Positionnement d'un solide dans l'espace,

2.1.1 Coordonnées d'un point dans l'espace

2.1.1.1 Repère et référentiel

On montre qu'il est possible décrire de manière unique la position d'un point dans l'espace à partir de sa projection dans un repère constitué d'un point origine et d'une base de trois vecteurs orthonormés (orthogonaux et de norme unitaire).
Lorsque les trois vecteurs sont orientés dans le sens direct, on dit que l'on a un repère orthonormé direct. La figure 2.1 présente deux repères orthonormés directs et la méthode de la main droite pour tracer un repère direct.

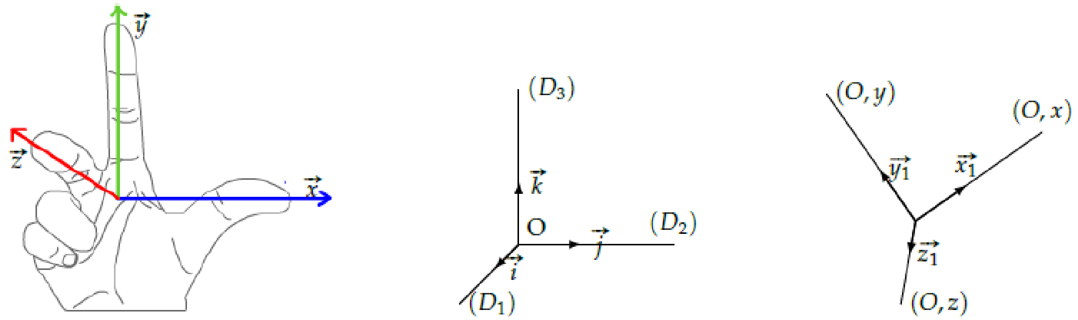
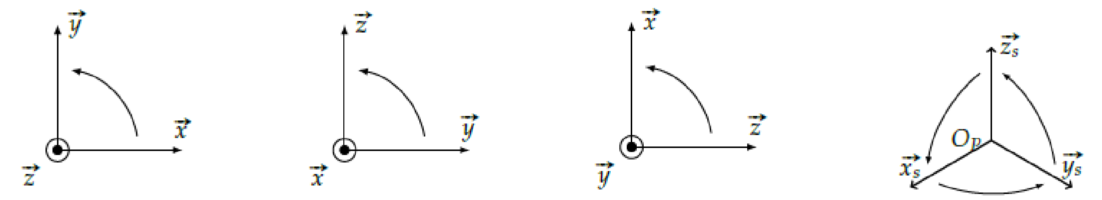


Figure 2.1. – Repères orthonormés

Remarque : L'usage en Sciences Industrielles est de noter la base de travail avec le nom des axes soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2.1.1.2. Sens trigonométrique

Il est important pour l'étude et la description des mouvements de faire attention au sens direct.
Le sens direct dans le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ se confond avec le sens trigonométrique (figure 2.2a). La figure 2.2 précise l'orientation directe dans les autres plans.



(a) Sens direct dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$
(b) Sens direct dans le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$
(c) Sens direct dans le plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$
(d) trièdre dans le sens direct

Figure 2.2. – Sens direct

2.1.1.3. Coordonnées cartésiennes

La manière la plus naturelle pour décrire la position d'un point est d'utiliser les coordonnées cartésiennes (figure 2.3), pour cela, on définit un repère orthonormée direct dit repère cartésien constitué de 3 vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux et d'un point pour origine.
Il est nécessaire de préciser 3 dimensions pour décrire de manière unique la position d'un point.
Sur l'exemple de la figure 2.3 le vecteur $\overrightarrow{OH}$ s'écrit : $\overrightarrow{OH} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z}$

On note (X, Y, Z) les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{OH}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
X, Y et Z sont les trois projections orthogonales sur les axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ de $\overrightarrow{OH}$.

