جامعة محمد بوضياف المسيلة | **السنة الأولى إدارة أعمال وإنجليزية**

مقياس: الاقتصاد الجزئي 01 | **السلسلة 02** | **السنة الجامعية: 2025/2024**

أسئلة: أجـــب على ما يلي:

1- أذكر أهم الافتراضات (*Assumptions*) التي اعتمدها منهج المنفعة الترتيبية في تحليل سلوك المستهلك.

2- عرف منحنى السواء *IndifferenceCurve* وأذكر خصائصه.

3- عرف المعدل الحدي للإحلال Marginal Rate of Substitution، ثم اشرح لماذا تتناقص قيمته بالانتقال إلى اليمين على منحنى السواء.

4- اشرح الأشكال الخاصة لخرائط السواء.

تمرين 01: أجب على ما يلي:

1- أثبت صحة العلاقة التالية، وأعطي مدلولها الاقتصادي:

$$MRS_{x,y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

2- أعطي المدلول الاقتصادي للصيغة الرياضية التالية:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

تمرين 02: لنعتبر التركيبات (التوليفات) السلعية التالية:

$$a = (X_a,\ Y_a) \quad b = (X_b,\ Y_b) \quad c = (X_c,\ Y_c)$$

حيث تقع التركيبات الثلاث على خط دخل واحد.

1- ما هي الميزة المشتركة بين هذه التركيبات؟

2- بافتراض أن التركيبتين a و c تقعان على خط دخل واحد وعلى منحنى السواء U_1:

أ- أرسم شكل بياني يظهر: $X_c>X_a$ و $Y_a>Y_c$، ثم اشرح سبب تناقص قيمة المعدل الحدي للإحلال $MRS_{x,y}$.

ب- بافتراض أن: $a = (X_a=3,\ Y_a=9)$ و $c = (X_c=6,\ Y_c=2)$ و $R = 480$، أحسب قيمتي السعرين P_x و P_y.

3- لو افترضنا أن التركيبة b تقع على منحنى السواء U_2، كم تكون قيمة $MRS_{x,y}$ حتى تكون b تركيبة توازن؟.

تمرين 03: لتكن دالة المنفعة لمستهلك ما كالتالي:

$$U = A\, x^{\alpha} y^{\beta}$$

1- عرف ثوابت الدالة، ثم برهن على ذلك رياضيا.

2- أحسب قيمة المعدل الحدي للإحلال ($MRS_{x,y}$).

3- حدد معادلتي طلب المستهلك على السلعتين x و y، علما بأن P_x سعر الوحدة من x، P_y سعر الوحدة من y و R دخل المستهلك.

4- بافتراض أن: $\alpha = \frac{1}{3}\beta$، $\alpha+\beta=1$، $A= 27$، $P_x=P_y = 5$ و $R=3000$:

أ- أوجد تركيبة التوازن من x و y، وأحسب أعظم منفعة يحققها هذا المستهلك، ثم أحسب قيمة المضاعف المستخدم وأعطي دلالته الاقتصادية.

ب- بافتراض زيادة السعر P_x بنسبة 20%، أوجد تركيبة التوازن الجديدة، ثم اشتق منحنى طلب المستهلك على السلعة x.

ج- إذا افترضنا أن منفعة المستهلك ثابتة بـ $U_o = 9396$:

- أوجد معادلة السواء للمستهلك.
- أحسب أدنى إنفاق E على السلعتين x و y.
- أحسب قيمة المضاعف المستخدم، وأعطي دلالته الاقتصادية.

***Questions**:* Answer the following questions:
1. Mention the most important assumptions adopted by the Ordinal Utility Approach in analyzing consumer behavior.
2. Define the indifference curve and mention its characteristics.
3. Define the marginal rate of substitution, and explain why its value decreases by moving to the right on the indifference curve.
4. Explain the special forms of indifference maps.

Exercise 01: Anwser the following questions:

1. Prove the validity of the following relationship, and give its economic significance:

$$MRS_{x,y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

2. Give the economic significance of the following mathematical formula:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

Exercise 02: Let us consider the following commodity combinations:

$$a = (X_a, Y_a) \quad b = (X_b, Y_b) \quad c = (X_c, Y_c)$$

Where the three combinations lie on the same income budget line.

