ثالثا: توزيع ثنائي الحدين $X \to B(n\,;\,p)$

1- شروط استعمال توزيع ثنائي الحدين:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحدين ذو المعلمتين n و p إذا كان يعبر على مجموع n متغير عشوائي مستقل لـ برنولي أي: $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، حيث:

$$X_1 \to B(1\,;\,p),\ X_2 \to B(1\,;\,p)\ \ldots\ldots\ldots\ X_n \to B(1\,;\,p)$$

ملاحظة: صفة الاستقلالية لـ n متغير عشوائي تعني تكرار تجربة بارنولي n مرة مع الإرجاع.

عمليا توزيع ثنائي الحدين يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة...)، بشرط أن يتم سحب العينة مع الإرجاع.

إن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية مستقلة، يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$n = 1,2,3,\ldots \qquad X \in \Omega_X = [0,1,2,3,\ldots,n] \qquad \boxed{P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}}$$

حيث x: يمثل عدد مرات النجاح، p: يمثل احتمال النجاح في التجربة (يبقى ثابتا عند تكرار التجربة)، $q = 1 - p$: تمثل احتمال الفشل، n: عدد التجارب.

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع ثنائي الحدين هي:

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n.
- احتمال النجاح في التجربة ثابت (تجارب مستقلة).

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين يكون وفق الجدول التالي:

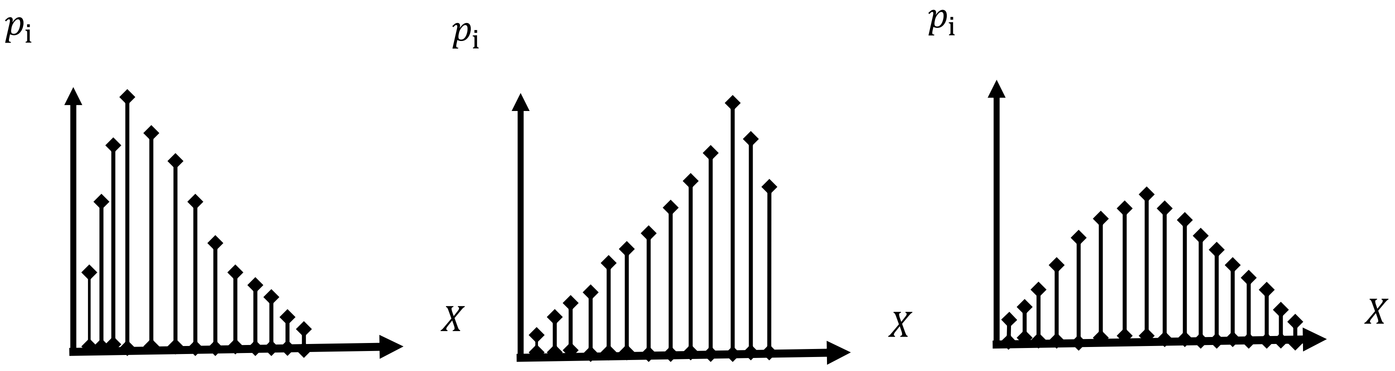
X	0	1	....	x	....	n	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	q^n	.....	....	$C_n^x p^x q^{n-x}$	....	p^n	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$$\boxed{p_i \geq 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\sum P(X = x_i) = 1}$$

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين بواسطة الأعمدة، حيث يأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة p.



مثال4: في تجربة رمي قطعة نقدية متوازنة 5 مرات، ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الصور التي تظهر.

المطلوب: أحسب احتمال الحصول على: ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات، 5 مرات.

الحل:

بما أن التجربة برنولية (مكررة 5 مرات)، احتمال النجاح ثابت في كل تجربة $p=\frac{1}{2}$ (التجارب مستقلة)، فإن المتغير العشوائي X يتبع قانون ثنائي الحدين:

$$n=5 \qquad X=0,1,2,3,4,5 \qquad P(X=x)=C_n^x P^x q^{n-x} \qquad X\to B\left(5\,;\frac{1}{2}\right)$$

وبالتالي:

$$P(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=0{,}3125 \quad ، \quad P(X=0)=C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=0{,}0313$$

$$P(X=4)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=0{,}1563 \quad ، \quad P(X=1)=C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=0{,}1562$$

$$P(X=5)=C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=0{,}0312 \quad ، \quad P(X=2)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=0{,}3125$$

ملاحظة: يمكن استخراج الاحتمالات عن طريق جدول التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين (أنظر الملحق1).

