Chapitre 3

Équations différentielles

Chapitre 3 : Équations différentielles

3.1 Définition

Une équation différentielle ordinaire est une équation contenant une variable x, une fonction b et une ou plusieurs dérivées de cette fonction. C'est-à-dire toute équation qui peut s'écrire sous la forme

$$F(x, y, y', y", \dots\dots\dots., y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

Par exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles

$$y'' - 2y = x$$
$$2xy' - 3\cos x = 6$$
$$3x(y')^2 - 2y''' = 0$$

- On définit l'ordre d'une équation différentielle comme étant le plus élevé des ordres des dérivées apparaissant dans l'équation. Le degré d'une équation différentielle est l'exposant de la dérivée d'ordre le plus élevé.

Exemple : L'équation $y''' - x(y')^5 = e^x$ est une équation différentielle d'ordre 3 et de degré 1 car y''' est la dérivée d'ordre le plus élevé (3) et que celle-ci est affectée de l'exposant 1.

3.2 Solution d'une équation différentielle

Toute fonction qui satisfait à une équation différentielle est une solution de cette équation. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

Exemple : On peut constater que $y = 2\sin x$ et $y = 3\cos x$ sont toutes deux solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$

En effet, si $y = 2\sin x$ alors $y' = 2\cos x$ et $y'' = -2\sin x$.

$y'' + y = -2\sin x + 2\sin x = 0$

De même, si $y = 3\cos x$ alors $y' = -3\sin x$ et $y'' = -3\cos x$.

$y'' + y = -3\cos x + 3\cos x = 0$

- Il existe donc plusieurs solutions à une équation différentielle. En fait, il en existe une infinité. Dans ce cas-ci toute fonction de la forme $y = A\sin x + B\cos x$

où A et B sont des constantes arbitraires, est solution de cette équation.

- On appelle **solution générale** d'une équation différentielle, l'ensemble de toutes les solutions (famille de fonctions) qui vérifient l'équation différentielle. Une équation différentielle d'ordre *n* comporte *n* constantes arbitraires.

On peut donc affirmer que $y = A\sin x + B\cos x$ où A et B sont des constantes arbitraires est la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$

$y = 2\sin x$ et $y = 3\cos x$ sont ***des solutions particulières***.

3.3 Équations différentielles d'ordre 1

3.3.1 Équations à variables séparables

Une équation différentielle est dite à *variables séparables* si elle peut s'écrire sous la forme

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \tag{3.2}$$

Les fonctions de x et y multipliant chaque différentielle sont «séparées».

- Pour résoudre cette équation, on doit d'abord séparer les variables puis intégrer chacun des termes de cette équation.

En divisant par $P(x)N(y)$, on obtient

$$\frac{M(x)N(y)}{P(x)N(y)}dx + \frac{P(x)Q(y)}{P(x)N(y)}dy = 0$$

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0 \tag{3.3}$$

On trouve la solution générale en intégrant

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = K \tag{3.4}$$

3.3.2 Équations homogènes

Une fonction $f(x, y)$ est dite *fonction homogène* de degré n si il existe un réel k ; telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(kx, ky) = k^n f(x, y) \tag{3.5}$$

Pour toutes les valeurs de *k, x, y* pour lesquelles la fonction est définie.

(*multiplier chaque variable par k multiplie la fonction par* k^n)

- Une équation différentielle est dite *homogène* si on peut l'écrire sous la forme

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.6}$$

où $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des *fonctions homogènes de même degré*.

- Pour résoudre une équation différentielle homogène, il suffit de faire le changement de variable $y = ux$ (où *u* est une fonction de *x*) pour la transformer en une équation à variables séparables.

3.3.3 Équations linéaires du premier ordre

Une équation différentielle *linéaire d'ordre 1* est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3.7}$$

Cette équation peut se résoudre à l'aide d'un *facteur intégrant* (F.I). C'est un artifice de calcul permettant d'obtenir une forme plus facilement intégrable.

Dans ce cas, le facteur intégrant est $e^{\int P(x)dx}$. En multipliant l'équation différentielle par le F.I., on obtient

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x) \tag{3.8}$$

Or le membre de gauche de cette équation est la dérivée de $ye^{\int P(x)dx}$. On peut donc écrire

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=e^{\int P(x)dx}Q(x) \tag{3.9}$$

$$e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+K \tag{3.10}$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+K\right) \tag{3.11}$$

Cette dernière équation est donc la solution générale de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1.

