TP n°2 : Introduction à la méthode des différences finies

1. But du TP

Initiation à la méthode des différences finies pour résoudre les problèmes en hydrauliques.
Transcription sous forme d'un programme du problème résolu en utilisant MATLAB

2. Introduction à la méthode des différences finies

Dans le domaine de l'analyse numérique, on peut être amené à rechercher la solution d'une équation aux dérivées partielles. Parmi les méthodes de résolution on utilise la méthode des différences finis pour approximer les opérateurs décrits par le modèle mathématique (Modélisation).
Grace aux formules de Taylor, on définit la discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, …).

Supposons que la dérivées de la fonction $y = f(x)$ existent jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre inclus dans un certain voisinage du point x=a,

$f(x) = f(a)+ f'(a)\,(x-a)/1!+ f''(a)\,(x-a)^2/2!+\ldots+ f^{(n)}(a)\,(x-a)^n/n!+R_n(x)$

Ainsi la formule de Taylor permet de remplacer la fonction $Y = f(x)$ par le polynôme

$Y=P_n(x)= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

avec un degré de précision égal au reste $R_n(x)$

La méthode d'approximation de la solution d'une EDP par différences finies consiste à approcher la valeur de la solution en un nombre fini de points, appelées points de discrétisation du maillage.
Approximations des dérivées d'une fonction régulière.
Plaçons-nous en dimension 1 pour simplifier. L'idée fondamentale consiste à approcher les dérivées (ou les dérivées partielles en dimension plus grande) de la fonction *u* en un point *x* en écrivant

$$\frac{du}{dt}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

pour un *h* petit (mais non nul) fixé. Il suffira ensuite de disposer les points de discrétisation régulièrement espacées de *h* pour pouvoir employer cette approximation en tout point de discrétisation.
La qualité de l'approximation précédente dépend fortement de la régularité de la fonction *u*. Si la fonction *u* est C^2 sur l'intervalle [0; 1], on déduit aisément du développement de Taylor

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\theta)$$

Il est possible d'obtenir une meilleure approximation de la dérivée première d'une fonction en utilisant un quotient différentiel centré : si la fonction *u* est C^3, la formule de Taylor à l'ordre 3 donne :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\theta_1),$$
$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(\theta_2),$$

où $\theta_1 \in]x, x+h[$ et $\theta_2 \in]x-h, x[$.

L'approximation

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

En ce qui concerne les dérivées secondes, on démontre facilement en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 4, que si u est C^4 au voisinage de x, l'approximation

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

3. Programmation (différence finie du premier ordre)

On considère le modèle mathématique d'un système physique suivant :

$$u'(x) = x^2 u(x), \quad x \in [0,2]$$
$$u(0) = a, \quad a \text{ constant apartient à } R$$

1) Ecrire les deux schémas obtenus par la méthode des différences finies pour ce problème en utilisant une subdivision uniforme ($x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 2$) de (n+1) points de l'intervalle [0, 2] de pas h= 1/n et la formule d'approximation :

   a) $u'(x) \approx \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$

   b) $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$

2) Déduire le système linéaire AU=B d'inconnue U($u_1, u_{1,\ldots,} u_n$) et A la matrice carrée pour les deux schémas obtenus

3) Ecrire sous MATLAB le programme qui résout ce problème pour les deux cas d'approximation de la dérivée première, en utilisant le schéma d'ordre 1 dit arrière et le schéma d'ordre 1 dit centrée.