Université de M'sila

Faculté de : Technologie **Socle commun**

Série de TD N° 02

Exercice 01 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *on donne le vecteur* $\vec{A}$ *tel que :* $\vec{A} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$

1°/ *Ecrire le vecteur unitaire* $\vec{u}_A$ *(vecteur unitaire de* $\vec{A}$*) dans la base* $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On prend ce vecteur unitaire $\vec{u}_A$ *comme un vecteur de la base polaire,* $\vec{u}_A = \vec{u}_\rho$

2°/ *Donner l'expression du second vecteur* $\vec{u}_\theta$ *de cette base.*

3°/ *Ecrire le vecteur* $\vec{A}$ *dans la base polaire.*

On donne le vecteur $\vec{B} = \rho\vec{u}_\rho + \sin\theta\vec{u}_\theta$

4°/ *Donner l'expression de* $\vec{B}$ *dans la base cartésienne*

Exercice 02 :

On donne le vecteur $\vec{A} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

1°/ *Donner les coordonnées sphériques de* $\vec{A}$?

2°/ Ecrire *les expressions de la base sphérique* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, *dans la base cartésienne*

3°/ *Refaire la même chose pour le vecteur* $\vec{A}$ *dans la base cylindrique* $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

Exercice 03 :

Dans une base orthonormée on donne :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t) + 1 \\ y(t) = \cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t) + 1 \\ z(t) = 1 - 2\cos(2t) \end{cases}$$

1°/ *Que représente l'équation* $x + y + z$?

2°/ *Que représente l'équation* $x^2 + y^2 + z^2$?

3°/ *Donner la valeur de '* r *' ainsi que celles de '* θ *' et '* φ *' pour la valeur de '* $t = \frac{\pi}{4}$ *'*

L. Laïssaoui

Exercice 04 **:**

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, le point* $\boldsymbol{M(x, y)}$ *décrit une courbe donnée par les équations paramétriques suivantes* : $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = (1 + cos(\omega t))} \\ \boldsymbol{y(t) = sin(\omega t)} \end{cases}$ $\boldsymbol{\omega}$ *est une constante positive*

1°/ *Donner l'expression de de la trajectoire dans la base cartésienne. Représenter la.*

2°/ *Représenter sur cette courbe les points* $\boldsymbol{M_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ *et* $\boldsymbol{M_2(1;1)}$ *ainsi que la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$*.*

3°/ *Donner l'expression de cette trajectoire dans la base polaire* $(\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}})$**.**

Représenter $\boldsymbol{\theta}$ *et* $\boldsymbol{\omega t}$*, pour un point quelconque de la trajectoire.*

4°/ *Que vaut les coordonnées* $\boldsymbol{\rho}$ *et* $\boldsymbol{\theta}$ *pour* $\boldsymbol{M_1}$ *et* $\boldsymbol{M_2}$ **?** *représenter* $(\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}})$ *pour ces points.*

5°/ *Calculer la distance* $\Delta \boldsymbol{S} = \overset{\frown}{\boldsymbol{M_1M_2}}$ *entre les deux points.*

6°/ $(\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{N}})$ *représente la base intrinsèque, représenter la aux points* $\boldsymbol{M_1}$ *et* $\boldsymbol{M_2}$**.**

Exercice 05 **:**

Soient les équations paramétriques du mouvement du point $\boldsymbol{M}$ *données par*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2p}t^2} \\ \boldsymbol{y(t) = t} \end{cases} \quad \boldsymbol{p} \text{ est une constante positive.}$$

1°/ *Donner l'équation de la trajectoire et représenter-la.*

2°/ *Déterminer le vecteur vitesse et son module pour* $\boldsymbol{t = p}$.

3°/ *Déterminer le vecteur accélération et son module.*

4°/ *Déterminer les composantes de l'accélération dans la base intrinsèque.*

4°/ *Déterminer le rayon de courbure pour* $\boldsymbol{t = p}$.

