سادسا: توزيع فوق الهندسي $X \to H(N\,;n\,;\,p)$

1- شروط استعمال توزيع فوق الهندسي:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع فوق الهندسي ذو المعالم $\boldsymbol{N}$ و $\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{p}$ إذا كان يعبر على مجموع n متغير عشوائي غير مستقل لـ: برنولي، أي أن صفة عدم الاستقلالية لـ n متغير عشوائي تعني تكرار تجربة برنولي n مرة مع عدم الإرجاع (السحب في آن واحد).

عمليا توزيع فوق الهندسي يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة...)، بشرط أن يتم سحب العينة مع عدم الإرجاع (السحب في آن واحد).

إن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$n = 1,2,3,\dots \qquad X \in \Omega_X = [0,1,2,3,\dots,n] \qquad \boxed{P(X=x) = \frac{C_{N_1}^{x}\,C_{N_2}^{n-x}}{C_N^{n}}}$$

حيث:

x: يمثل عدد مرات النجاح، N: حجم المجتمع، N_1: حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصة المدروسة،

N_2: حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصة المدروسة ، n: عدد التجارب (حجم العينة).

وبالتالي فإن شروط استخدام توزيع فوق الهندسي هي:

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n.
- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة)[1].

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي يكون وفق الجدول التالي:

$\sum P(X=x_i)$	n	....	x	....	1	0	X
1	$\frac{C_{N_1}^{n}}{C_N^{n}}$	....	$\frac{C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}}{C_N^{n}}$	....	.....	$\frac{C_{N_2}^{n}}{C_N^{n}}$	$P(X=x_i)$

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

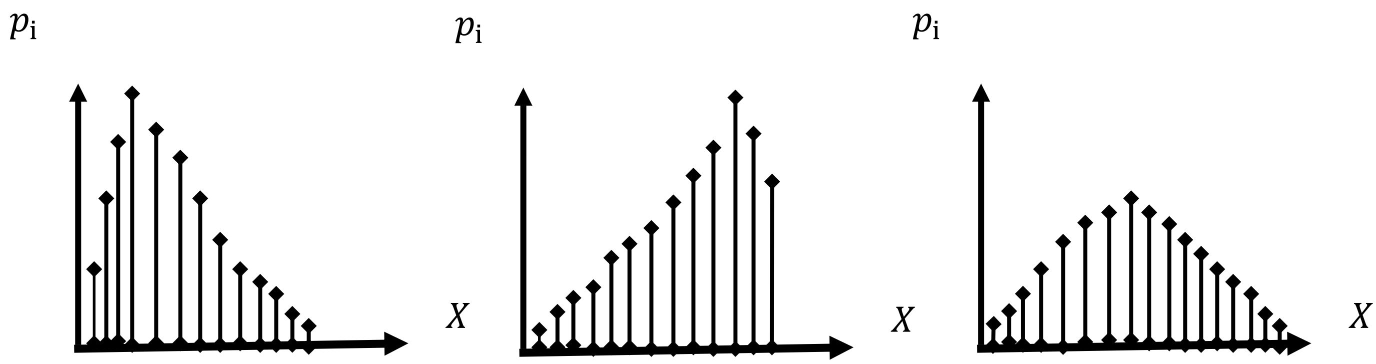
$$\boxed{p_i \geq 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\sum P(X=x_i) = 1}$$

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي بواسطة الأعمدة، حيث يأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة p.

(1)– ماذا تمثل المعلمة p في الصيغة العامة لقانون فوق الهندسي؟

p تمثل احتمال النجاح في السحب الأول أي: $p = \frac{N_1}{N}$، أما في باقي السحبات فسيتغير p بسبب عدم الارجاع (احتمالات شرطية).



مثال10: صندوق به 6 كريات منها 4 بيضاء و2 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين، 3 كريات بيضاء، كرية واحدة بيضاء، ولا كرية بيضاء؟

الحل: بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X يتبع قانون فوق الهندسي:

$$X \to H\left(6\,;3\,;\tfrac{2}{3}\right) \qquad P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \qquad X\in\Omega_X=[0,1,2,3,\dots,n] \qquad n=3$$

وبالتالي:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_2^3}{C_6^3}=0 \qquad P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=0{,}6$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=0{,}2 \qquad P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=0{,}2$$

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	$\sum \boldsymbol{P(X=x_i)}$
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	0	0,2	0,6	0,2	1

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X)=np}$

ب– التباين: $\boxed{V(X)=npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$: يسمى معامل الشمولية، ويعني أنه كلما كان حجم العينة n كبيرا فإنه يؤول إلى حجم المجتمع N، وتصبح الدراسة شاملة وتنعدم عشوائية X، فيصبح أكيدا أي: $X=N_1$

$$\lim_{n\to N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\to 0 \quad\Rightarrow\quad V(X)=0$$

مثال11: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- **التوقع الرياضي:** $E(X)=np=3\left(\frac{2}{3}\right)=2$
- **التباين:** $V(X)=npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4-3}{4-1}\right)=\frac{2}{9}$
- **الانحراف المعياري:** $\delta(X)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

النموذج العملي لقانون فوق الهندسي

لدينا صندوق يحتوي على إجمالي N كرة، منها N_1 كرة بيضاء و N_2 كرية ليست بيضاء.