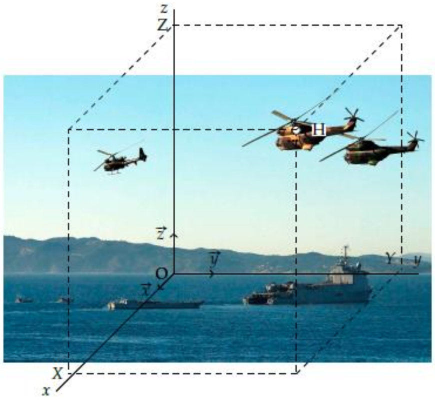


Figure 2.3. – Coordonnées cartésiennes

2.1.1.4. Coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindrique (figure 2.4) est une extension du système de coordonnées polaires utilisé dans le plan, en ajoutant à l'angle polaire orienté et au rayon polaire une troisième dimension perpendiculaire au plan.
Sur la figure 2.4, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est défini par : $\overrightarrow{OH} = R.\vec{n} + Z.\vec{z}$
Le vecteur $\vec{n}$ est précisé par l'angle θ tel que $\theta = (\vec{x}, \vec{n})$ et la figure de calcul (figure 2.5).

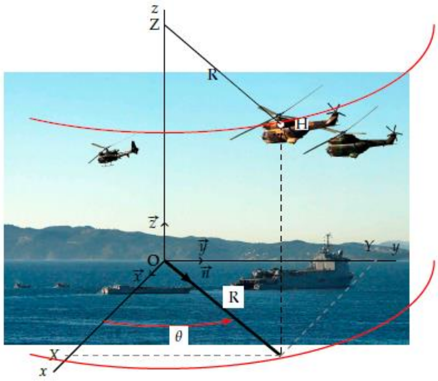


Figure 2.4. – Coordonnées cylindriques

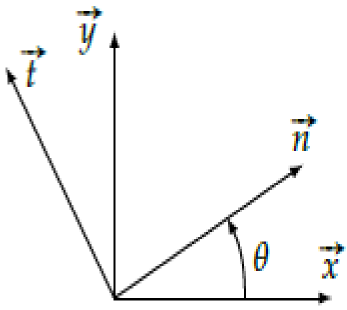


Figure 2.5. – Figure de calcul

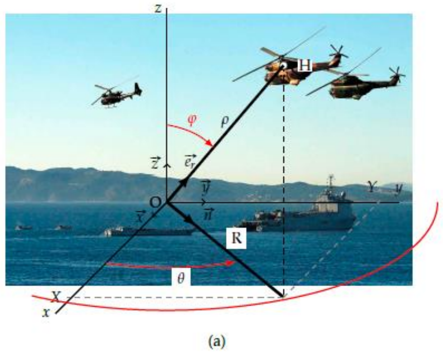
Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est décrit de manière unique par les trois dimensions : R, θ et Z .

Remarque : En physique, vous utiliserez plutôt la notation $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ pour décrire la base cylindrique.

2.1.1.5. Coordonnées sphériques

Un point en coordonnées sphériques est défini par une distance et deux angles. Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ s'écrit : $\overrightarrow{OH} = \rho.\overrightarrow{e_r}$ avec ρ la distance entre l'origine du repère et le point H et $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire porté par la droite (OH).
Le vecteur $\vec{n}$ est porté par la projection de la droite (OH) dans le plan (O, x, y).
Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est décrit de manière unique par les trois dimensions ρ, φ et θ.

Le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est défini par les deux figures de calculs de la figure 2.7.



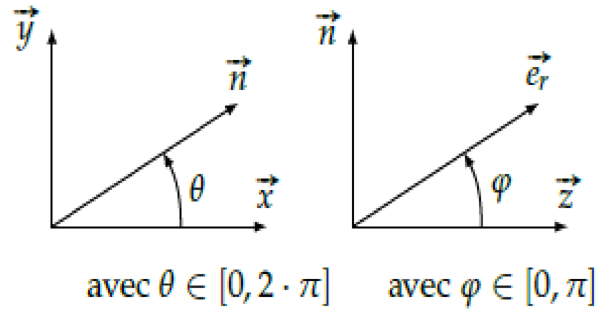


Figure 2.6. – Coordonnées sphériques

Figure 2.7. – figures de calculs

2.1.1.6. Relations

Coordonnées

Cartésiennes : $\overrightarrow{OH} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z}$