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1+X_2+\cdots+X_n)\\ &= E(X_1)+E(X_1)+\cdots+E(X_n)\\ &= p+p+\cdots+p \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X)=np}$$

ب- التباين:

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1+X_2+\cdots+X_n)\\ &= V(X_1)+V(X_1)+\cdots+V(X_n)\\ &= Pq+Pq+\cdots+Pq \end{aligned}$$

$$\boxed{V(X)=npq}$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\boxed{\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq}}$$

مثال5: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- **التوقع الرياضي:** $E(X)=np=5\left(\frac{1}{2}\right)=2{,}5$
- **التباين:** $V(X)=npq=5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}25$
- **الانحراف المعياري:** $\delta(X)=\sqrt{1{,}25}=1{,}12$

النموذج العلمي لقانون ثنائي الحدين

لدينا صندوق يحتوي على كريات بيضاء بنسبة p وكريات ليست سوداء بنسبة $q = 1 - p$.

- نسحب عشوائيا عينة من n كرية من هذا الصندوق مع الارجاع.
- نعرف المتغير العشوائي X: عدد الكريات البيضاء من بين n.
- X متغير عشوائي منفصل يتبع قانون ثنائي الحدين: $X \to B(n\,,p)$
- p هو احتمال أن تكون الكرية الأولى المسحوبة بيضاء (هو نفس الاحتمال لكل الكريات لأن السحب يتم مع الارجاع وبالتالي كل الأحداث مستقلة).
- مجال التعريف: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, n]$
- القانون الاحتمالي:

$$P(X = x) = P(\underbrace{BB \dots \dots B}_{x \text{ مرة}}\ \underbrace{\bar{B}\bar{B} \dots \dots \bar{B}}_{(n-x) \text{ مرة}})$$

$$= \underbrace{p.p \dots \dots p}_{x \text{ مرة}}\,.\underbrace{q.q \dots \dots .q}_{(n-x) \text{ مرة}}$$

$$= p^x\,.q^{n-x}$$

هذه حالة واحدة من الحالات التي يمكن أن نركب بها تشكيلة الكريات البيضاء والكريات التي ليست بيضاء، مثلا: $(\bar{B}\bar{B} \dots \dots \bar{B}\ \ BB \dots \dots B)$ ، $(B\bar{B} \dots \dots B\ \ \bar{B}B \dots \dots \bar{B})$ ، ....

عدد الطرق الممكنة لتركيب الكريات هو: C_n^x

وبالتالي: $P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$

رابعا: توزيع بواسون: $X \to P(\lambda)$

1- شروط استعمال توزيع بواسون:

نقول أن متغيرا عشوائيا منفصلا X يتبع توزيع بواسون ذو المعلمة λ إذا كان:

- **مجال التعريف:** $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, n]$

- **القانون الاحتمالي:** $P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

حيث: e: العدد النيبري $(e = 2,71828)$ و $\lambda > 0$

ملاحظة:

توزيع بواسون يعبر على تجربة برنولية مكررة عددا كبيرا أو لانهائيا من المرات يكون فيها احتمال النجاح ضعيفا (p ضعيفا)، فنقول أنها ظاهرة نادرة واحتمال تحققها ضعيفا.

عمليا يطبق توزيع بواسون على ظاهرة محصورة في فترة زمنية قصيرة، فيصبح احتمال تحققها ضعيفا، مثل: عدد السيارات التي تدخل مضخة بنزين خلال ساعة، عدد المكالمات التي يتلقاها مركز هاتفي خلال نصف ساعة...