Exercice 06 *:* (***Supplémentaire***)

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*,on donne les équations paramétriques du mouvement du point* $\boldsymbol{M(x, y, z)}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = acos(\omega t)} \\ \boldsymbol{y(t) = asin(\omega t)} \\ \boldsymbol{z(t) = bt} \end{cases} \quad \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{\omega} \text{ sont des constantes positives.}$$

1°/ *Quelle est la nature de la trajectoire décrite par le point* $\boldsymbol{M}$**.**

2°/ *Donner les coordonnées cylindriques du point* $\boldsymbol{M}$**.**

3°/ *Représenter la base cylindrique au point* $\boldsymbol{M}$**.**

4°/ *Donner l'expression du pas de l'hélice. Quelle est la distance parcourue pour ce pas ?*

L. Laïssaoui

Exercice 07 : (***Supplémentaire***)

Dans une base orthonormée$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *le mouvement du point* M *est donné par les équations paramétriques suivantes :*

$$\begin{cases} x(t) = ae^{-kt}cos(kt) \\ y(t) = ae^{-kt}sin(kt) \end{cases}$$ a *et* ω *sont des constantes positives.*

1°/ *Donner les expressions des coordonnées polaires* $\rho(t)$ *et* $\theta(t)$.

2°/ *Donner l'expression de l'équation de la trajectoire en coordonnées polaire. Représenter la.*

3°/ *Donner les expressions des composantes des vecteur vitesse et accélération ainsi que leurs modules.*

4°/ *Donner l'expression de l'angles* α *entre le vecteur vitesse et le vecteur position* $\overrightarrow{OM}$ *ainsi que l'angle* β *entre le vecteur position* $\overrightarrow{OM}$ *et le vecteur accélération*

5°/ *Représenter sur la courbe le vecteurs vitesse et accélération ainsi que la base polaire.*

6°/ *Déterminer l'expression du rayon de courbure.*

L. Laïssaoui

Corrigé de la série de TD 02 — 2020/2021

• Exercice : 01 :

I. 1°/ Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le vecteur $\vec{A}$ est donné par.

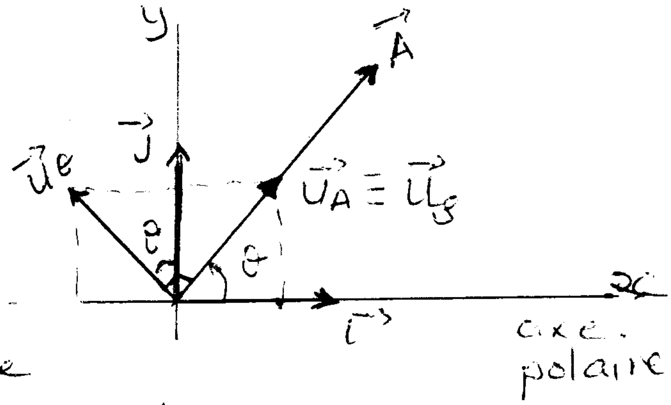
$$\vec{A} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$$

Le vecteur $\vec{A}$ s'écrit aussi : $\vec{A} = |\vec{A}|\,\vec{u}_A$: $\begin{cases} |\vec{A}| : \text{module} \\ |\vec{u}_A| : \text{vecteur unitaire (direction)} \end{cases}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow \vec{A} = 2\vec{u}_A$$

$$\Rightarrow \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j} = 2\,\vec{u}_A \Rightarrow \boxed{\vec{u}_A = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}}$$

II 2°/ $\vec{u}_A \equiv \vec{u}_\rho$



Si on prend $\vec{ox}$: comme axe polaire, alors ~~[illegible]~~

θ angle entre $\vec{i}$ et $\vec{u}_\rho$

$\vec{u}_\rho$: vecteur unitaire de la base polaire s'écrit dans la base cartesienne :

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \equiv \vec{u}_A = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

puisque $\vec{u}_\theta$ est le second vecteur unitaire de la base polaire, il est perpendiculaire à $\vec{u}_\rho$ (dans le sens horaire)

$$\Rightarrow \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} = 5\pi/6$$

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta')\,\vec{i} + \sin\theta'\,\vec{j} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

3°/ Dans la base polaire : $\vec{A} = A_\rho\,\vec{u}_\rho + A_\theta\,\vec{u}_\theta$

puisque $\vec{u}_\rho \equiv \vec{u}_A \Rightarrow \vec{A} = |\vec{A}|\,\vec{u}_A = 2\vec{u}_A = 2\vec{u}_\rho$

$$\Rightarrow A_\rho\,\vec{u}_\rho + A_\theta\,\vec{u}_\theta = 2\vec{u}_\rho \Rightarrow \begin{cases} A_\rho = 2 \\ A_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\vec{A} = 2\vec{u}_\rho$$