1. What is the common feature between these combinations?
2. Assuming that combinations a and c lie on the same income line and on the indifference curve U_1:
A. Draw a graph showing: Ya>Yc and Xc>Xa, then explain why the value of the marginal rate of substitution $MRS_{x,y}$ decreases.
B. Assuming that: a = (Xa=3, Ya=9) and c = (Xc=6, Yc=2) and R= 480, calculate the values of the prices P_x and P_y.
3. If we assume that combination b lies on the indifference curve U_2, what is the value of $MRS_{x,y}$ so that b is an equilibrium combination?

Exercise 03: The utility function of a consumer is as follows:

$$U = A\, x^{\alpha} y^{\beta}$$

1. Define the constant values of the function, then prove them mathematically.
2. Calculate the value of the marginal rate of substitution ($MRS_{x,y}$).
3. Determine the consumer demand equations for the two goods x and y, knowing that P_x is the unit price of x, P_y is the unit price of y and R is the consumer's income.
4. Assuming that: $\alpha=1/3\ \beta$, $\alpha+\beta=1$, A= 27, $P_x=P_y$ = 5 and R=3000:
A. Find the equilibrium combination of x and y, and calculate the greatest utility achieved by this consumer, then calculate the value of the multiplier used and give its economic significance.
B. Assuming an increase in price P_x by 20%, find the new equilibrium combination, then derive the consumer demand curve for good x.
C. Assuming that the consumer's utility is constant at U_o = 9396:
   - Find the indifference equation for the consumer.
   - Calculate the minimum expenditure E on goods x and y.
   - Calculate the value of the multiplier used, and give its economic significance.

حل السلسلة رقم 02

إجابة الأسئلة:

للإجابة على الأسئلة أنظر دروس المقياس- المحور الثاني – منهج المنفعة الترتيبية Ordinal Utility Approach.

حل تمرين01: أجب على ما يلي:

1- إثبات صحة العلاقة:

$$MRS_{x,y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

- نعلم أن دالة المنفعة تأخذ الشكل التالي: $U = f(x, y)$

- التغير في المنفعة يساوي: $\Delta U = \frac{\Delta U}{\Delta x}(\Delta x) + \frac{\Delta U}{\Delta y}(\Delta y)$

- على نفس منحنى السواء المنفعة لا تتغير، أي:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta x}(\Delta x) + \frac{\Delta U}{\Delta y}(\Delta y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta x}(\Delta x) = -\frac{\Delta U}{\Delta y}(\Delta y) \Rightarrow \frac{\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta U}{\Delta y}\right)} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boldsymbol{MRS_{x,y}}$$

- **المدلول الاقتصادي:** المعدل الحدي لإحلال y من أجل x يساوي إلى نسبة المنفعة الحدية لـــ x إلى المنفعة الحدية لـــ y، (ميل منحنى السواء بدلالة المنفعة الحدية). أي تساوي المعدل الذي يكون عنده المستهلك مستعدًا للتخلي عن وحدات من السلعة y للحصول على المزيد من السلعة x، وهو ما يؤدي إلى انخفاض المعدل الحدي للإحلال

2- المدلول الاقتصادي للصيغة الرياضية: $\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y}$

- تعبر الصيغة عن تساوي الحد الذي يكون عنده المستهلك مستعدًا للتخلي عن وحدات من السلعة y للحصول على المزيد من السلعة x، مع نسبة سعري السلعتين، كما تمثل الصيغة **الشرط الأول لتوازن المستهلك**.

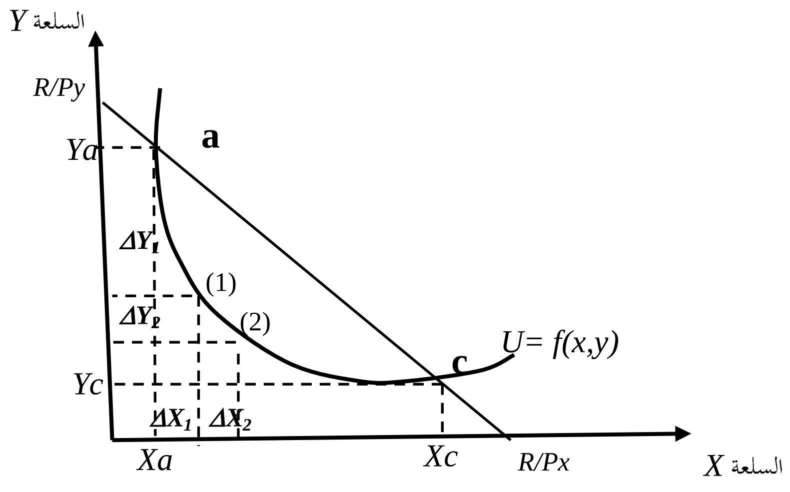
حل تمرين 02: لنعتبر التركيبات السلعية التالية:

$a = (X_a, Y_a)$ $b = (X_b, Y_b)$ $c = (X_c, Y_c)$

1- المميزة المشتركة بين التركيبات الثلاث أنها **متساوية من حيث الدخل (الميزانية)**، لأنها تقع على خط دخل واحد في الفضاء المنفعي للمستهلك.

2- بافتراض أن التركيبتين a و c تقعان على خط دخل واحد وعلى منحنى السواء U_1:

أ- الشكل البياني التالي يظهر أن: $Y_a > Y_c$ و $X_c > X_a$:



يظهر تناقص $MRS_{x,y}$ في الشكل أعلاه من خلال الانتقال من التركيبة a إلى التركيبة (1) ثم التركيبة (2) أين تتم عملية إحلال السلعة Y بـ X بمقدار Δy_1 وΔy_2 مقابل Δx_1 وΔx_2 على التوالي، حيث أن $\Delta y_2<\Delta y_1$ بينما $\Delta x_2 = \Delta x_1$، أي أن: $-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ والتي هي قيمة $MRS_{x,y}$ تتناقص.

- **تتناقص قيمة المعدل الحدي للإحلال $MRS_{x,y}$ نتيجة تناقص رغبة المستهلك في التنازل عن وحدات من السلعة Y مقابل وحدة إضافية من السلعة X مع الحفاظ على نفس مستوى الإشباع (المنفعة).**

ب- حساب قيمتي P_x وP_y عند: $a = (Xa=3, Ya=9)$ ، $c= (Xc=6, Yc=2)$ و $R = 480$:

- عند التركيبة **a**: $R = 480 = 3P_X + 9P_Y$
- عند التركيبة **c**: $R = 480 = 6P_X + 2P_Y$

$$\Rightarrow 480 = 16\, P_Y \Rightarrow \boldsymbol{P_Y = 30}$$

وبالتعويض بقيمة P_Y في إحدى دالتي الدخل نجد:

$$480 = 3P_X + 9(30) \Rightarrow \boldsymbol{P_X = 70}$$

3- حتى تكون التركيبة b والتي تقع على منحنى السواء U_2 تركيبة توازن لابد أن يتحقق شرط الوازن الآتي:

$$MRS_{X,Y} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3} = \mathbf{2.33}$$

<u>حل تمرين 03:</u> لتكن دالة المنفعة لمستهلك ما كالتالي:

$$U = A\, x^{\alpha} y^{\beta}$$

1- تعريف ثوابت الدالة مع البرهنة الرياضية:

A: الرشد الاقتصادي للمستهلك.

α: مرونة المنفعة U بالنسبة للسلعة x، (أي نسبة التغير في المنفعة U عند تغير الطلب على السلعة x بـ 1%).

<u>البرهان</u>: نعلم أن مرونة المنفعة للسلعة x (e_{Ux}) تساوي:

$$e_{Ux} = \frac{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right) \times \left(\frac{x}{U}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right) = \left(A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}\right)$$

$$\left(\frac{x}{U}\right) = \left(\frac{x}{Ax^{\alpha} y^{\beta}}\right)$$

ومنه:

$$e_{Ux}\left(A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}\right) \times \left(\frac{x}{Ax^{\alpha} y^{\beta}}\right) = \alpha$$

- **لو أعطينا على سبيل المثال قيمة لـ α ولتكن 0.4، فإن هذا يعني أنه عند تغير الطلب على السلعة x بنسبة 1% فإن المنفعة الكلية U تتغير بنسبة 0.4%.**

β: مرونة المنفعة U بالنسبة للسلعة y، (أي نسبة التغير في المنفعة U عند تغير الطلب على السلعة y بـ 1%).