Cylindriques : $\overrightarrow{OH} = R.\vec{n} + Z.\vec{z}$

Sphériques : $\overrightarrow{OH} = \rho.\overrightarrow{e_r}$

Relations

Cartésiennes ↔ Cylindriques :

$$\begin{cases} X = R.\cos\theta \\ Y = R.\sin\theta \\ Z = Z \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta = \arctan\frac{Y}{X} \\ Z = Z \end{cases}$$

Cartésiennes ↔ Sphériques :

$$\begin{cases} X = \rho.\sin\varphi.\cos\theta \\ Y = \rho.\sin\varphi.\sin\theta \\ Z = \rho.\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \theta = \arctan\frac{Y}{X} \\ \varphi = \arctan\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{Z} \end{cases}$$

Cylindriques ↔ Sphériques :

$$\begin{cases} R = \rho.\sin\varphi \\ Z = \rho.\cos\varphi \\ \theta = \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{R^2 + Z^2} \\ \varphi = \arctan\frac{R}{Z} \end{cases}$$

2.1.2. Position et orientation d'un solide

Si pour décrire la position d'un point, trois dimensions sont nécessaires et suffisantes, ce n'est plus suffisant pour décrire la position d'un solide et son orientation :

— En ne précisant qu'un point, le solide peut pivoter librement autour de ce point.

— En précisant deux points, le solide a une direction imposée, mais il peut tourner librement autour de l'axe formé par les deux points.

— En précisant, trois points non colinéaires, la position du solide est complètement définie.

Soit trois points *A*, *B* et *C* non colinéaires d'un solide, on peut écrire les relations suivantes pour préciser la position du solide :

$$\overrightarrow{O_0A} = X_A.\overrightarrow{x_0} + Y_A.\overrightarrow{y_0} + Z_A.\overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{O_0B} = X_B.\overrightarrow{x_0} + Y_B.\overrightarrow{y_0} + Z_B.\overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{O_0C} = X_C.\overrightarrow{x_0} + Y_C.\overrightarrow{y_0} + Z_C.\overrightarrow{z_0}$$

Soit 9 inconnues dimensionnelles, à ces trois relations vectorielles se rajoutent la distance (connue) entre chaque point :

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2 + (Z_C - Z_A)^2}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2 + (Z_C - Z_B)^2}$$

On montre donc, à partir de ces 6 équations, qu'il est nécessaire de préciser 6 dimensions pour positionner complètement le solide (système de 6 équations avec 9 inconnues de rang 6).
Le positionnement d'un solide avec trois points n'étant pas très pratique, on préfère lui associer un repère et positionner ce repère dans l'espace avec 3 dimensions et trois angles (figure 2.8).
Le repère associé au solide s'appuie en général sur des particularités physiques de celui-ci (symétrie, axe de révolution, origine au centre de gravité,…).

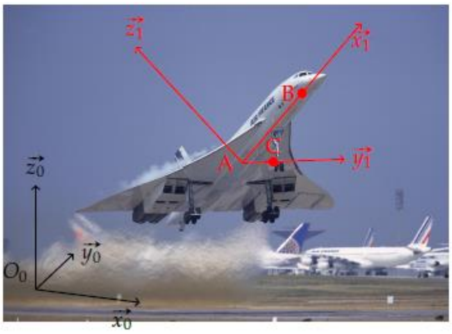


Figure 2.8. – Position d'un solide dans l'espace et repère associé

La figure 2.9 montre l'orientation d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 angles. Le repère associé à l'avion est lié à celui-ci en positionnant l'origine de ce repère par rapport au repère lié au sol et en l'orientant avec 3 angles, on définit de manière unique la position et l'orientation de l'avion dans l'espace.

