CHAPITRE IV La convection forcée

IV.1. Ecoulement dans les tubes

إن ظاهرة تسخين او تبريد الموائع التي تسري داخل الأنابيب تعذ من بين المسائل الأساسية لانتقال الحرارة بالحمل (par convection).

إن دراسة الحمل الحراري تتطلب معرفة معامل الحمل الحراري h الذي هو معامل أساسي في عبارة التبادل الحراري عبر مساحة التلامس بين المائع والسطح الصلب (سطح الأنبوب) وهذه العلاقة تتمثل في علاقة نيوتن $\Phi = hs(Tp - Tf)$

وان هذا المعامل له علاقة مع علاقة Nusselt حيث : $Nu = \dfrac{h.L_o}{k}$

tel que; k est la conductivité thermique du fluide et Lo est la longueur caractéristique; et dans le cas ou l'écoulement est à l'intérieur d'un tube, cette longueur caractéristique est appelée le diamètre hydraulique

$$D_h = \frac{4.s}{p}$$

s est la section de la surface du tube

p est le périmètre mouillé (المبتل)

Exemple : un tube cylindrique de rayon R totalement rempli de fluide :

$s = \pi R^2$ et $p = 2\pi R$ $\rightarrow$ $D_h = 2R$

إذا كان الأنبوب ممتلئ نصفه فقط في هذه الحالة فان المحيط المبتل هو : $p = 2\pi R / 2 = \pi R$

في علاقة نيوتن يوجد المقدار Tf او To الذي يمثل درجة الحرارة المرجعية للمائع . في هده الحالة تؤخذ درجة الحرارة الوسطية للمائع Tm=Tf (température moyenne)

$$T_f = Tm = \frac{\int u.T.ds}{\int uds}, \text{ avec } ds = 2\pi r dr$$

IV.2. Ecoulement laminaire dans un tube cylindrique (Ecoulement de Poiseuille)

Le régime dynamique établi

On dit que le régime d'écoulement est **dynamique établi** si la composante de vitesse u parallèle à l'écoulement ne dépend pas de temps t et de x et la composante de vitesse normale à l'écoulement $v_r=0$. c'est à dire que u=f(r)

Le régime établi thermiquement

le régime d'écoulement est établi thermiquement si la température adimensionnelle de fluide ne dépend ni de temps ni de x

يكون الانسياب تام التطور تحريكيا إذا كانت مركبة السرعة الموازية للانسياب u لا تتعلق لا بالزمن ولا بالمتغير x وان المركبة الناظمية للانسياب $v_r=0$. هذا يعني ان u=f(r).

ويكون الانسياب تام التطور حراريا اذا كانت درجة حرارة المائع اللابعدية لا تتعلق لا بالزمن ولا بالمتغير x .

عند دخول المائع إلى الأنبوب تبدأ الطبقة الحدية التحريكية والحرارية (couche limite dynamique et thermique) في التكوين مباشرة عند مدخل الانبوب . وبعد مسافة معية من بداية الانبوب والتي تسمى بمسافة الدخول Le فان الطبقة الحدية ستشمل كل الأنبوب وعموما هذه في الحالة التي يكون فيها الانسياب تام التطور (Etabli) الشكل 1.