Ou bien puisque $\vec{A}$ est suivant $\vec{u}_\rho \Rightarrow A_\theta = 0 \quad A_\rho = |A|$

III 4°/ $\vec{B} = \rho \vec{u}_\rho + \sin\theta \, \vec{u}_\theta$

la relation entre la base polaire et cartésienne est :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \cos\theta \, \vec{i} - \sin\theta \, \vec{j} \\ \vec{j} = \sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \rho(\cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}) + \sin\theta(-\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j})$$

$$\vec{B} = \rho\cos\theta \, \vec{i} + \rho\sin\theta \, \vec{j} - \sin^2\theta \, \vec{i} + \sin\theta\cos\theta \, \vec{j} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$$

$$\vec{B} = (\rho\cos\theta - \sin^2\theta)\vec{i} + (\rho\sin\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_x = \rho\cos\theta - \sin^2\theta \\ B_y = \rho\sin\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

- **Exercice: 02** : $\vec{A}$ dans la base cartesienne :

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

la relation qui existe entre les coordonnées de la base cartésienne et la base sphérique (r, θ, φ) est :

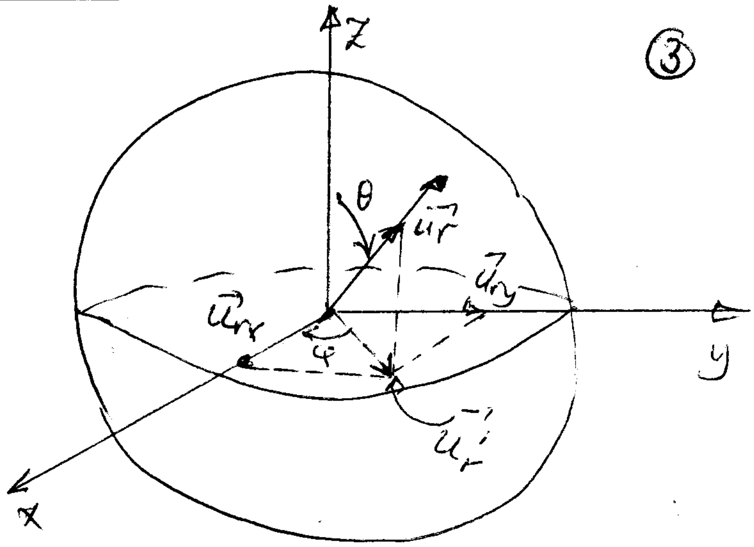
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \operatorname{artg}(y/x) \\ z = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

on a : $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \\ \varphi = \operatorname{artg}(2/3) \Rightarrow \varphi = 33{,}7^\circ \\ \theta = \operatorname{artg}\left[\frac{1}{\sqrt{14}}\right] \Rightarrow \theta = 74{,}5^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r = \sqrt{14} \\ \theta = 33{,}7^\circ \\ \varphi = 74{,}5^\circ \end{pmatrix}$$

2°/ la Projection de $\vec{u_r}$ sur le plan xoy donne



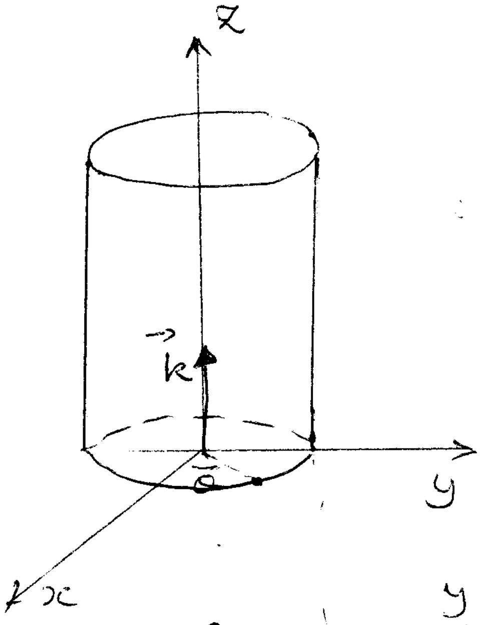
$|\vec{u}_r'| = |\vec{u}_r| \sin\theta$

la projection sur Ox → $\vec{u}_{rx}$

la projection sur oy → $\vec{u}_{ry}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta . \cos\varphi \, \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \, \vec{j} + \cos\theta \, \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \, \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \, \vec{j} - \sin\theta \, \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = - \sin\varphi \, \vec{i} + \cos\varphi \, \vec{j} \end{cases}$$

