5.1 Equivalence entre Holomorphie et Analyticité

Définition : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à variables complexes ; où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique sur Ω, si pour tout point $z_0 \in \Omega$ il existe un disque ouvert $D(z_0, r) \subset \Omega$ tel que $f(z)$ s'´ecrit comme une série entière en $(z - z_0)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z} - \mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$.

Propriétés :

- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z} - \mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$ est convergente sur $D(z_0, r)$, alors elle est analytique et holomorphe. Sa dérivée est $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{na_n}(\mathrm{z} - \mathrm{z_0})^{\mathrm{n}-1}$ est convergente sur $D(z_0, r)$,par conséquent $f(z)$ est indéfiniment dérivable sur Ω. Autrement dit ***une fonction analytique est holomorphe.***
- Alors on a : $\mathrm{a_n} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, par conséquent la série entière est la série de Taylor en z_0. Elle est donc déterminée uniquement par f au voisinage de z_0 est donnée par :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots\cdots\cdots$$

Exemples :

- La fonction $f(z) = e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$: $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{z^n}}{\mathrm{n!}}$
- La fonction $f(z) = |z|^2$ n'est pas analytique sur $\mathbb{C}$: $|z|^2$n'est pas holomorphe.

5.2 Théorème du Maximum

Si f (z) est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus $f\ (z)$ n'est pas constante alors le maximum de $|f\ (\ z\ )|$ est atteint sur C.

5.3 Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe, la fonction $f\ (z)$ vérifiée les deux conditions :

1. $f\ (z)$ est analytique
2. $f\ (\ z\ )$est bornée, c'est-à-dire $|f\ (\ z\ )| < M$ où M désigne une constante.

Alors $f\ (\ z\ )$ est constante.

5.4 Théorème de Rouché

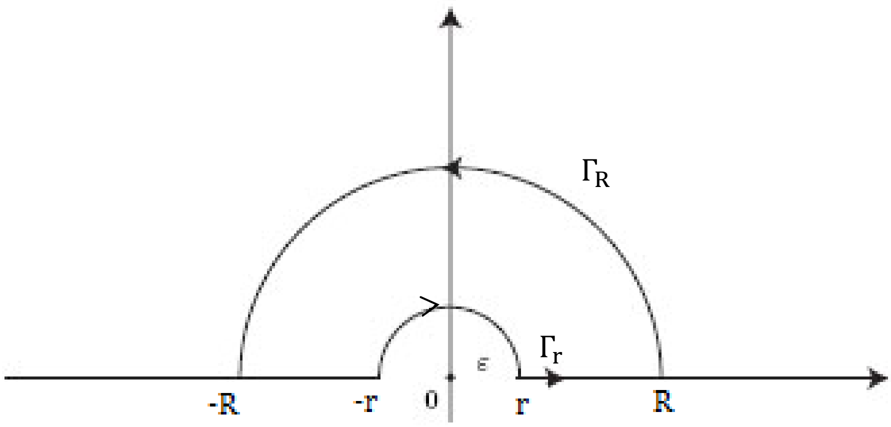
Si $f\ (z)$ et $g\ (z)$ sont analytiques dans et sur une courbe fermée simple C, et si $|g\ (\ z\ )| < |f\ (\ z\ )|$ sur **C,** alors $f\ (\ z\ ) + g\ (\ z\ )$ et $f\ (z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

5.5 Calcul d'intégrales par la méthode des Résidus

Intégrale diverses sur des contours particuliers :

Exemple 1 : $\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{(x^2+1)x} dx$

On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ qui a 3 pôles simples en $z_1 = i$; $z_2 = -i$ et $z_3 = 0$, ce dernier $z_3 = 0$ est sur le chemin d'intégrale, on ne peut pas intégrer sur un chemin passant par un point singulier ; en modifiant le contour comme C composé de : $[r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$; avec Γ_R et Γ_r sont des demi-cercles centrés à l'origine de rayons R et r respectivement , situés au-dessus de l'axe réel,



En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Pour l'intégrale $\int_{-R}^{-r} f(x)dx$, on fait le changement de variable $x = -x$:

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)} dx$$

Par la suite

$$\int_r^{+R} f(x)dx + \int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x(x^2+1)} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$$

On fait la limite de $r \to 0$ et $R \to \infty$ d'où $\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$

Pour calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_r} f(z)dz$ on pose $= re^{i\theta}$; $dz = ire^{i\theta}d\theta$, on obtient par la suite :

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}(r^2e^{i2\theta}+1)} ire^{i\theta}d\theta = \int_{\pi}^{0} id\theta = -i\pi$$

Par la suite on obtient :

$$2i\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = i\pi + 2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

Avec $z_1 = i$ est à l'intérieur de notre contour C, alors

$$2i\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = i\pi + 2\pi i Res(f,i)$$

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i).f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z(z+i)} = \frac{e^{-1}}{-2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$$

Exemple 2 : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}dx$

On considère la fonction $(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^2+4}$, qui a deux pôles simples en $2i$ et en $-2i$

$$res(f,2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{(\ln z)^2}{z+2i} = \frac{(\ln(2i))^2}{4i} = \frac{\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right)^2}{4i}$$

$$res(f,-2i) = \lim_{z\to -2i}\frac{(\ln z)^2}{z-2i} = -\frac{(\ln(-2i))^2}{4i} = -\frac{\left(\ln 2 + i\frac{3\pi}{2}\right)^2}{4i}$$

En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_R^{r} f(z)dz + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

on fait les limites $R \to +\infty\ et\ r \to 0$, on obtient par la suite :

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0 \quad et \quad \lim_{R\to +\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

On a aussi : le long de $[r,R]$ $lnz = lnx$ ainsi que le long du chemin $[R,r]lnz = lnx + i2\pi$, on peut écrire alors :

$$\int_{r}^{+R} f(z)dz = et \int_{R}^{r} f(z)dz = -\int_{0}^{+\infty}\frac{(lnx+i2\pi)^2}{(x+1)^3}dx$$

$$\oint_C f(z)dz = \int_{0}^{+\infty}\frac{(lnx)^2}{x^2+4}dx - \int_{0}^{+\infty}\frac{(lnx+i2\pi)^2}{x^2+4}dx = 2\pi i\big(Res(f,2i)+Res(f,-2i)\big)$$

$$4\pi^2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx - 4\pi i\int_{0}^{+\infty}\frac{lnx}{x^2+4}dx = 2\pi i\big(Res(f,2i)+Res(f,-2i)\big)$$

Par la suite

$$4\pi^2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx - 4\pi i\int_{0}^{+\infty}\frac{lnx}{x^2+4}dx = 2\pi i\left(\frac{2\pi^2-2i\pi ln2}{4i}\right) = \pi^3 - i\pi^2 ln2$$

Par la suite on obtient :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}\\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{lnx}{x^2+4}dx = \frac{\pi ln2}{4}\end{cases}$$

Références

MURRAY R.SPIEGEL, Variables complexes : Cours et problèmes, Séries Schaum, Mac Graw-Hill Inc, New York, 1973

P. DOLBEAULT, Analyse Complexe, Masson, Paris, 1990