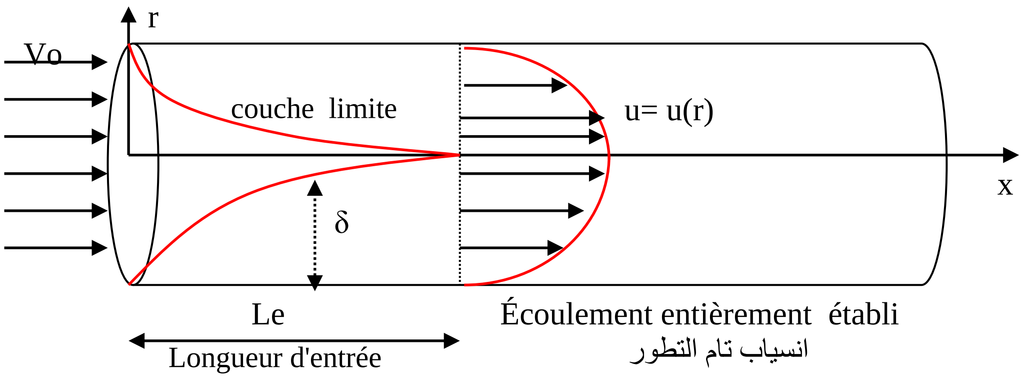

Figure 2. Ecoulent d'un tube cylindrique

Le profile d'un écoulement établi laminaire et turbulent dans un tube est donnée dans la figure 2.

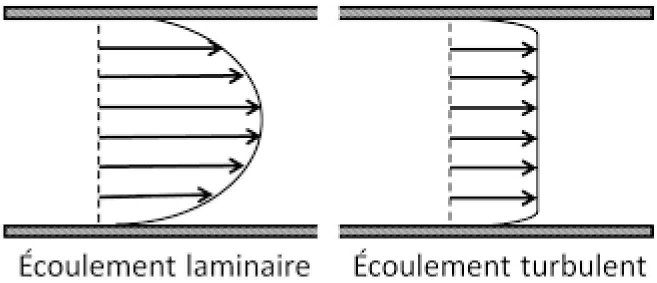

Figure 2. Profile d'un écoulement établi laminaire et turbulent

Remarque

L'écoulent dans les tubes cylindriques est laminaire si le nombre de Reynolds critique **Rec<2300** tel que :

$Re_D = \dfrac{\bar{u}.D}{\nu}$ avec $\bar{u}$ est la vitesse moyenne de l'écoulement

Si $Re_D < Re_{cr}$, l'écoulement est laminaire

et pour $Re_D > Re_{cr}$ l'écoulement est turbulent.

Equation de mouvement

L'équation de mouvement suivant ox dans *la couche limit*e dans un tube cylindrique circulaire de rayon R et dans les coordonnées cylindrique est:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad \text{(IV.1)}$$

Pour un écoulement établi , u=u(r) → du/dx=0 et v=0. alors

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu.\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) \rightarrow \quad \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dp}{dx} \qquad \text{(IV.2)}$$

$\frac{dp}{dx} = \frac{p1 - p2}{x1 - x2}$<0

la pression p ne dépend pas de r et u ne dépend pas de x , alors on peut écrire

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dp}{dx} = -b \qquad \text{(IV.3)}$$

ou b est une constante positive

pour trouver u on intègre la relation (IV.3).

$$\int d\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{b}{\mu}\int rdr \rightarrow \quad \left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{b}{\mu}\frac{r^2}{2} + c1$$

et $\int du = -\int \frac{b}{\mu}\frac{r}{2}dr + \int \frac{c1}{r}dr \rightarrow u(r) = -\frac{b}{4\mu}r^2 + c1.\ln(r) + c2$ (IV.4)

pour déterminer les constantes c1 et c2 on utilise les conditions aux limite suivants:

si r=0 , du/dr=0 → u= u_{max} → c1=0.

si r=R → u=0 → $c2 = \frac{b}{4\mu}R^2$

On remplace c1 et c2 dans (IV.4),

$$u(r) = \frac{bR^2}{4\mu}(1 - \frac{r^2}{R^2}) \qquad \text{(IV.5)}$$

La vitesse maximale est:

u_{max}= u(r=0)= $\frac{bR^2}{4\mu}$

→ $u(r) = u_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2})$ avec 0 ≤r ≤ R (IV.6)

La vitesse moyenne peut être déterminé par :

$$\bar{u} = \frac{1}{s}\int uds = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u.2\pi rdr = \frac{u_{max}}{2} \qquad \text{(IV.7)}$$

