

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Sciences et Technologies

Licence ST LMD (1^{ère} année) + Énergies renouvelables

Séries d'exercices (Travaux dirigés)

Mathématiques 02

Année universitaires : 2021 - 2022

Série d'exercices N°1

Exercice 01(*)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} : \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer, s'il est possible, $C + D$; $C + B$; $2C - 3D$; $B \times A$; $A \times B$; $B \times C$; $C \times B$.

Exercice 02(*) (Examen 2018-2019 Univ-M'sila)

Soient A et B deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcule : $A \times B$.
2. Est-ce que B est inversible?
3. Montrer que A est inversible, puis calculer A^{-1} .
4. En utilisant la matrice inverse, résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 8 \\ -2x + y - z = 2 \end{cases}$$

Exercice 03 (Examen 2016-2017 Univ-M'sila)

Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. En utilisant la matrice inverse, résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ -x + 2y + z = -1 \\ x + 4z = -2 \end{cases}$$

Exercice 04 (Examen 2013-2014 Univ-A.MIRA de Béjaia)

Soit la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Dédurre la solution du système linéaire suivant

$$\begin{cases} -2x + z = 1 \\ -6x + 2y = 1 \\ 6x - y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 05(*) (Examen 2014-2015 Univ-A.MIRA de Béjaia)

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1. Calcule le déterminant de M .
2. Dédurre les valeurs de α pour que M soit inversible et calculer dans ce cas M^{-1} .
3. Posons $\alpha = 0$, en utilisant la matrice inverse, résoudre le système suivant:

$$MX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Exercice 06 (Examen 2010-2011 Univ-A.MIRA de Béjaia)

Soient A , B et C trois matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1. Donner la matrice $D = A \times B$, puis donner D^{-1}
2. Calculer le déterminant de C .
3. Soit $P(\alpha) = \alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha - 16$. Calculer $P(2)$.
4. Pour quelles valeurs de α , C soit inversible ?

Série d'exercices N°2



Fonctions primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.



Résumé: primitives des fonctions usuelles

la fonction f	Les fonctions primitives de f
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$x \mapsto g'(x) \times g(x)^n$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}g(x)^{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{g'(x)'}{g(x)}$	$x \mapsto \ln g(x) + c$
$x \mapsto \frac{g'(x)'}{g(x)^n}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)g(x)^{n-1}} + c$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + c$
$x \mapsto e^{ax+b}$	$x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
$x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$	$x \mapsto e^{g(x)} + c$
$x \mapsto \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \mapsto \sqrt{g(x)} + c$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c$
$x \mapsto \frac{1}{a+x^2}, a > 0$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c$
$x \mapsto \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$	$x \mapsto \arctan(g(x)) + c$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c$
$x \mapsto \cos(ax+b), a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c$
$x \mapsto \sin(ax+b), a \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto -\frac{1}{\tan(x)} + c = -\cotg(x) + c, \cotg(x) = \frac{1}{\tan(x)}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x) + c$
$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arccos(x) + c$
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + c$
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x) + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Argsh}(x) + c$

Exercice 01 (*)

Montrer que F est une primitive de la fonction f dans les cas suivants:

1. $F(x) = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ et $f(x) = \arcsin(x)$.
2. $F(x) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ et $f(x) = \arctan(x)$.

Intégrale indéfinies, Intégrale définies

★ Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x) \forall x \in I$ dans ce cas on pose

$$\int f(x)dx = F(x) + c \in \mathbb{R}$$

★ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , l'intégrale de f sur $[a, b]$ est le nombre réel

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Exercice 02 (*)

Calculer les intégrales suivantes

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\int \frac{xe^x + e^x}{xe^x + 1} dx$ | 6. $\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)^2} dx$ | 11. (*) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx$. |
| 2. $\int \frac{1 + \ln(x)}{1 + x \ln(x)} dx$. | 7. $\int \tan(x) dx$ | 12. $\int e^{3x+2} dx$. |
| 3. $\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 8. $\int \frac{1}{\tan(x)} dx$ | 13. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx$. |
| 4. $\int 2x(x^2 + 3)^5 dx$. | 9. $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2} dx$ | 14. $\int_0^\pi \cos(nx) dx$. |
| 5. $\int \frac{(\ln(x))^n}{x} dx, n > 1$. | 10. $\int \cos(x) \sin^3 x dx$. | |

Exercice 03

Calculer les intégrales suivantes

- | | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\int \frac{1 - \cos(x)}{x - \sin(x)} dx$. | 3. $\int \cos^3(x) \sin(x) dx$. | 5. $\int e^{-x+2} dx$. | 7. $\int_0^\pi \cos(nx) dx$. |
| 2. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$. | 4. $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$ | 6. $\int \sin(2x)e^{\cos(2x)} dx$. | 8. $\int_{-2}^3 x-1 dx$ |



