تمهيد:

تستخدم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، عند دراسة متغير عشوائي منفصل، أي غير القابل للتجزئة، مثل عدد الأطفال الذكور ضمن مجموعة تم اختيارها، أو عدد النساء ضمن لجنة معينة... إلخ، ومن أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة التي سنتعرض إليها من خلال هذا المحور، توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، التوزيع الهندسي، توزيع بواسون، توزيع فوق الهندسي، والتوزيع المنتظم.

أولا: تذكير بأهم خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل وتمثيله البياني:

إن مجموع قيم مجال تعريف متغير عشوائي منفصل والاحتمالات التي توافق كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X تسمى توزيعا احتماليا، بشرط أن يكون مجموع الاحتمالات الموافقة لكل قيم من مجال تعريف X يساوي 1، وإلا فليس بتوزيع احتمالي، ويعرض جدول التوزيع الاحتمالي على شكل جدول كالتالي:

X	x_1	x_2	....	x_k	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	....	P_K	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$\boxed{P(X = x_i) \geq 0}$ و $\boxed{\sum P(X = x_i) = 1}$

كما يتم ذلك بواسطة الأعمدة لأن هذا المتغير من النوع المنفصل.

2- دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل وتمثيلها البياني:

هي دالة عددية نرمز لها بـ: $F(x)$، وهي معرفة كالتالي: $\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)}$

فمثلا: $F(x_5) = P(X \leq x_5) = \sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = P_1 + P_2 + \cdots + P_5$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ P_1 + P_2 \ldots + P_{k-1} & x_{K-1} \leq x < x_k \\ 1 & x \geq x_k \end{cases}$$

مما سبق نستنتج ما يلي:

- $F(x)$ دالة عددية متزايدة.
- أدنى قيمة لـ $F(x)$ هي 0، وتترجم رياضيا إلى: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- أقصى قيمة لـ $F(x)$ هي 1، وتترجم رياضيا إلى: $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- في حالة المتغير العشوائي المنفصل تسمى $F(x)$ الدالة التجميعية الصاعدة.
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

كما يتم ذلك بواسطة منحنى سلمي متصاعد.

3- المميزات العددية للمتغير العشوائي المنفصل:

أ- التوقع الرياضي:

في حالة المتغير العشوائي المنفصل، يعطى التوقع الرياضي بالصيغة التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

من أهم الخصائص الرياضية للتوقع الرياضي:

- لتكن العلاقة التالية بين متغيرين عشوائيين X ، Y بحيث: $Y = aX + b$، لنحسب $E(Y)$ بدلالة X:

$$E(Y) = E(aX \mp b) = E(aX) \mp E(b) = aE(X) \mp b$$

- لتكن العلاقة التالية بين ثلاث متغيرات عشوائية X، Y ، Z، بحيث: $Z = XY$، إذا كان X و Y مستقلان فإن:

$$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y)$$

ب- التباين والانحراف المعياري:

يعرف التباين $V(X)$ على أنه الأمل الرياضي لمربع الفرق بين المتغير العشوائي X وأمله الرياضي $E(X)$،

أي:

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

وفي حالة المتغير العشوائي المنفصل، يعطى التباين بالصيغة التالية:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} P_i \left(x_i - E(X)\right)^2$$

كما يعطى الانحراف المعياري بالصيغة التالية:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} P_i \left(x_i - E(X)\right)^2}$$

توجد صيغة مبسطة للتباين والانحراف المعياري، هي:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\delta(X) = \sqrt{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

من أهم الخصائص الرياضية للتباين:

- لتكن العلاقة التالية بين متغيرين عشوائيين X، Y بحيث: $Y = aX + b$، لنحسب $V(Y)$ بدلالة X:

$$V(Y) = V(aX \mp b) = V(aX) \mp V(b) = a^2V(X) \mp 0 = a^2V(X)$$

- إذا كان: X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين و $Z = aX + bY$ فإن: $V(Z) = a^2V(X) + b^2V(Y)$
- إذا كان: X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين و $Z = X + Y$ فإن: $V(Z) = V(X) + V(Y)$
- إذا كان: X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين و $Z = X - Y$ فإن: $V(Z) = V(X) + V(Y)$

مثال1: نرمي قطعة نقد متوازنة ثلاث مرات، وليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأوجه F التي تظهر.