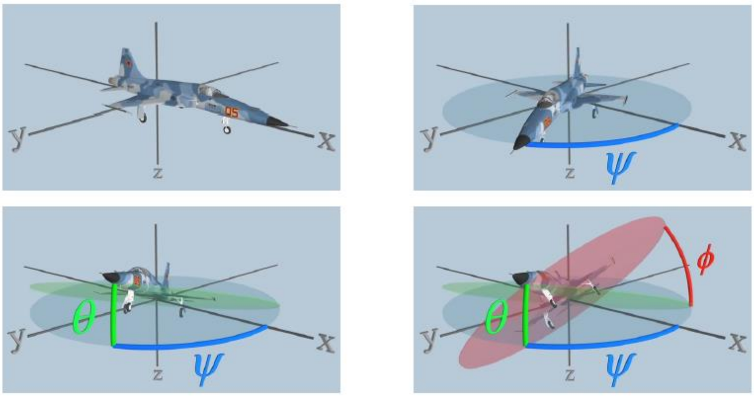


Figure 2.9. – Orientation d'un solide dans l'espace

2.1.3. Solides et repères associés

On le voit dans l'exemple ci-dessus, le positionnement d'un solide dans l'espace nécessite de préciser les angles qui positionnent les solides les uns par rapport aux autres.

2.1.3.1. Solides

Dans le cadre de la mécanique classique, nous supposerons que les solides sont indéformables.

C'est à dire que : $\forall\, A, B \in S \Rightarrow \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = d$

avec S un solide, A et B deux points du solide S et d une constante.

2.1.3.2. Repères associés

À chaque solide, on convient d'associer un repère représentant le solide.

Exemple : Repères Robot

On retrouve sur la figure 2.10 un robot. Pour chaque solide on a associé un repère :

— L'origine de chaque repère est placé sur un point caractéristique du solide (l'axe de rotation entre le socle et 'épaule, l'axe de rotation entre l'épaule et le bras,…).

— Les axes du repère sont orientés en fonctions des caractéristiques du solide.

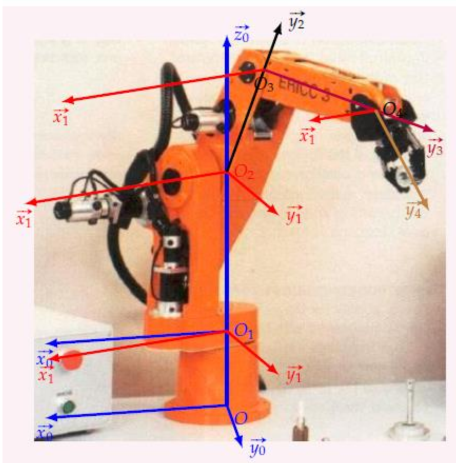
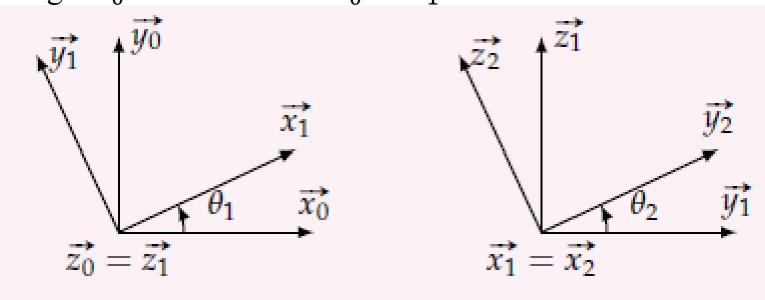


Figure 2.10. – Repères associés à un robot 5 axes

Le passage d'un repère à un autre est représenté graphiquement par des figures nommées figure plane de changement de base ou figure de calcul. Sur cette figure, on représente la rotation plane qui permet de passer d'une base à une autre, ainsi sur la figure 2.11a on précise le passage de la base liée au socle à celle liée à l'épaule par une rotation d'angle θ_0 autour de l'axe $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$.



