CHAPITRE 4 : Théorèmes des résidus et applications au calcul d'intégrales

4.1 Théorème des Résidus

4.1.1 Définition : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D, excepté en un point où $f(z)$ a un pôle en z_0, et si C est une courbe simple fermée dans D entourant z_0, on appelle alors ***Résidu*** de $f(z)$ en z_0 le coefficient a_{-1}du développement de Laurent de $f(z)$ au voisinage de z_0.

Ce nombre est noté : $\boxed{Res(f, z_0) = a_{-1}}$

Exemple : la fonction $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)} + \frac{e}{2} + \cdots \ldots ..$

$$\Longrightarrow Res(f, 1) = a_{-1} = e$$

4.1.2 Calcul des Résidus

En pratique, il n'est pas toujours facile d'évaluer le coefficient a_{-1} de la série de Laurent, dans plusieurs cas il est possible de calculer ce résidu sans avoir à expliciter cette série. Il est donné par la formule suivante :

$$\boxed{Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \qquad \text{(I)}}$$

Ou n est l'ordre du pôle. En particulier si le pôle est simple $(n = 1)$ le calcul des résidus devient simple et il se réduit en :

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)].$$

Exemples :

1. Reprenons l'exemple $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$, calculons $Res(h, 0)$ *et* $Res(h, -1)$

$$Res(h, 0) = \lim_{z \to 0} [(z) h(z)] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z+1}\right] = 1$$

$$Res(h, -1) = \lim_{z \to -1} [(z+1) h(z)] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z}\right] = -1$$

2. Calculons le résidu au point $z = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cos z}$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dz}\left[\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{cosz}\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} -\frac{sinz}{cos^2 z} = -\frac{1}{2}$$

3. Calculons le résidu au point $z = i$ de la fonction $g(z) = \frac{cosz}{(z^2+1)^3}$

$$Res(g,i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3 f(z)] = \lim_{z\to i}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{cosz}{(z-i)^3}\right]$$

Remarque : *la formule (I) est intéressante seulement quand l'ordre est de 2à 3 à la limite. Si l'ordre est 4 ou plus, mieux utiliser la série de Laurent.*

Exemple 4. Calculons le résidu au point $z = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1+z^8}{z^5(z+2)}$ ($z = 0$ est un pôle d'ordre 5)

Directement on utilise la série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$

$$f(z) = \frac{1+z^8}{2z^5\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \frac{1+z^8}{2z^5}\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^4}+\cdots+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2z^5}+\frac{1}{2}z^3\right)\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^4}+\cdots+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right]$$

Alors $Res(f,0) = a_{-1} = \frac{1}{2^5}$

Exemple 5. Calculons le résidu au point $z = 0$ de la fonction $f(z) = z\sin^2\frac{\pi}{z}$

$$f(z) = z\sin^2\frac{\pi}{z} = z\left(\frac{1-cos2\frac{\pi}{z}}{2}\right) = \frac{z}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{2n}\right)$$

$$= \frac{z}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{2n}\right) = \frac{z}{2}\left(\frac{2\pi^2}{z^2}-\frac{2\pi^4}{3z^4}+\frac{4\pi^6}{45z^6}+\cdots\right)$$

alors $z = 0$ est un point singulier essentiel d'où $Res(f,0) = a_{-1} = \pi^2$

4.1.3 Théorème des Résidus

Si $f(z)$ est analytique dans un domaine D, excepté en un pôle d'ordre n en $z = z_0$, alors on peut écrire $f(z)$ sous la forme suivante :

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\frac{a_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\cdots\cdots$$

En intégrant cette formule sur une courbe simple fermée C dans D entourant z_0 ; et en utilisant le fait que :

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & si\ n \neq 1 \\ 2\pi i & si\ n = 1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\oint_C f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1}$

Théorème **:** Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur et sur une frontière C d'un domaine D, sauf en un nombre fini de pôles $(a, b, c, \dots)$ à l'intérieur de C, ayant des résidus $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots)$ respectivement, alors

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\,(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots)$$

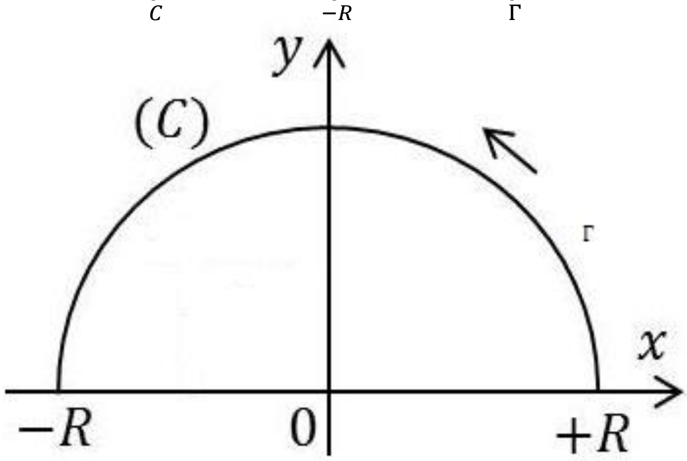
Remarque : le théorème et les formules de Cauchy sont des cas particuliers de ce résultat que l'on appelle le théorème des résidus.