1- حدد قيم المتغير العشوائي الممكنة، ثم أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي، ومثله بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية ومثلها بيانيا.

3- أحسب كلا من: $E(X)$، $V(X)$، $\delta(Z)$، $E(4X-2)$، $V(4X-2)$.

الحل:

1- تحديد قيم المتغير العشوائي الممكنة، و إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي، وتمثيله بيانيا:

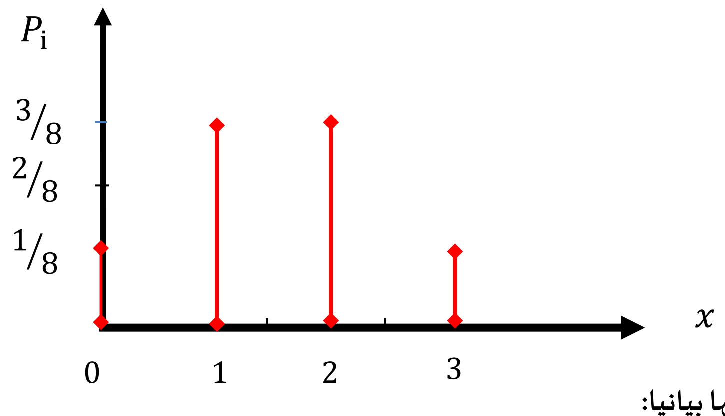
$$E = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

نلاحظ أن: $X \in \Omega_X = [0, 1, 2, 3]$

$$P(X=0) = \frac{1}{8} \quad , \quad P(X=1) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(X=2) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$$

$\boldsymbol{X}$	**0**	**1**	**2**	**3**	$\sum \boldsymbol{P(X=x_i)}$
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

يمثل بيانيا هذا التوزيع بواسطة الأعمدة، لأن المتغير العشوائي المدروس الذي يمثل عدد الأوجه من النوع المنفصل.

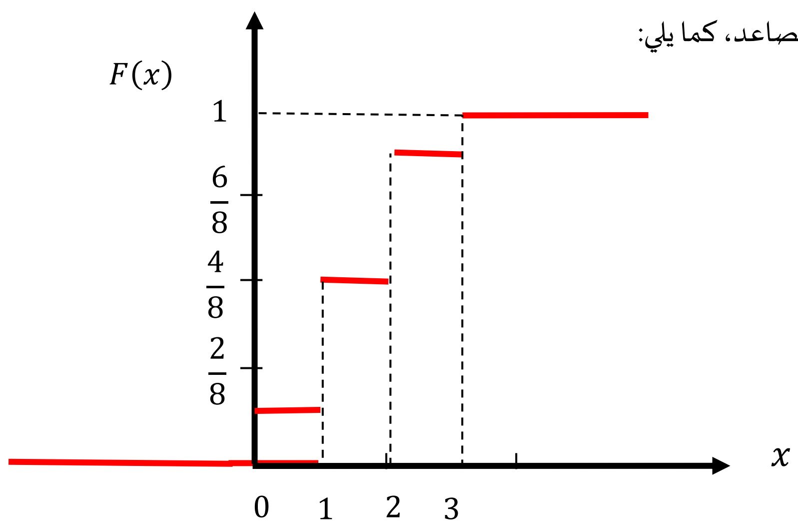


2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية وتمثيلها بيانيا:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

يتم ذلك بواسطة منحنى سلمي متصاعد، كما يلي:



3- حساب كلا من: $E(X)$، $V(X)$، $\delta(Z)$، $E(4X-2)$، $V(4X-2)$:

X	0	1	2	3	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$P_i x_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$
$\sum x_i^2 p_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8}$

- حساب $E(X)$: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5$

- حساب $V(X)$: $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2)=\sum x_i^2 p_i=\frac{24}{8}=3$$

$$V(X)=3-(1{,}5)^2=0{,}75$$

- حساب $\delta(X)$: $\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0{,}75}=0{,}866$

- حساب $E(4X-2)$: $E(4X-2)=4E(X)-2=4(1{,}5)-2=4$

- حساب $V(4X-2)$: $V(4X-2)=4^2E(X)=16(1{,}5)=24$

ثانيا: توزيع برنولي $X \rightarrow B(1\,;\,p)$

1- شروط استعمال توزيع برنولي:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع برنولي ذو المعلمتين 1 و p إذا كان X يقبل قيمتين فقط هما $X=0$ باحتمال q، و $X=1$ باحتمال p.

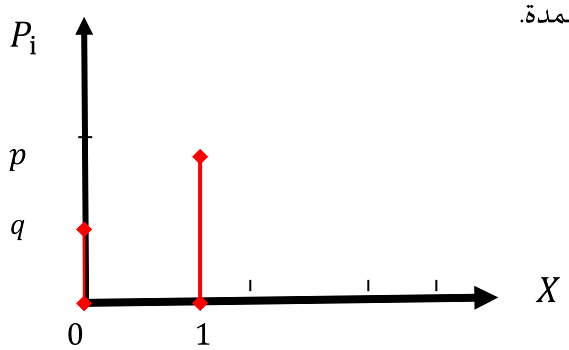
2- التوزيع الاحتمالي:

توزيع برنولي يعبر على تجربة عشوائية تكرر مرة واحدة، ونعبر بـ $X=1$ على النتيجة التي تتحقق فيها الخاصة المدروسة و $X=0$ إذا لم تتحقق الصفة المدروسة، وبالتالي فتوزيعه الاحتمالي يكون بالشكل التالي:

X	0	1	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	q	p	1

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لبرنولي بواسطة الأعمدة.



مثال2: إذا علمت أن نسبة الانتاج الصالح في إنتاج نوع معين من البطاريات بأحد المصانع هي 90%، نختار عشوائيا بطارية من الإنتاج الكلي للمصنع، وليكن X: يمثل عدد البطاريات الصالحة. حدد التوزيع الاحتمالي في هذه التجربة، ما هو قانونه الاحتمالي؟

الحل:

X: يمثل عدد البطاريات الصالحة البطارية صالحة: $X = 1$ البطارية غير صالحة: $X = 0$

X	0	1	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0,1	0,9	1

$$X \in \Omega_X = [0\,,1]$$

$$P(X = 1) = 0{,}9 \quad , \quad P(X = 0) = 0{,}1$$

$$X \to B(1\,;\ p) \quad ، \quad X \to B(1\,;\ 0{,}9)$$

ملاحظة هامة: توزيع برنولي يعبر على دراسة إحصائية تتم على عينة مشكلة من وحدة واحدة أي: $n = 1$، وعليه فإن هذا التوزيع غير صالح تطبيقيا، لأن العينة المشكلة من وحدة واحدة لا تمثل المجتمع فتكون الاستنتاجات خاطئة، ولكن أهمية توزيع برنولي هي أهمية نظرية إذ يعتبر هو أساس كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى.

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $E(X) = \sum x_i\, p_i = 0.q + 1.p = p \quad \Rightarrow \boxed{E(X) = p}$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = p(1 - p) = pq}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq}}$

مثال3: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

الحل:

- **التوقع الرياضي:** $E(X) = p = 0{,}9$
- **التباين:** $V(X) = pq = 0{,}9(0{,}1) = 0{,}09$
- **الانحراف المعياري:** $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$