(a) passage du repère du socle au repère de l'épaule

(b) passage du repère de l'épaule au repère du bras

Figure 2.11. – figures planes de changement de base du robot

Remarque : *les figures planes sont très utiles pour déterminer les projections d'un vecteur d'une base dans une autre mais pour éviter les erreurs de signe, il est important de toujours représenter des angles compris entre 0 et $\pi/2$ et de toujours utiliser des bases orthonormées directes.*

2.2.- Liaisons :

Un robot se compose en premier lieu de plusieurs solides qui sont mis en relation par des liaisons et on peut en donner une représentation simplifiée :

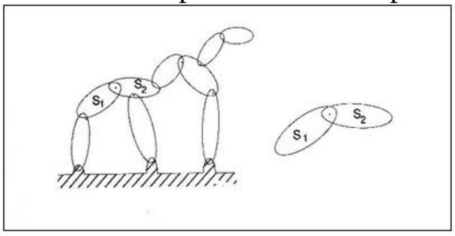
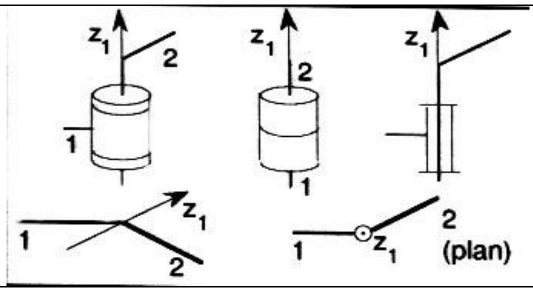
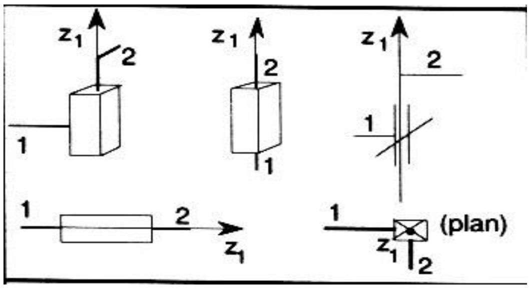
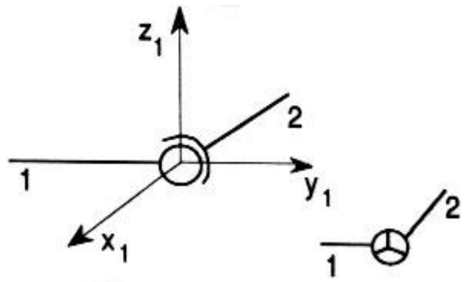
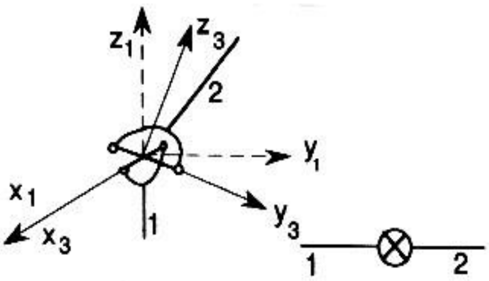
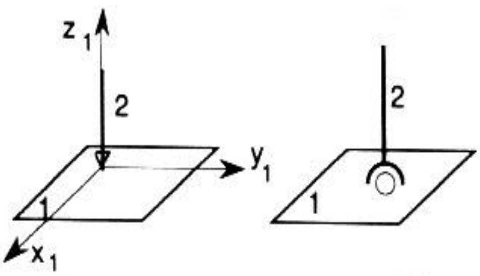


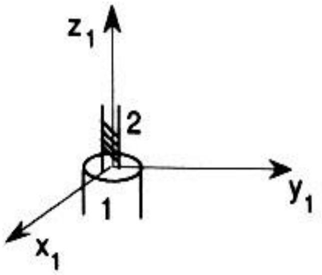
Figure 2.12.- liaisons d'un robot

Sur cette Figure 2.12, on remarque que S2 est en relation avec S1 qui est lui-même en relation avec un autre solide etc.. Chaque solide peut effectuer plusieurs types de déplacement. Il peut s'agir d'une translation, d'une rotation ou d'une combinaison des deux. L'ensemble des mouvements que peut effectuer un robot est appelé degré de liberté. Ainsi, un robot qui ne peut se déplacer que dans une seule direction aura un seul degré de liberté. En revanche, un robot capable de tourner autour des trois axes d'une base de R3 aura 3 degrés de liberté.