<u>البرهان:</u> نعلم أن مرونة المنفعة للسلعة y (e_{Uy}) تساوي:

$$e_{Uy} = \frac{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)}{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)} = \left(\frac{\Delta U}{\Delta y}\right) \times \left(\frac{y}{U}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta y}\right) = \left(A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}\right)$$

$$\left(\frac{y}{U}\right) = \left(\frac{y}{Ax^{\alpha} y^{\beta}}\right)$$

ومنه:

$$e_{Uy} = \left(A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}\right) \times \left(\frac{y}{Ax^{\alpha} y^{\beta}}\right) = \beta$$

- **لو أعطينا على سبيل المثال قيمة لـ β ولتكن 0.6، فإن هذا يعني أنه عند تغير الطلب على السلعةyبنسبة 1% فإن المنفعة الكلية U تتغير بنسبة 0.4%.**

2- حساب قيمة المعدل الحدي للإحلال (*$MRS_{x,y}$*):

$$MRS_{x,y} = \frac{UM_X}{UM_y} = \frac{A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

3- تحديد معادلتي الطلب على السلعتين x وy : يتشكل البرنامج الرياضي للمستهلك كالتالي:

$$Max\ U = A\ x^{\alpha}\ y^{\beta} \qquad \text{(تعظيم المنفعة)}$$

$S.T:$

$$R = xPx + yPy \qquad \text{(قيد دخل المستهلك)}$$

- لتحديد دالتي الطلب بهدف تعظيم المنفعة نستخدم طريقة مضاعف لاغرانج:

$$L = Ax^{\alpha}y^{\beta} - \lambda(xP_x + y\ P_y)$$

- لتعظيم المنفعة نشتق ونساوي بالصفر بالنسبة لكل متغيرات الدالة:

$$\frac{dL}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda Px = 0 \qquad \dots (1)$$

$$\frac{dL}{dy} = A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - \lambda Py = 0 \qquad \dots (2)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -xPx - yPy + R = 0 \qquad \dots (3)$$

- **الشرط (01) للتوازن**: بتقسيم المعادلة (1)على المعادلة (2) نحصل على:

$$\frac{A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{\lambda Px}{\lambda Py} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\alpha y}{\beta x}} = \boldsymbol{\frac{Px}{Py}} = \boldsymbol{MRS_{x,y}}$$

- **الشرط (02) للتوازن**: تناقص $_{x,y}$ ، حيث:

$$\frac{d^2L}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y < 0 \ \ \forall\ x,y > 0\ \ ,\forall\ \alpha < 1.$$

$$\frac{d^2L}{dy^2} = A\beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2} < 0 \ \ \forall\ x,y > 0\ \ ,\forall\ \alpha < 1.$$

- من الشرط 01 نحصل على قيمة y بدلالة x، أي:

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{Px}{Py} \Rightarrow y = x\frac{\beta Px}{\alpha Py}$$

- بتعويض قيمة y في المعادلة (3) أو قيد الدخل نحصل على:

$$R = xPx + \left(x\frac{\beta Px}{\alpha Py}\right) Py$$

ومنه:

$$R = xPx(1 + \frac{\beta}{\alpha})$$

- **معادلة الطلب للسلعة x إذا:**

$$\boldsymbol{x = \frac{R}{Px\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}}$$

- هذه المعادلة تعكس **<u>قانون الطلب</u>** (الطلب على السلعة x في علاقة عكسية مع السعر Px).

- بالتعويض فيy نحصل على:

$$y = y = x\frac{\beta Px}{\alpha Py} = \left(\frac{R}{Px\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right)\frac{\beta Px}{\alpha Py} = \frac{R}{Py\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

- **معادلة الطلب للسلعة y:**

$$\boldsymbol{y=\frac{R}{Py\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}}$$

- هذه المعادلة تعكس **قانون الطلب** (الطلب على السلعة y في علاقة عكسية مع السعر Py).