- نسحب من هذا الصندوق عينة من n كرية مع عدم الإرجاع.
- نعرف X : عدد الكريات البيضاء من بين n.
- X: متغير عشوائي منفصل يتبع قانون فوق الهندسي: $X \to H(N\,;n\,;\,p)$
- p هو احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء:

N_2: عدد الكريات الغير بيضاء، N_1: عدد الكريات البيضاء و $P(B) = p = \frac{N_1}{N}$

- مجال التعريف: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3,\dots,x_{max}]$
  - إذا كان $\boldsymbol{n < N_1}$: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3,\dots,n]$
  - إذا كان $\boldsymbol{n > N_1}$: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3,\dots,N_1]$
- القانون الاحتمالي: $P(X = x) = P(\underbrace{BB\dots\dots B}_{x \text{ مرة}}\ \underbrace{\bar{B}\bar{B}\dots\dots\bar{B}}_{(n-x) \text{ مرة}})$
- عدد الطرق الممكنة للحصول على x كرية بيضاء من N_1 و $(n-x)$ كرية ليست بيضاء من بين N_2 هي: $C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}$
- عدد الطرق الممكنة لإختيار n كرية ممكنة من بين العدد الاجمالي للكريات N هي: C_N^n

وبالتالي: $P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$

سابعا: التوزيع المنتظم $X \to U(p)$

1- شروط استعمال التوزيع المنتظم:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع التوزيع المنتظم، إذا كان يأخذ جميع القيم الممكنة $1\,,2\,,\dots\dots,n$ باحتمالات متساوية أي: $P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = n)$

من الخاصية: $\sum P(X = x) = 1$، نستنتج مايلي:

$$\sum P(X = x) = 1 \Leftrightarrow P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(X=x)+P(X=x)+\cdots+P(X=x)=1$$
$$\Leftrightarrow nP(X=x)=1$$
$$\Leftrightarrow P(X=x)=\frac{1}{n} \qquad , \quad \forall x=1,2,\dots,n$$

وبالتالي، إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ جميع القيم الممكنة $1\,,2\,,\dots\dots,n$ باحتمالات متساوية، فإن احتمال تحقق x، يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$\boxed{P(X=x)=\frac{1}{n}} \qquad X\in\Omega_X=[1,2,3,\dots,n]$$

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم، يكون وفق الجدول التالي:

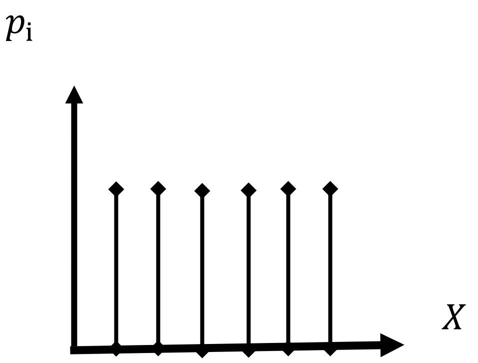
$\boldsymbol{X}$	**1**	2	....	$\boldsymbol{n}$	$\sum \boldsymbol{P(X=x_i)}$
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	....	$\frac{1}{n}$	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$$\boxed{p_i\geq 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\sum P(X=x_i)=1}$$

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم بواسطة الأعمدة متساوية في الطول، حيث يأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة p.



مثال12: صندوق به 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6، نسحب كرية واحدة من هذا الصندوق، نهتم بالرقم الظاهر على الكرية المسحوبة. أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي، ثم مثله بيانيا.

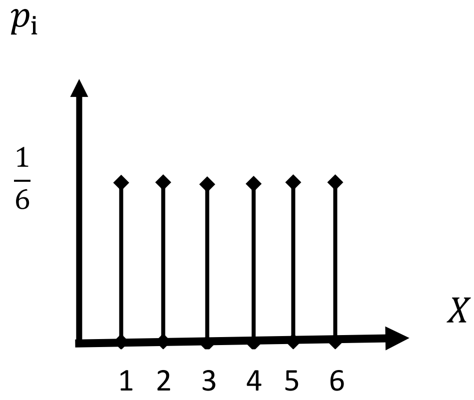
الحل: بما أن المتغير العشوائي X يأخذ جميع القيم الممكنة $1\,,2\,,\dots\dots,6$ باحتمالات متساوية، فإن احتمال تحقق x، يحسب وفق القانون المنتظم التالي:

$$P(X=x)=\frac{1}{6} \qquad X\in\Omega_X=[1,2,3,\dots,6]$$

التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم، يكون وفق الجدول التالي:

$\boldsymbol{X}$	**1**	2	3	4	5	**6**	$\sum \boldsymbol{P(X=x_i)}$
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

يمثل التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم بواسطة الأعمدة متساوية في الطول، كما يلي:



4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$

ب– التباين: $\boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}$

مثال13: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 3,5$

- التباين: $V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2,92$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,92} = 1,71$