3.3.4 Équation de Bernoulli

C'est une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)y^n \tag{3.12}$$

On transforme cette équation en une équation linéaire en la divisant par y^n et en faisant le changement de variable

$$\begin{aligned} &z=y^{1-n} \\ &\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\left(1-n\right)y^{-n}\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ce qui implique que $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\left(1-n\right)}\dfrac{dz}{dx}$.

Effectuons ces opérations.

$$\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)y^n \tag{3.14}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P(x)=Q(x) \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+zP(x)=Q(x) \tag{3.16}$$

$$\frac{dz}{dx}+z\left(1-n\right)P(x)=\left(1-n\right)Q(x) \tag{3.17}$$

Nous avons maintenant une équation linéaire. Nous savons comment résoudre cette équation. Par la suite, il nous suffira de revenir à la variable *y* pour avoir notre solution finale.

3.3.5 Équation différentielle de différentielle exacte (totale)

Une équation différentielle de type :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.18}$$

est une différentielle *exacte* s'il existe une fonction différentiable $f(x,y)$ telle que la différentielle totale de cette fonction (df) soit précisément égale au membre de gauche de (3.18).

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df = 0 \tag{3.19}$$

La solution de l'équation est alors donnée par $f(x,y) = K$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (5.6) soit une équation différentielle exacte est que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.20}$$

(*les dérivées mixtes de f* (*x*,*y*) *sont alors égales*)

Une fois cette condition vérifiée, on pose $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ et on intègre par rapport à *x*, ce qui donne

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \tag{3.21}$$

Pour déterminer la fonction $C(y)$, on va dériver $f(x,y)$ par rapport à y et comparer la fonction obtenue avec $N(x,y)$.

Cas particuliers (équation réductible à une équation exacte)

Les équations de la forme $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ne sont pas nécessairement exactes. Toutefois il est possible, sous certaines conditions, d'utiliser un facteur intégrant pour qu'elles deviennent exactes. Par exemple, si

$\dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{-N}=f(x)$ (*une fonction de x uniquement*) alors $e^{\int f(x)dx}$ est un facteur intégrant, et si $\dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}=g(y)$ (*une fonction de y uniquement*) alors $e^{\int g(y)dy}$ est un facteur intégrant

3.3.6 Equation de Clairaut

C'est une équation de type :

$$y = xy' + g(y') \tag{3.22}$$

On la résout en posant $y' = p$

L'équation (3.22) devienne :

$$y = xp + g(p) \tag{3.23}$$

Puis on différentié par rapport à x :

$$y' = p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dg(p)}{dx} \tag{3.24}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{dg(p)}{dp}\right) \tag{3.25}$$

- Soit $\frac{dp}{dx} = 0$ et la solution générale est de type $p = c^{te}$

$$y = xc + g(c) \tag{3.26}$$

- Soit $x + \frac{dg}{dp} = 0$ et on obtient une solution singulière la solution

$$x = -g'(p) \tag{3.27}$$

$$y = -pg'(p) + g(p) \tag{3.28}$$

3.3.7 Equation de Lagrange

C'est une équation de type :

$$y = xf(y') + g(y') \tag{3.29}$$

C'est un cas général de l'équation de Clairaut :

En posant $y' = p$; et on différentié l'équation (3.29) devienne :

$$p = f(p) + \frac{dp}{dx}\left(x\frac{df(p)}{dp} + \frac{dg(p)}{dp}\right) \tag{3.30}$$

$$-\big(p - f(p)\big)\frac{dx}{dp} + x\frac{df(p)}{dp} + \frac{dg(p)}{dp} = 0 \tag{3.31}$$

Qui est une équation linéaire en x; connaissant $x(p)$ en déduit $y(p)$

3.4 Équations différentielles linéaire du 2$^{\text{ème}}$ ordre

Définition : une équation différentielle linéaire (EDL) du 2$^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.32}$$

Ou $a, b,\ c \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$

L'équation homogène (EH), ou sans second membre associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.33}$$

La solution générale de (3.32) est

$$y = y_p + y_h \tag{3.34}$$

y_h: est la solution de l'équation homogène associée(EH).

y_p: est la solution de particulière à l'équation (3.32).