4.2 Applications du Théorème des Résidus à des calculs d'intégrales

4.2.1 Intégrales de fractions rationnelles (de *type* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$)

On considère $\oint_C f(z)dz$ le long d'un contour C constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon R assez grand.

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$



En suite on fait tendre la limite $R \to +\infty$.

D'où

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Le théorème des résidus permet de calculer de nombreuses intégrales, Cependant, pour mener

à bien les calculs il est indispensable de connaitre le comportement de Γ lorsque $R \to +\infty$. En utilisant le Lemme de Jordan :

Si f est continue sur un cercle de centre z_0, de rayon R et si la limite de $\|(z - z_0) \times f(z)\|$ est nulle lorsque R tend vers l'infini, alors l'intégrale sur tout arc de ce cercle est nulle.

alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Exemple1 : Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

On a $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$ une fonction paire $\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

Posons $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$

On fait $\lim_{R\to+\infty} \Longrightarrow$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ a 4 pôles simples :

en $z_1 = i\ ;\ z_2 = -i\ ;\ z_3 = 3i\ et\ z_4 = -3i$, seuls $z_1 = i\ et\ z_3 = 3i$ ont des parties imaginaires positives ($z_1 et\ z_3 \in C([-R, +R] + \Gamma)$),Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = 2\pi i(res(f,i) + res(f,3i)$$

On a

$$res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i).f(z) = \frac{i}{16}$$

$$res(f,3i) = \lim_{z\to 3i}(z-3i).f(z) = \frac{-3i}{16}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = 2\pi i\left(\frac{i}{16} - \frac{3i}{16}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Par la suite on obtient :

$$\Rightarrow I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{8}$$

Exemple2 : Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ et en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C composé d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$

On fait $\lim_{R\to+\infty}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)}$ a 2 pôles simples :

en $z_1 = i$; $z_2 = -i$ seul $z_1 = i$ a une partie imaginaire positive $(z_1 = i \in C([-R, +R] + \Gamma))$,Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx = 2\pi i\big(res(f, i)\big)$$

On a

$$res(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i).f(z) = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

Exemple3 : Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2+2x+2}$

On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$ et en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C composé d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$

On fait $\lim_{R \to +\infty}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$ a 2 pôles simples :

en $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -1 - i$ ce dernier est rejeté seul $z_1 = -1 + i$ a une partie imaginaire positive $(z_1 \in C([-R, +R] + \Gamma))$,Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2} dx = 2\pi i\big(res(f, -1 + i)\big)$$

On a

$$res(f,-1+i)=\lim_{z\to i}(z+1-i).f(z)=\frac{e^{-1-i}}{2i}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-1-i}}{2i}\right)=\pi e^{-1-i}=\pi e^{-1}(\cos 1-i\sin 1)$$

On déduit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sinx}{x^2+2x+2}dx=-\pi e^{-1}\sin 1$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cosx}{x^2+2x+2}dx=\pi e^{-1}\cos 1$$

4.2.2 Intégrales trigonométriques (de type $\int_0^{2\pi} g(cos\theta, sin\theta)d\theta$)

Soit g une fonction rationnelle de $cos\theta$ *et* $sin\theta$, si on pose $z=e^{i\theta}$ $\theta\in[0,2\pi]$ et $z^{-1}=e^{-i\theta}$ alors on peut écrire :

$$cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}\qquad et\qquad sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$

Par conséquent l'intégrale donnée est équivalent à :

$$\int_0^{2\pi} g(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_{|z|=1}\frac{1}{zi}g\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)dz=2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

Où $f(z)=\frac{1}{zi}g\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ et a_j sont les pôles de la fraction rationnelle de f(z) qui sont à l'intérieur du cercle $|z|=1$.