4- إيجاد تركيبة التوازن عند: $\alpha=\frac{1}{3}\beta$، $\alpha+\beta=1$، $A=27$، $P_x=P_y=5$ و$R=3000$:

يتم الحصول على تركيبة التوازن بالتعويض مباشرة في معادلتي الطلب المتوصل إليهما ، اي:

$$\boldsymbol{x}=\frac{3000}{5\left(1+\frac{0.75}{0.25}\right)}=\frac{3000}{20}=\text{وحدة}\ \boldsymbol{150}$$

$$\boldsymbol{y}=\frac{3000}{5\left(1+\frac{0.25}{0.75}\right)}=\text{وحدة}\ \boldsymbol{450}$$

- **ومنه تركيبة التوازن :**

$$\boldsymbol{e_1\binom{x=150}{y=450}}$$

- **أعظم منفعة للمستهلك:**

$$U=A\,x^{0.25}y^{0.75}$$

$$\boldsymbol{U^*}=27(150)^{0.25}(450)^{0.75}=\boldsymbol{9232}$$

- **حساب قيمة المضاعف المستخدم:**

$$A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}-\lambda Px=0\Rightarrow\lambda=\frac{27(0.25)(150)^{-0.75}(450)^{0.75}}{5}=\boldsymbol{3.077}$$

أو

$$A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}-\lambda Py=0\Rightarrow\lambda=\frac{27(0.75)(150)^{0.25}(450)^{-0.25}}{5}=\boldsymbol{3.077}$$

- **الدلالة الاقتصادية لقيمة المضاعف λ (3.077) هي: المنفعة الحدية للنقود المنفقة على السلعتين x وy.**

5- عند زيادة السعر P_x بنسبة 20% يكون السعر الجديد $Px=6$:

أ- تركيبة التوازن الجديدة:

$$\boldsymbol{x'}=\frac{3000}{6\left(1+\frac{0.75}{0.25}\right)}=\frac{3000}{24}=\text{وحدة}\ \boldsymbol{125}$$

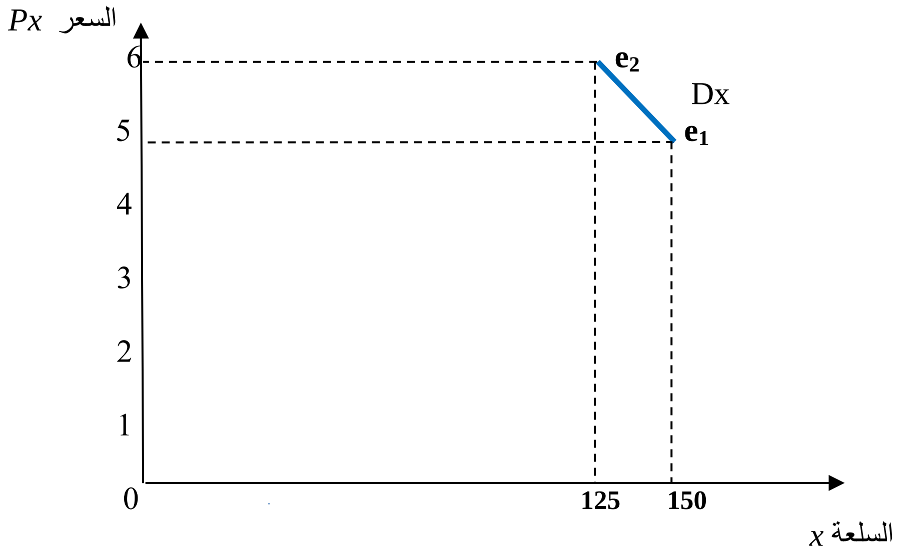
$$\boldsymbol{y'}=\frac{3000}{5\left(1+\frac{0.25}{0.75}\right)}=\text{وحدة}\ \boldsymbol{450}$$

أي:

$$\boldsymbol{e_2\binom{x'=125}{y'=450}}$$

ما يلاحظ أن الكمية منx تقلصت بـ 25 وحدة نتيجة ارتفاع سعرها.

ب- منحنى الطلب على السلعة x مبين في الشكل التالي:



ما يلاحظ أن منحنى الطلب لـ x خطي وذو ميل سالب، ويعكس قانون الطلب.