3.4.1 Résolution de l'équation homogène (EH)

Théorème 1: si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène (EH) alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de (EH)

$$\begin{cases} ay''_1 + by'_1 + cy_1 = 0 \\ ay''_2 + by'_2 + cy_2 = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

Théorème 2: si y_1 est une solution de l'équation homogène (EH) alors $c_1 y_1$ est aussi une solution de (EH)

Théorème 3: si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène (EH) alors $c_1 y_1 + c_2 y_2$ est aussi une solution de (EH)

- On cherche la solution de l'équation (EH) sous la forme :

  $$y = e^{rx} \qquad r \in \mathbb{R}$$

  On a donc $y' = ry \quad et\ y'' = r^2 y$

  Donc l'équation (EH) devienne :

  $$y(ar^2 + br + c) = 0 \tag{3.36}$$

Définition :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.37}$$

L'équation (3.37) se nomme équation caractéristique(EC) de (EH) :

1) Si l'équation caractéristique(EC) admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ alors

$$y_1 = e^{r_1 x} \ \ et \quad y_2 = e^{r_2 x} \tag{3.38}$$

La solution y_h de (EH) est :

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{3.39}$$

2) Si l'équation caractéristique(EC) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$ alors, la solution y_h de (EH) est :

$$y_h = (c_1 x + c_2) e^{rx} \tag{3.40}$$

3) Si l'équation caractéristique(EC) admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad et \qquad r_2 = \alpha - i\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ et\ \beta \neq 0)$$

La solution y_h de (EH) est alors:

$$y_h = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \tag{3.41}$$

Exemple : l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$, l'équation caractéristique(EC) associée à cette équation est :

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Longrightarrow \Delta = -4 < 0$$

$$r_1 = -1 + 2i \quad et \qquad r_2 = -1 - i2$$

La solution y_h de (EH) est alors:

$$y_h = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Remarque :

La solution générale à (3.32) est de la forme $y_g = y_p + y_h$, ou y_p est une solution particulière de (3.32), et y_h parcourt toutes les solutions de l'équation homogène (E.H.).

3.4.2 Solution particulière

3.4.2.1 1ère Méthode

On distingue encore deux cas particuliers et une méthode générale :

$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ $ou\ (\alpha \in \mathbb{C})\ et\ P \in \mathbb{C}(I) est\ un\ polynôme$

On cherche une solution sous la forme : $y_p = Q(x)e^{\alpha x}$ ou $Q(x)$ est un polynôme, dont on peut préciser le degré :

- Si α n'est pas racine de (EC) ; alors $degré\ Q = degré\ P$
- Si α est l'un des deux racines de (EC) ; alors $degré\ Q = degré\ P + 1$
- Si α est racine double de (EC) ; alors $degré\ Q = degré\ P + 2$

3.4.2.2 2ème Méthode (Changements des variables)

Soit l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$, dont la solution homogène est :

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{3.42}$$

Pour l'équation avec second membre, on considére que $c_1\ et\ c_2$ des fonctions en x

$c_1(x)\ et\ c_2(x)$

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 \tag{3.43}$$

$$\Longrightarrow y' = c'_1(x)y_1 + c_1(x)y'_1 + c'_2(x)y_2 + c_2(x)y'_2 \qquad (3.44)$$

On choisit $c_1(x)\ et\ c_2(x)$ telle que :

$$c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \qquad (3.45)$$

$$y' = c_1(x)y'_1 + c_2(x)y'_2 \qquad (3.46)$$

$$\Longrightarrow y'' = c'_1(x)y'_1 + c_1(x)y''_1 + c_{\prime 2}(x)y'_2 + c_2(x)y''_2 \qquad (3.47)$$

En substituant $y'', y'\ et\ y$ dans l'équation (3.32)

$$\Longrightarrow a\big(c'_1(x)y'_1 + c_1(x)y''_1 + c'_2(x)y'_2 + c_2(x)y''_2\big)y'' + b\big(c_1(x)y'_1 + c_2(x)y'_2\big) + c(c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2) = f(x)$$

$$a\big(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\big) + \left(\underbrace{ac_1(x)y''_1 + bc_1(x)y'_1 + cc_1(x)y_1}_{=0} + \underbrace{ac_2(x)y''_2 + bc_2(x)y'_2 + cc_2(x)y_2}_{=0}\right) = f(x) \qquad (3.48)$$

Par conséquent, il reste :

$$a\big(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\big) = f(x) \qquad (3.49)$$

Finalement on trouve le système d'équations :

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases} \qquad (3.50)$$

Qui est un ensemble de deux équations linéaires ($c'_1(x)\ et\ c'_2(x)\ inconues$) , puis par intégration de i$c'_1(x)\ et\ c'_2(x)$, on trouve $c_1(x)\ et\ c_2(x)$.