Le tableau 2.1, ci-dessous présente quelques liaisons possibles et leurs représentations

Tableau 2.1.- liaisons possibles et leurs représentations

Liaison	Schémas	Mouvement de 2/1	Degré de liberté
Pivot (ou Rotoïde, ou de Rotation)		Rotation autour de l'axe z1 de vitesse angulaire wz1	1
Prismatique (ou Glissière, ou de Translation)		Translation suivant l'axe z1 de vitesse Vz1	1
Sphérique (ou Rotule)		3 mouvements de rotation indépendants autour des axes X1,Y1,Z1 de vitesse Wx1, Wy1, Wz1	3
Cardan (ou Joint de Hooke)		2 mouvements de rotation indépendants autour des axes X3 et Y3 du croisillon, de vitesse angulaire Wx3, Wy3	2
Appui ponctuel sans frottement		3 mouvements de rotation autour de X1, Y1, Z1 et 2 mouvements de translation de vitesse Vx1, Vy1	5

Hélicoïdale (ou vis-écrou)		Un mouvement de rotation indépendant Wz1 et un mouvement de translation Vz1 dépendant par Vz1 = Pas * Wz1	2

Les liaisons entre les solides sont considérées soit comme passives lorsque celles-ci ne sont pas motorisées soit comme actives lorsque celles-ci sont motorisées. Le schéma de la figure 2.13 représente un robot à 2 degrés de libertés.

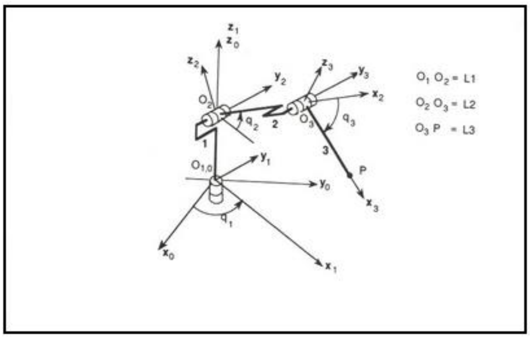


Figure 2.13.- liaisons et degré de liberté

2.3 Mécanismes :

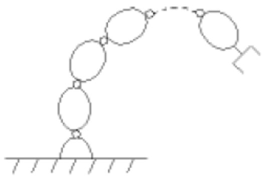
On appelle *mécanisme* un ensemble de solides reliés 2 à 2 par des liaisons. On distingue 2 types de *mécanismes* :

- Les *mécanismes en chaîne simple ouverte* (ou *en série*). Lorsque l'on parcourt le mécanisme, on ne repasse jamais 2 fois sur la même liaison, ou sur le même solide. Ce type de système est le plus répandu.
- Les *mécanismes en chaîne complexe*, *i.e.*, tout ce qui n'est pas *en série* (au moins un solide avec plus de 2 liaisons). De tels systèmes se subdivisent en 2 groupes : les *chaînes structurées en arbre*, et les *chaînes fermées* (dont l'avantage est d'être *a priori* plus rigide, plus précis, capable de manipuler de lourdes charges). A titre d'exemple, le *pantographe (*Un ***pantographe*** est un instrument formé de 4 tiges articulées, servant à reproduire mécaniquement un dessin, le cas échéant à une échelle différente) est un *mécanisme en chaîne fermée*.

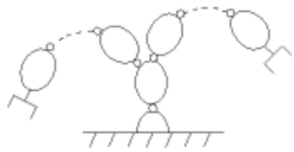
Pour représenter un mécanisme, on dispose de 2 méthodes :

- Le schéma cinématique8 : On utilise la représentation normalisée des liaisons pour représenter le mécanisme, soit en perspective, soit en projection.

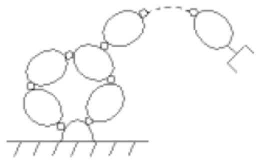
- Le graphe, non normalisé. A titre d'exemples, considérons quelques mécanismes :



chaîne simple



chaîne structurée en arbre

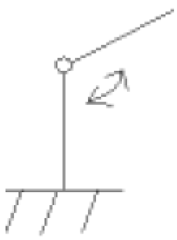


chaîne fermée

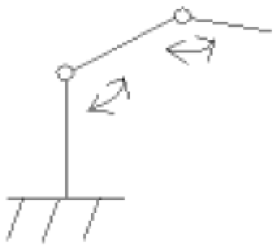
2.3.1 Définition (degré de liberté, *d.d.l.*) : Le nombre de *d.d.l.* d'un mécanisme est le nombre de paramètres *indépendants* qui permettent de définir la position du *mécanisme* à un instant donné du mouvement.