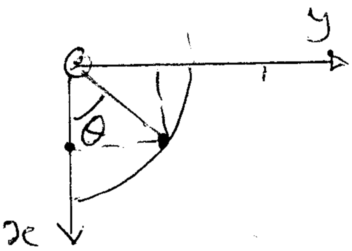
– 3°/ Coordonnées cylindriques



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ r = y \sin\theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{artg}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \\ \theta = \operatorname{arctg}(2/3) \Rightarrow \theta = 33{,}7° \\ z = z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \begin{pmatrix} \sqrt{13} \\ 33{,}7° \\ 1 \end{pmatrix}$$



* **Exercice: 03** on donne les coordonnées du point mobile :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t + \sqrt{3}\sin 2t + 1 \\ y(t) = \cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t + 1 \\ z(t) = 1 - \cos 2t \end{cases}$$

1°/ $x + y + z = (\cos 2t + \sqrt{3}\sin 2t + 1) + (\cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t + 1) + (1 - \cos 2t)$

$x + y + z = 3$ Equation d'un plan dont le vecteur normal est $\vec{n}(1,1,1)$

Car l'équation de la droite est donnée dans le cas générale par l'équation : $ax+by+cz=d$ ou la normale a pour composante $\vec{n}\,(a,b,c)$

2°/ $x^2+y^2+z^2 = (\cos 2t+\sqrt{3}\sin 2t+1)^2+(\cos 2t-\sqrt{3}\sin 2t+1)^2+(1-\cos 2t)^2$

$$x^2+y^2+z^2 = \cos^2 2t+3\sin^2 2t+1+2\sqrt{3}\cos 2t\sin 2t+2\cos 2t+2\sqrt{3}\sin 2t$$
$$+\cos^2 2t+3\sin^2 2t+1-2\sqrt{3}\cos 2t\sin 2t+2\cos 2t-2\sqrt{3}\sin 2t$$
$$+1+4\cos^2 2t-4\cos 2t$$

$$x^2+y^2+z^2 = 6\cos^2 2t+6\sin^2 2t+3 = 6\underbrace{(\cos^2 2t+\sin^2 2t)}_{1}+3$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=9}$$ Equation ~~de la~~ d'une sphère de centre $c\,(0,0,0)$ de rayon $R=9$

3°/ on a, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3$, $t=\pi/2$ $\sin 2t=1$ $\cos 2t=0$

$$\varphi = \operatorname{artg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{artg}\left(1-\sqrt{3}/1+\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{\varphi = -15° = -\pi/12}$$

$$\theta = \arccos(z/r) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 54{,}73°}$$

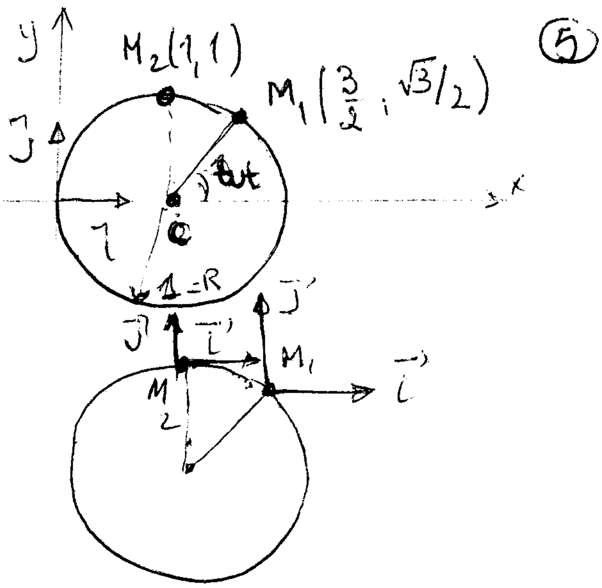
- <u>Exercice 04</u>

Dans le plan $\begin{cases} x = 1+\cos\omega t \\ y = \sin\omega t \end{cases}$ $\omega>0$