ج- إذا افترضنا أن منفعة المستهلك ثابتة بـ $U_o = 9396$:

- معادلة السواء للمستهلك:

$$U_0 = 9396 = 27\, x^{0.25}\, y^{0.75}$$

إذا معادلة السواء هي : $\Rightarrow y^{0.75} = \frac{U_0 = 9396}{27x^{0.25}} = \frac{348}{x^{0.25}} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \left(\frac{348}{x^{0.25}}\right)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \left(\frac{\boldsymbol{348}}{\boldsymbol{x}^{\frac{1}{3}}}\right)$

- **حساب أدنى إنفاق E والكميات من x و y لتحقيق المنفعة $U_0 = 9396$:**

$$\boldsymbol{Min}\; E = 5x + 5y$$

$$S.t:$$

(قيد المنفعة) $U_0 = 9396 = 27x^{1/4} y^{3/4}$

- لنستخدم طريقة لاغرانج بهدف تدنية الإنفاق كالتالي:

$$L = 5x + 5y - \lambda(27x^{1/4} y^{3/4} - 9396)$$

- لتدنية الإنفاق نشتق ونساوي بالصفر بالنسبة لكل متغيرات دالة لاغرانج:

$$\frac{dL}{dx} = 5 - \frac{27}{4}\lambda x^{-\frac{3}{4}}\; y^{\frac{3}{4}} = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{dL}{dy} = 5 - \frac{81}{4}\lambda x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}} = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -27x^{1/4} y^{3/4} - 9396 = 0 \qquad \ldots \quad (3)$$

- **الشرط (01) للتوازن:** بتقسيم المعادلة (1)على المعادلة (2) نحصل على:

$$\frac{5}{35} = \frac{\lambda x^{-\frac{3}{4}}\; y^{\frac{3}{4}}}{3\lambda x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}} \Rightarrow 1 = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{3x}} = \boldsymbol{MRS_{x,y}}$$

- **الشرط (02) للتوازن:** تناقص $\boldsymbol{MRS_{x,y}}$، حيث:

$$\frac{d^2L}{dx^2} > 0 \Rightarrow \frac{81}{16}\lambda x^{-\frac{7}{4}}\, y^{\frac{3}{4}} > 0 \;\; \forall\; x, y, \lambda > 0$$

$$\frac{d^2L}{dy^2} > 0 \Rightarrow -\frac{81}{16}\lambda x^{\frac{1}{4}}\ y^{-\frac{5}{4}} > 0\ \ \forall\ x, y, \lambda > 0$$

من الشرط (01) للتوازن نحصل على قيمة y بدلالة x، أي:

$$\boldsymbol{y = 3x}$$

- بتعويض قيمة y في المعادلة (3) أو قيد المنفعة نحصل على الآتي:

$$U_0 = 9396 = 27x^{1/4}\,(3x)^{3/4}$$

$$\Rightarrow x\,(3)^{3/4} = 348 \Rightarrow \boldsymbol{x = 152.66} \text{ وحدة}$$

ومنه:

$$y = 3x = 3(152.66) \Rightarrow \boldsymbol{y = 458} \text{ وحدة}$$

- **أدنى قيمة للإنفاق E والتي تحقق مستوى المنفعة المرغوب $U_0 = 9396$ يحسب كالتالي:**

$$E = 5x + 5y = 2(152.66) + 3(458) = \mathbf{3053.3}$$

- تحسب قيمة المضاعف λ بالتعويض بقيمتي x وy في المعادلة (1) أو المعادلة (2) كما يلي:

$$5 - \frac{27}{4}\lambda x^{-\frac{3}{4}}\ y^{\frac{3}{4}} = 0\ \Rightarrow \frac{5}{\frac{27}{4}x^{-\frac{3}{4}}\ y^{\frac{3}{4}}} = \lambda = \frac{5}{(6.75)(152.66)^{-\frac{3}{4}}\,(458)^{\frac{3}{4}}} = \mathbf{0.325}$$

أو

$$5 - \frac{81}{4}\lambda x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}} = 0\ \ \Rightarrow \frac{5}{\frac{81}{4}x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}} = \lambda = \frac{5}{(20.25)(152.66)^{\frac{1}{4}}\,(458)^{-\frac{1}{4}}} = \mathbf{0.325}$$

- **الدلالة الاقتصادية للمضاعف المستخدم $\lambda = 0.325$ تمثل <u>الإنفاق الحدي على السلعتين x وy.</u>**