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون يكون وفق الجدول التالي:

$\sum P(X = x_i)$	....	x	....	1	0	X
1	....	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	....	.....	$e^{-\lambda}$	$P(X = x_i)$

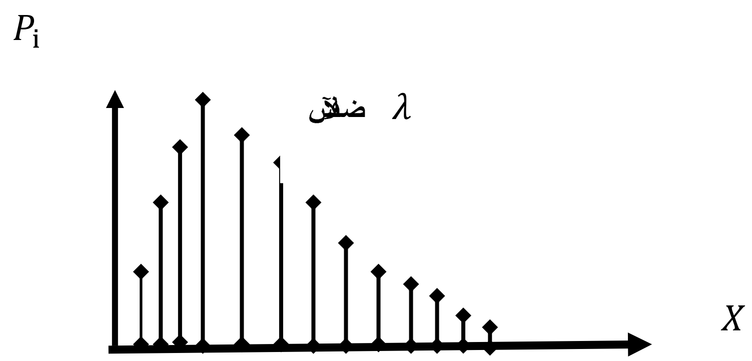
ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$p_i \geq 0$ و $\sum P(X = x_i) = 1$

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون بواسطة الأعمدة، حيث يعتبر من النوع الملتوي نحو اليمين.

ملاحظة: كلما كبر λ ضعف الالتواء إلى اليمين، ويميل التوزيع إلى التماثل فتصبح الظاهرة طبيعية.



مثال6: يشير تحقيق قام به صاحب محطة بنزين إلى أن متوسط عدد السيارات التي تتوقف للتزود بالوقود خلال ساعة واحدة هو 8 سيارات. أحسب احتمال توقف 4 سيارات على الأقل للتزود خلال ساعة ما؟ احتمال توقف 4 سيارات بالضبط للتزود بالبنزين؟

الحل: لدينا ظاهرة (توقف السيارات للتزود بالوقود) منسوبة إلى وحدة زمنية (الساعة) وبالتالي فهي تخضع لتوزيع بواسون

$\lambda = 8$

- احتمال توقف 4 سيارات على الأقل للتزود خلال ساعة ما:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}0424 = 0{,}9576 \\
&= 1 - \big(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\big) \\
&= 1 - \left(e^{-8}\,\frac{8^0}{0!} + e^{-8}\,\frac{8^1}{1!} + e^{-8}\,\frac{8^2}{2!} + e^{-8}\,\frac{8^3}{3!}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!}\right) e^{-8} \\
&= 1 - \left(1 + 8 + 32 + \frac{512}{6}\right) e^{-8} \\
&= 1 - 0{,}0424 = 0{,}9576
\end{aligned}$$

- احتمال توقف 4 سيارات بالضبط للتزود خلال ساعة ما:

$$P(X = 4) = e^{-8}\,\frac{8^4}{4!} = 0{,}0572$$

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \lambda}$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = \lambda}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}}$

مثال7: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda = 8$

- التباين: $V(X) = \lambda = 8$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ملاحظة: يمكن استخراج الاحتمالات عن طريق جدول التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون (أنظر الملحق2).

خامسا: التوزيع الهندسي $X \to G(p)$

1- شروط استعمال التوزيع الهندسي:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع التوزيع الهندسي، إذا كانت التجربة برنولية، وأردنا الحصول على احتمال تحقيق أول نجاح بعد x من المحاولات، في هذه الحالة فإن احتمال تحقق x ، يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$\boxed{P(X=x)=q^{x-1}p} \qquad X \in \Omega_X=[1,2,3,\dots]$$

مثال8: صندوق به 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6، نسحب 5 كريات عشوائيا، الواحدة تلوى الأخرى مع الإرجاع من هذا الصندوق.

1- ما احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة.

2- ما احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة على الأكثر.

الحل: احتمال تحقق x، يحسب وفق القانون الهندسي التالي:

$$P(X=x)=q^{x-1}p \qquad X \in \Omega_X=[1,2,3,4,5]$$

حيث: $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ تمثل احتمال الحصول على رقم زوجي، و $q=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ تمثل احتمال الحصول على رقم فردي.

X : عدد المحاولات للحصول على أول رقم زوجي (أول نجاح).

1- احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة: أي $X=3$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}=0,125$$

2- احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة على الأكثر: أي $X \le 3$

$$\begin{aligned}P(X\le 3)&=P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}=0,875\end{aligned}$$

2- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X)=\frac{1}{p}}$

ب – التباين: $\boxed{V(X)=\frac{q}{p^2}}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{q}{p^2}}}$

مثال9: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

- **التباين:** $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

- **الانحراف المعياري:** $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} = 1,41$