Le début volumique est donné par:

$$Q_v = \bar{u}.s = \bar{u}.\pi R^2 = \frac{b}{8\mu}\pi R^4 \qquad \text{(IV.8)}$$

Cette dernière relation permet ainsi de faire le lien entre le débit volumique et **les pertes de charge régulières** ΔP puisque

$b = \frac{dp}{dx}$,

La différence de pression totale (ou perte de charge) engendrée par les frottements visqueux dans une conduite de longueur L=Δx est donc proportionnelle à L

$b = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L}$ On remplace cette relation dans (IV.8), on trouve

$$Q_v = \frac{\Delta p}{8\mu L}\pi R^4 \rightarrow \Delta P = \frac{8\mu L}{\pi R^4}Q_v \qquad \text{(IV.9)}$$

Longueur d'entrée

Pour l'écoulement laminaire la longueur de la région d'entrée est donnée expérimentalement par :

$$\frac{Le}{D} = 0.06\,\mathrm{Re}_D$$

Pour un écoulement turbulent:

$$\frac{Le}{D} = 4.4\,\mathrm{Re}_D^{1/6}$$

avec $\mathrm{Re}_D = \frac{\bar{u}.D}{\nu}$

Application

Un tube cylindrique de rayon R=0.5 cm de longueur L= 50 M transport de l'eau avec un début volumique souhaité est de 0.04 l/s

1. déterminer le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent)
2. calculer la vitesse maximale de l'écoulement
3. calculer les pertes de charge
4. si la pression d'entrée est Pe= 3 bar, déterminer la pression de sortie Ps
5. calculer la longueur d'entrée pour que l'écoulement devienne établi

on donne ρ_{eau}= 1000 kg/m^3 , μ= 10^{-3} kg/m.s

Solution

1. **Pour** déterminer le régime d'écoulement on calcul le nombre de Reynolds

$\mathrm{Re}_D = \frac{\bar{u}.D}{\nu}$, mais il faut déterminer tout abord la vitesse d'écoulement moyenne utilisant :

$$Q_v = \bar{u}.s \rightarrow \bar{\mathrm{u}} = \frac{Q_v}{s} = 0.5 m/s$$

Avec:

Q_v=0.04 l/s= 0.04.10^{-3} m^3/s

s=π.R^2= π.(0.5.10^{-2})^2= 0.785.10^{-4} m^2

La viscosité cinématique $\nu = \mu / \rho_{eau}$ =10^{-6} m^2/s alors : $\mathrm{Re}_D = \dfrac{0.5\mathrm{x}1.10^{-2}}{10^{-6}}$ $=5.10^3$

Re_D > Rec (=2300)   donc le régime est turbulent

2. la vitesse maximale de l'écoulement

$$u_{\max} = \frac{bR^2}{4\mu} \qquad \textbf{(a)}$$

et d'autre part : $u_{\max} = 2.\bar{u} = 1.m/s$

$$u_{\max} = \frac{bR^2}{4\mu} = \frac{2.Q\mathrm{v}}{\pi R^2} = 2.\bar{u} = 1.m/s$$

3. Les pertes de charge ΔP

$$b = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L} \rightarrow \Delta p = b.L \qquad \textbf{(b)}$$

De la relation (a) on a :

$$u_{\max} = \frac{bR^2}{4\mu} \quad \mathrm{b}=\frac{4.\mu}{R^2}u_{\max} = 160$$

on remplace dans la relation (b) , on trouve :

ΔP= 160x5= 800 pascale = 0.08 bar

4. la pression de sortie

Δp = Pe-Ps $\rightarrow$ Ps= Pe- Δp = 3-0.08= 2.92 bar

5. la longueur d'entrée pour que l'écoulement devienne établi

On utilise la formule empirique suivante:

$$\frac{Le}{D} = 4.4\,\mathrm{Re}_D^{1/6} \;\rightarrow\; \text{Le} = 0.18\ \text{m}$$

Equation de l 'énergie

$$\rho.\mathrm{cp}\left(\mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}}\right) = \mathrm{k}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2}\right) + u\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Dans la convection forcée, en générale, la force de pression et la fonction de dissipation sont négligeable dans l'équation de l'énergie.