1°/ $\begin{cases} x-1 = \cos\omega t \\ y = \sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \cos^2\omega t \\ y^2 = \sin^2\omega t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = \underbrace{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}_{1}$

$$\Rightarrow \boxed{(x-1)^2+y^2=1}$$ C'est un cercle de centre $c(1,0)$ et de rayon $R=1$

Cercle de rayon
$R = 1$
et de centre $C(1,0)$



2°/

3°/ Dans la base polaire $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$
la relation qui existe entre les coordonnées polaires et cartésiennes est : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$

$\Rightarrow \rho = \sqrt{(1+\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2} = \sqrt{1 + 2\cos\omega t + \underbrace{\cos^2\omega t + \sin^2 t}_{1}}$

$\rho = \sqrt{2 + 2\cos\omega t} = \sqrt{2(1+\cos\omega t)}$

Sachant que : $1 + \cos\omega t = 2\cos^2\frac{\omega t}{2}$

$\Rightarrow \rho = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\omega t}{2}} = 2\cos\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \boxed{\rho = 2\cos(\omega t/2)}$

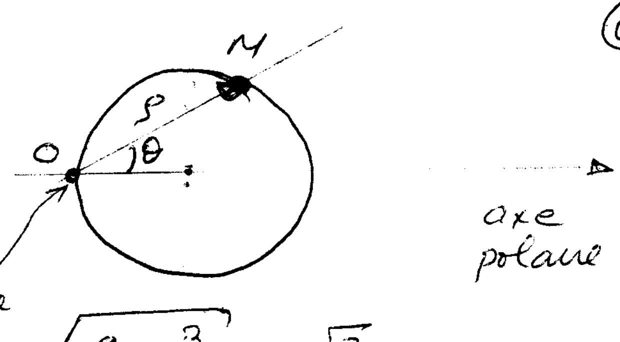
- $\theta = \arctan(y/x) = \arctan\left[\frac{\sin\omega t}{1+\cos\omega t}\right]$ or $\sin\omega t = 2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}$
$1 + \cos\omega t = 2\cos^2\frac{\omega t}{2}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{2\sin\frac{\omega t}{2}\cdot\cos\frac{\omega t}{2}}{2\cos^2\frac{\omega t}{2}}\right) = \arctan\left(\tan\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{\omega t}{2}$

$\theta(t) = \omega t/2$ $\Rightarrow M(\rho, \theta) \begin{cases} \rho = 2\cos\frac{\omega t}{2} \\ \theta = \frac{\omega t}{2} \end{cases}$

trajectoire : $\boxed{\rho = 2\cos\frac{\omega t}{2} = 2\cos\theta}$

$\boxed{\rho(\theta) = 2\cos\theta}$ Equation de la trajectoire en coordonnées polaire



4°/

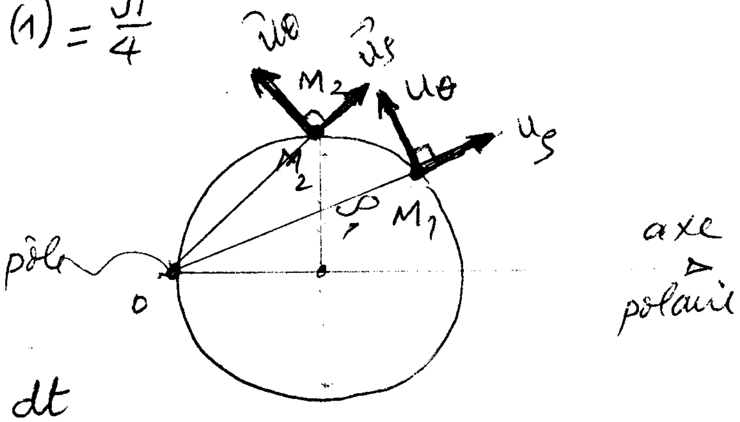
$$M_1\begin{pmatrix}3/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \Rightarrow \rho_1=\sqrt{x_{M_1}^2+y_{M_1}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y_{M_1}}{x_{M_1}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/2}{3/2}\right) \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$$