Exemple : calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta}d\theta$

On pose $z = e^{i\theta}$ $cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ $et\ cos2\theta = \frac{z^2+z^{-2}}{2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{iz} \frac{z^2+z^{-2}}{2(5+3\frac{z+z^{-1}}{2})} dz$$

soit $f(z) = \frac{-i(z^4+1)}{z^2(3z^2+10z+3)}$, cette fonction à un pôle double en $z_1 = 0$ et deux pôles simples en $z_2 = \frac{-1}{3}$ $et\ z_3 = -3$, seuls $z_1 = 0$ $et\ z_2 = -\frac{1}{3}$ sont) l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors en appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-i(z^4+1)}{z^2(3z^2+10z+3)} dz = 2\pi i \left(Res(f,o) + Res(f,-\frac{1}{3}) \right)$$

D'où

$$Res(f,o) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{-i(z^4+1)}{(3z^2+10z+3)}\right) = -\frac{20}{18i}$$

$$Res\left(f,-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{-i(z^4+1)}{3z^2(z+3)}\right) = \frac{41}{36i}$$

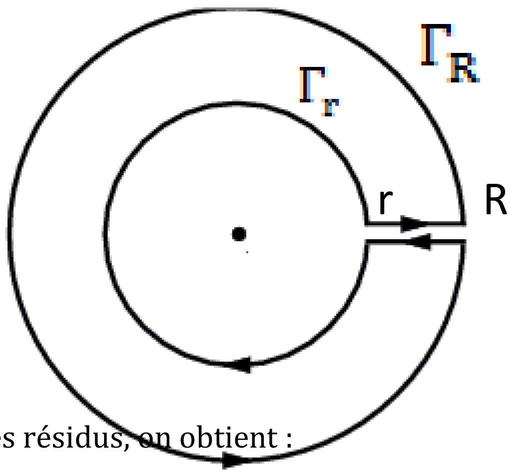
Alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-i(z^4+1)}{z^2(3z^2+10z+3)} dz = \frac{\pi}{18}$$

4.2.3 Intégrales de fonctions multiformes

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3} dx$

On considère la fonction $(z) = \frac{(lnz)^2}{(z+1)^3}$, et soit le contour C composé de : $[r,R] \cup \Gamma_R \cup [R,r] \cup \Gamma_r$ avec $\Gamma_R\ et\ \Gamma_r$ sont des cercles centrés à l'origine de rayons $R\ et\ r$ respectivement



En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_R^r f(z)dz + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

on fait les limites $R \to +\infty$ et $r \to 0$, on obtient par la suite :

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0 \;\; et \; \lim_{R\to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

On a aussi : le long de $[r, R]$ $lnz = lnx$ ainsi que le long du chemin $[R, r] lnz = lnx + i2\pi$, on peut écrire alors :

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to +\infty}} \int_r^{+R} f(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3} dx \;\; et \; \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to +\infty}} \int_R^r f(z)dz = -\int_0^{+\infty} \frac{(lnx + i2\pi)^2}{(x+1)^3} dx$$

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(lnx + i2\pi)^2}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(i2\pi)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{4i.\, lnx\pi}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Par la suite

$$4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{lnx}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Comme La fonction $f(z) = \frac{(\boldsymbol{lnz})^2}{(\boldsymbol{z+1})^3}$ a un pôle triple en $z_1 = -1$ à l'intérieur de contour C, alors :

$$res(f,-1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{d^2}{dz^2}(z+1).f(z) = 1 - i\pi$$

Par la suite on obtient :

$$4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx - 4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{(x+1)^3}dx = 2\pi i(1-i\pi)$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx = \frac{1}{2}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{(x+1)^3}dx = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

4.2.4 Formule des compléments

Nous définissons la fonction gamma pour $\mathcal{R}e\{z\} > 0$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (1)$$

- On en déduit la formule de récurrence :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ Ou } \Gamma(1) = 1 \qquad (2)$$

- Si z est un entier positif (2) devient

$$\Gamma(n+1) = n \times (n-1) \times \dots \dots \dots .. \times 1 = n! \qquad (3)$$

Ce qui montre que la fonction gamma est une généralisation de la factorielle. Pour cette raison la fonction gamma est aussi appelée fonction factorielle et est notée z ! plutôt que $\Gamma(z+1)$, on pose alors $\boxed{0\,! = 1}$

4.2.4 Résidu à l'infini

Soit f une fonction holomorphe sur le plan complexe et soit g la fonction définie par $(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

On dit que f a un pôle en l'infini si g a un pôle en 0 et que f a une singularité essentielle à l'infini si g a une singularité essentielle en 0. On appelle résidu à l'infini de f la quantité

$$\boxed{Res(f,\infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2}g(z), 0\right)}$$