L'équation de l'énergie dans la couche limite en régime permanant est :

$$\rho.cp\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Le régime est établi, donc v=0

$$u\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{avec} \quad \alpha=\frac{k}{\rho cp}$$

et dans les coordonnées cylindriques :

$$u\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad \text{(IV.10)}$$

Dans le régime thermique établi, la température adimensionnelle ne dépend que de r:

on pose: $\frac{\text{Tp-T}}{Tp-Tm}=f(r) \quad \to Tp-T=f(r)\left(Tp-Tm\right)$ (a)

La densité de flux de chaleur qp à la paroi du cylindre est donnée par:

$\mathbf{q_p=h(Tp-Tm)}$ (b)

si h est constante, $\frac{dq_b}{dx}=h\frac{d}{dx}(Tp-T_m)$ (c)

la dérivé par rapport à x de la relation (a) est:

$\frac{d}{dx}\left(Tp-T\right)=f(r)\frac{d}{dx}\left(Tp-Tm\right)$ (d)

de la relation (c) , nous avons deux cas :

1. cas ou qp est constante
2. cas ou qp n'est pas constante

Dans ce chapitre on va étudier le cas où q_p est constante le long de la paroi de cylindre alors, de la relation (c)

$$\frac{dq_b}{dx}=0\to\frac{d}{dx}(Tp-T_m)=0$$

on remplace dans la relation (d) :

et donc $\frac{d}{dx}(Tp-T)=0$, c'est à dire que T ne dépend pas de x, et on peut écrire:

$$\frac{dT}{dx}=A=cst.$$

on remplace dans (IV.8) , on obtient:

$$u.A=\frac{\alpha}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) \quad \text{avec} \quad u=u_{max}(1-\frac{r^2}{R^2})$$

alors $$d\left(r\frac{d\ \mathrm{T}}{d\mathrm{r}}\right)=\frac{A}{\alpha}\ \mathrm{u.rdr}=\frac{A.u_{\max}}{\alpha}\left(r-\frac{r3}{R^2}\right)\mathrm{dr} \qquad \text{(IV.11)}$$

Posons $B=\frac{A.u_{\max}}{\alpha}$

L'intégrale de la relation (IV.9) donne:

$$T(r)=B\left(\frac{R^2r^4}{4}-\frac{r^4}{16}\right)+C1.\ln(r)+C2 \qquad \text{(IV.12)}$$

Pour déterminer les constantes C1 et C2 en utilisant les conditions aux limites suivantes:

Si r=0 $\rightarrow$ la température doit être connue, donc C1=0.

Si r= R $\rightarrow$ T= Tp $\rightarrow$ $C2=Tp-3B.\frac{R^2}{16}$

$$T(r)=Tp-B\left(3+\frac{r^4}{R^4}-4\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{(IV.13)}$$

La température moyenne de fluide peut être déterminée par la relation:

$$T_m=\frac{\int_0^R T.u.ds}{\int_0^R uds}=Tp-11.B.\frac{R^2}{96} \qquad \text{(IV.14)}$$

Avec $B=\frac{A.u_{\max}}{\alpha}$

La densité de flux de chaleur échangé entre la surface de tube et le fluide est:

$$q_p=-k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}=k.\frac{B.R}{4} \qquad \text{(IV.15)}$$

Nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt est donné par:

$$Nu=\frac{h.L}{k},\quad avec\ \mathrm{L{=}D_h{=}}2R\ \rightarrow Nu=2R\frac{h}{k} \qquad \text{(IV.16)}$$

et d'autre part : $$q_p=-k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}=h(Tp-Tm) \qquad \text{(IV.17)}$$

On utilise la relation (IV.14), on trouve que

$$Tp - T_m = 11.B.\frac{R^2}{96} \qquad (IV.18)$$

On remplace les relations (IV.15) et (IV.18) dans (IV.17) ; on trouve:

$$\frac{h}{k} = \frac{24}{11R}$$

on remplace cette relation dans (IV.16);

$$Nu = \frac{48}{11} = 4.364$$

IV.3. Formule empiriques العلاقات التجريبية

ان الانسياب الصفحي (laminaire) داخل الانبوب يكون تام التطور (Etabli) وهذا بعد مسافة تسمى بمسافة الدخول Le .