Intégration par changement de variable

Soit F une primitive de f et g une fonction dérivable. Alors la fonction $x \mapsto g'(x)f[g(x)]$ est intégrable et l'on a

$$\int g'(x)f[g(x)] dx = F[g(x)] + c$$

Autrement dit, en posant $t = g(x)$ on obtient $\frac{dt}{dx} = g'(x)$, soit encore $dt = g'(x)dx$ et donc

$$\int g'(x)f[g(x)] dx = \int f(t)dt = F(t) + c = F[g(x)] + c$$



Exercice 04 (*)

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx.$

2. $\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - (\ln(x))^2}} dx.$

3. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx.$



Intégration par partie

★ Soient u et v deux fonctions, de classe C^1 . Alors

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

★ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient u et v deux fonctions définies sur $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$



Exercice 05 (*)

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int (2x + 1)e^{-2x} dx.$

3. $\int x \cos(5x) dx.$

5. $\int \sqrt{x^2 + 1} dx.$

2. $\int_0^\pi x \sin(nx) dx .$

4. $\int \arcsin(x) dx.$



Exercice 06

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int x e^{-x} dx$

3. $\int x \ln(x) dx.$

5. $\int \arctan(x) dx.$

2. $\int_0^\pi x \sin(2x) dx$

4. $\int \cos(x) e^x dx.$

Exercice 07: Primitives des fonctions rationnelles

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int \frac{3x-5}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$4. \int \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx.$$

$$8. \int \frac{3x+2}{(x-1)^2(x+5)} dx$$

$$2. \int \frac{1}{x^2-4} dx.$$

$$5. \int \frac{3}{(x^2-1)(x^2-4)} dx.$$

$$9. \int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+1)} dx$$

$$3. \int \frac{1}{x^2+5} dx.$$

$$6. \int \frac{x+2}{x^2-6x+9} dx.$$

$$10. \int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)} dx.$$

$$7. \int \frac{x}{x^2+x+1} dx.$$

Exercice 08 (*): Primitives des fonctions rationnelles

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int \frac{3}{(x-2)(x-5)} dx$$

$$4. \int \frac{x+2}{x^2-10x+25} dx.$$

$$7. \int \frac{x+1}{(x-2)^2(x+5)} dx$$

$$2. \int \frac{3}{x(x^2-4)} dx$$

$$5. \int \frac{1}{x^2+3} dx.$$

$$8. \int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

$$3. \int \frac{x+2}{x^2-5x+6} dx.$$

$$6. \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx.$$

$$9. \int \frac{x^3}{(x^2-3x+2)} dx.$$

Exercice 09 (*): Intégrale des fonctions exponentielles

$$1. \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} dx$$

$$2. \int (x^2-3x+1)e^{-x} dx$$

$$3. \int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} dx$$

Primitives de la forme $\int \sin(x)^p \cos(x)^q dx$

- Si p est impair, on peut poser $t = \cos x$
- Si q est impair, on peut poser $t = \sin x$
- Si p et q sont impairs, on peut poser $t = \cos x$ ou $t = \sin x$ ou $t = \cos 2x$.
- Si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis intégrer.

Exercice 10 (*)

Calculer les intégrales suivantes

$$1. I_1 = \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$$

$$3. I_3 = \int \sin^3(x) \cos(x) dx$$

$$2. I_2 = \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$$

$$4. I_4 = \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

Primitives de la forme $\int \cos(px) \cos(qx) dx$, $\int \sin(px) \sin(qx) dx$,
 $\int \cos(px) \sin(qx) dx, p, q \in \mathbb{Z}$

On transforme les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

- $\sin(p) \cos(q) = \frac{1}{2} (\sin(p+q) + \sin(p-q))$
- $\sin(p) \sin(q) = \frac{1}{2} (\cos(p-q) - \cos(p+q))$
- $\cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} (\cos(p+q) + \cos(p-q))$

Exercice 11 (*)

Calculer l'intégrale

1. $I_1 = \int \sin(2x) \cos(3x) dx$

Primitives de la forme $\int \frac{P(\cos(x), \sin(x))}{Q(\cos(x), \sin(x))} dx$

Soient P et Q sont des polynômes. Il existe deux méthodes pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \frac{P(\cos(x), \sin(x))}{Q(\cos(x), \sin(x))} dx$$

Méthode 01: les règles de Bioche

les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours On note $\omega(x) = f(x) dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

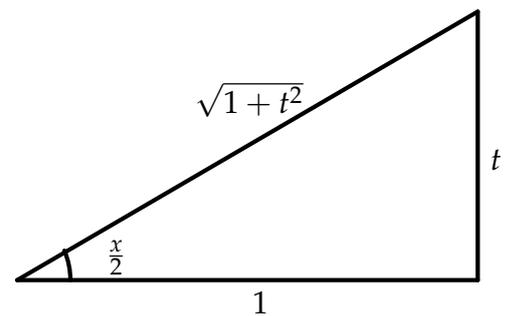
Méthode 02: le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on trouve

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$



Exercice 12 (*)

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int \frac{1}{\sin x} dx.$

3. $\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sin(x) + 1} dx.$

5. $\int \frac{1}{2 + \cos(x)} dx$

2. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos(x)} dx.$

4. $\int \frac{1}{\sin x} dx$