***Exemples* :**

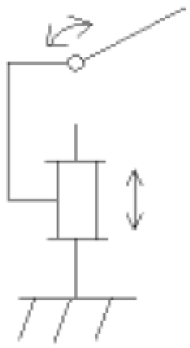
_ Chaînes simples ouvertes



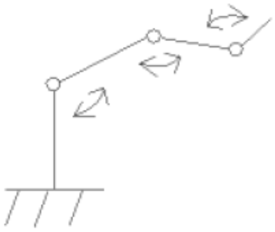
1 d.d.l.



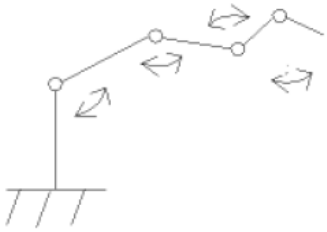
2 d.d.l.



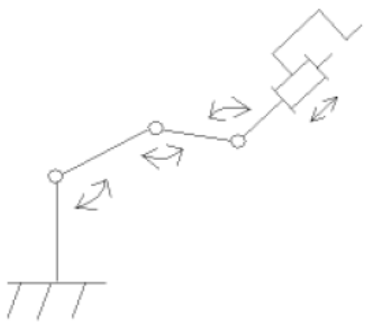
3 d.d.l.



3 d.d.l.

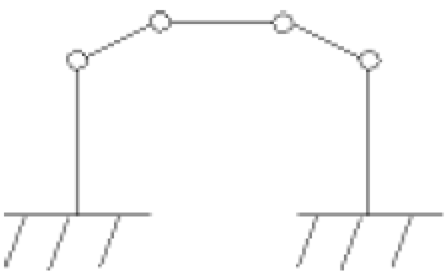


4 d.d.l.

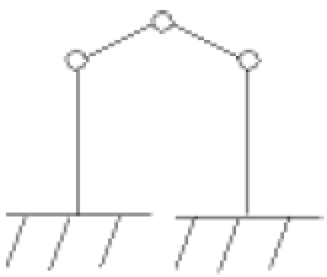


4 d.d.l.

_ Chaînes complexes



1 d.d.l.



0 d.d.l.

2.3.2 Définition (redondant) **:** Un robot est *redondant* lorsque le nombre de *d.d.l.* du mécanisme est inférieur au nombre d'articulations indépendantes (motorisées). Cette propriété permet de préserver les capacités de déplacement de l'organe terminal en présence d'obstacles, le (ou les) *d.d.l.* supplémentaire(s) autorisant leur contournement.

2.4 Morphologie des robots manipulateurs

Un robot manipulateur est constitué par l'**assemblage de corps** (segments) rigides en première approximation, et articulés entre eux. Les **articulations** peuvent être motorisées (actives) ou non (articulations passives).

2.4.1 Graphe du mécanisme

Pour décrire la topologie du mécanisme constituant le robot manipulateur, on lui associe un graphe dont les sommets sont les corps constitutifs et les arcs représentent les assemblages entre ces corps. Deux **corps extrêmes** ont des rôles particuliers :

- la *base*, qui est fixée au sol ou sur un véhicule ;
- l'*organe terminal* qui porte l'outil (ou effecteur).

En partant de la base pour aller vers l'effecteur, on pourra distinguer :

- les structures *série*, ou *sérielles*, pour lesquelles le graphe est arborescent, la base étant la racine et les feuilles étant les organes terminaux (dans le cas général où il y en aurait plusieurs) (figure 1 par exemple) ;
- les structures *parallèles* pour lesquelles toutes les chaînes partent de la base pour aller vers l'organe terminal [4] (figure 2 par exemple) ;
- les structures *mixtes*, présentant des boucles cinématiques, par exemple des parallélogrammes ou des motorisations par vérins linéaires (figure 3 par exemple).