Le paramètre principal pour caractériser le régime d'écoulement est le nombre de Reynolds, qui est défini par :

$$Re_D = \frac{\overline{U}.D}{\nu} \quad \text{avec} \quad \overline{U} \quad \text{est la vitesse moyenne de l 'écoulement}$$

On définie un nombre de Reynolds critique, Re_{cr} tel que:

$Re_D < Re_{cr}$, l'écoulement est laminaire

et pour $Re_D > Re_{cr}$ il est turbulent.

Pour l'écoulement dans les conduites le nombre de Reynolds critique est :

$$Re_{cr} \approx 2300$$

IV.3.1 Ecoulement externe

a) Ecoulement laminaire sur une plaque plane

إن الانسياب على صفيحة مستوية يبقى صفحيا (laminaire) ما دام عدد Re لم يصل الى قيمته الحرجة (Reynolds critique) Rec شكل (3). توجد بين منطقة الانسياب الصفائحي و المضطرب منطقة تسمي بمنطقة العبور (transition).

$$R_{ec} = \frac{Vo.xc}{\nu} = 5.10^5$$

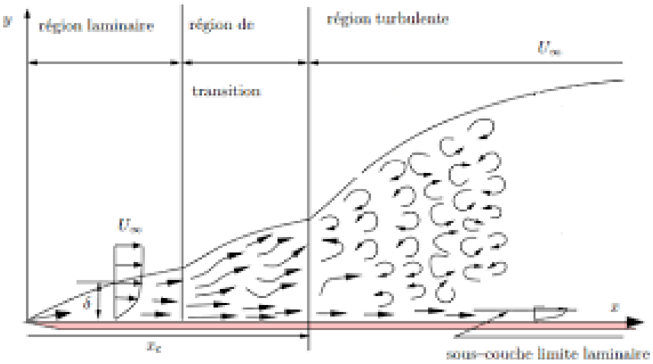

Figure 3. Couche limite laminaire et turbulent

Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement est donnée par la relation de de Blasius

$$cf_x = 0.664\left(\mathrm{Re}\,x\right)^{-1/4} \quad \text{avec: } \mathrm{R}_x = \frac{Vo.x}{\nu} \quad \text{(nombre de Rynolds local)}$$

Pour déterminer le coefficient de frottement moyen cf_L, on intègre la relation précédente sur toute la longueur L.

$$cf_L = \frac{1}{L}\int_0^L cf_x.dx = \frac{0.664}{L}\int_0^L \left(\frac{Vo.x}{\nu}\right)^{-1/4} dx \quad = 1.328.\mathrm{R}_{eL}^{-1/4} \text{ avec } \quad \mathrm{R}_{\mathrm{eL}} = \frac{\mathrm{vo}.L}{\nu}$$

Contrainte de cisaillement :
est définie par:

$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad = \frac{1}{2}\rho.\mathrm{Vo}^2.\mathrm{cf}$$

Epaisseur de la couche limite dynamique

Relation de Blasious

$$\delta(x) = \frac{4.96.x}{\left(\mathrm{Re}\,x\right)^{0.5}} \quad \text{pour } \quad x<xc \quad \text{(Laminaire)}$$

$$\delta(x) = \frac{0.381x}{\left(\mathrm{Re}\,x\right)^{0.2}} \quad \text{pour } \quad x>xc \quad \text{(turbulent)}$$