$$M_1\begin{pmatrix}\rho_1=\sqrt{3}\\ \theta_1=\pi/6\end{pmatrix}$$

$$M_2(1,1)\Rightarrow \rho_2=\sqrt{x_{M_2}^2+y_{M_2}^2}=\sqrt{2} \Rightarrow M_2\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi/4\end{pmatrix}$$

$$\theta_2=\arctan\left(\frac{y_{M_2}}{x_{M_2}}\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$



5°/ $\widehat{M_1M_2}=\Delta S$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ou bien $v=\frac{ds}{dt} \Rightarrow ds=v\,dt$

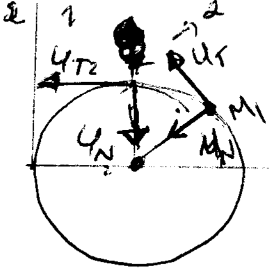
$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ or $\begin{cases}\dot{x}=-\omega\sin\omega t\\ \dot{y}=\omega\cos\omega t\end{cases}$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\omega^2\sin^2\omega t+\omega^2\cos^2\omega t}=\omega=2\frac{d\theta}{dt} \quad \text{car } \theta=\frac{\omega t}{2}$$

$$ds=v\,dt=\omega\,dt=2\,d\theta$$

$$\Rightarrow \Delta S=\int_{s_1}^{s_2}ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2}2\,d\theta = 2\theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \Rightarrow \Delta S=S_2-S_1=2(\theta_2-\theta_1)$$

or $\theta_1=\pi/6$, $\theta_2=\pi/4$ $\Rightarrow \boxed{\Delta S=\widehat{M_1M_2}=\frac{\pi}{6}}$

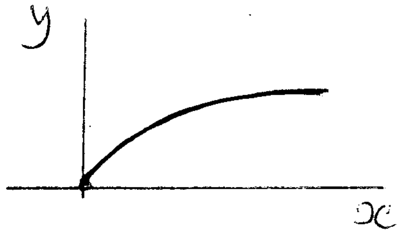


• Exercice 05 $\quad M: \begin{cases} x(t) = t^2/2p \\ y(t) = t \end{cases} \quad p>0$

1°/ $y = t \Rightarrow x = \dfrac{t^2}{2p} = \dfrac{y^2}{2p} \Rightarrow y(x) = \sqrt{2px}$ parabole

$t>0 \Rightarrow x>0 \quad (t=0 \Rightarrow x=0)$

$y>0 \quad (t=0 \Rightarrow y=0)$



$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$\vec{OM} \begin{cases} x = t^2/2p \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = t/p \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \quad |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dfrac{1}{p}\sqrt{t^2+p^2}$

pour $t = p \Rightarrow v = \sqrt{2}$ m/s

3°/ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = a_x = \dfrac{1}{p}\vec{i} \\ \ddot{y} = a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}| = \dfrac{1}{p} \quad \forall t$

4°/ on a : $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = a_N\vec{u}_N + a_T\vec{u}_T$

$(\vec{i}, \vec{j})$ base cartesienne

$(\vec{u}_N, \vec{u}_T)$: base intrinsèque $\quad a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$

R : rayon de courbure $\quad a_N = v^2/R$

$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \dfrac{1}{p^2} = a_T^2 + a_N^2 \quad a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sqrt{t^2+p^2}}{p}\right) = \dfrac{1}{p}\dfrac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}$

$\dfrac{1}{p^2} = a_N^2 + \dfrac{1}{p^2}\dfrac{1}{t^2+p^2} \Rightarrow a_N^2 = \dfrac{1}{p^2}\left(1 - \dfrac{t^2}{t^2+p^2}\right) = \dfrac{1}{t^2+p^2}$

$a_N = 1/\sqrt{t^2+p^2} = v^2/R \quad \Rightarrow R = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{1/p^2\,(t^2+p^2)}{1/\sqrt{t^2+p^2}}$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{p^2}(t^2+p^2)^{3/2}$

$t = p \Rightarrow R = 2\sqrt{2}p$