Epaisseur de la couche limite thermique

$$\delta_{th}(x) = \frac{4.53.x}{(\operatorname{Re} x)^{0.5}}.\operatorname{Pr}^{-1/3}$$ (Laminaire)

Relation entre l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique

1. cas des fluides non métaux (حالة الموائع غير المعدنية)

$$\frac{\delta_{th}(x)}{\delta(x)} = \frac{0.92}{(\operatorname{Pr})^{1/3}} \rightarrow \delta(x) \approx \delta_{th}(x) .\mathrm{pr}^{1/3}$$ avec $\operatorname{Pr} = \nu/\alpha$

Dans le cas, si $\operatorname{Pr} > 1 \rightarrow \delta > \delta_{th}$, l'effet de la viscosité cinématique ν est plus important que le coefficient de transfert de chaleur α ($\operatorname{Pr} = \nu/\alpha$)

1. cas des métaux liquides (حالة السوائل المعدنية)

les métaux liquides caractérisés par, $\operatorname{Pr}<0.05$, dans ce cas $\delta < \delta_{th}$

وهذا لان هدا النوع له ناقلية جيدة للحرارة وبالتالي فان التاثير الحراري α يكون اكبر من التأثير ألزوجي ν . حيث في هده الحالة :

$$\delta_{th}(x) = \sqrt{\frac{8\alpha x}{Vo}} \quad \text{avec } \alpha = \frac{\rho c_p}{k}$$

et $\delta(x) = \sqrt{3}.\operatorname{Pr}^{0.5}\,\delta_{th}(x)$

le nombre de Nusselt

$$Nux = 0.564.(\operatorname{Re} x.\operatorname{Pr})^{0.5}$$

b) Cas de la convection turbulente (Rec>10^5)

إن الانسياب على صفيحة مستويه بامكانه ان يكون مضطربا كليا انطلاقا من بداية الصفيحة x=0 وأيضا يمكن ان يكون صفائحي في البداية 0<x<xc ثم مضطربا عندما x>xc وهذا حسب شروط التجربة ..

L'écoulement sur une plaque plane peut être complètement turbulent au début de la plaque (x = 0) et peut également être laminaire au début 0 <x <xc puis turbulente lorsque x> xc et ceci selon les conditions de l'expérience ..

- Ecoulement complètement turbulent

Coefficient de frottement

$$cf_x = 0.59\left(\mathrm{Re}\,x\right)^{-0.2} \quad \text{avec: } \mathrm{R}_x = \frac{Vo.x}{\nu}$$

- dans le cas d'un écoulement laminaire et turbulent

$$cf1_x = 0.664\left(\mathrm{Re}\,x\right)^{-1/4}$$ laminaire pour $0 < x < xc$

$$cf2_x = 0.59\left(\mathrm{Re}\,x\right)^{-0.2}$$ turbulent pour $x > xc$

le coefficient de frottement moyen cf_L est:

$$cf_L = \frac{1}{L}\int_0^L cf_{1x}.dx + \frac{1}{L}\int_0^L cf_{2x}.dx$$

Épaisseur de la couche limite

- Ecoulement complètement turbulent

$$\frac{\delta(x)}{x} = 0.381\,\mathrm{Re}\,x^{-0.2}$$

Écoulement laminaire et turbulent

$$\frac{\delta(x)}{x} = 0.381\,\mathrm{Re}\,x^{-0.2} - \frac{10.25}{\mathrm{Re}\,x} \quad \text{pour:} \quad \mathrm{Rec} \le \mathrm{Rex} \le 10^7$$

Nombre de Nusselt

- Ecoulement complètement turbulent

$$Nux = 0.029\,\mathrm{Re}\,x^{0.8}.\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$
$$pour \quad 0.5 \le \mathrm{Pr} \le 50 \quad \text{et} \quad \mathrm{Rec} \le \mathrm{Rex} \le 10^7$$