Chapitre 5

Transformation de Laplace

CHAPITRE 5 : Transformation de Laplace

5.1 Définition de la Transformée de Laplace et conditions d'existences

Définitions Préalables :

1. Une fonction est dite continue par morceau (sur un domaine finie $t \in [a, b]$) :

- Si il est possible de subdiviser le domaine en un nombre fini d'intervalles dans lesquels la fonction est continue.
- Si $f(t)$ possède une limite à droite et à gauche à chaque limite d'un intervalle.

2. Une fonction est dite « d'ordre exponentiel » si on peut trouver des constantes réelles $M \ et\ \gamma > 0$ telles que $|f(t)| < Me^{\gamma t} \quad \forall t > T$, on dit $f(t)$ est d'ordre exponentiel γ quand $t \to \infty$

Il est équivalent de dire que l'on peut trouver une constante $\beta > 0$ telle que $\lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} \times |f(t)| \longmapsto 0$ (il suffit de choisir $\beta > \gamma$)

Ainsi $f(t) = e^{t^2}$ *n'est pas d'ordre exponentiel.*

5.2 Définition de la Transformée de Laplace

Si $f(t)$ désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t, définie sur le domaine $t \in]0, +\infty[$ et nulle pour $t < 0$, on appelle Transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction :

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

Ou p est une variable complexe (paramètre) et $F(p)$ est une fonction complexe.

- L'existence de $F(p)$ suppose la convergence de l'intégrale.
- On appelle $F(p)$ l'image de $f(t)$.

Conditions d'existence de $F(p)$:

- $f(t)$ doit être continue par morceau.
- $\exists \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$: tel que $\lim_{t\to 0} t^{\alpha} \times |f(t)| \to 0$
- $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel.

Conséquence : Certaines fonctions ne possèdent pas de Transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ (qui ne respecte pas la deuxième condition d'existences) ou $f(t) = e^{t^2}$ (qui ne respecte pas la 3[ième] condition d'existences).

Exemple 1: la fonction $f(t) = t$

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$$

On intègre par partie on trouve :

$$\mathcal{L}(t) = \underbrace{\left[\frac{-t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{-1}{p^2}[e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

Exemple 2: la fonction $f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt \overset{(on\ fait\ le\ changement\ pt=u)}{\triangleq} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^n e^{-u}\frac{du}{p} = \frac{1}{p^{n+1}}\underbrace{\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du}_{=I_n}$$

Alors on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du \Longrightarrow I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = 1$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = \underbrace{[-u^n e^{-u}]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} nu^{n-1}e^{-u}\,du = nI_{n-1}$$

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_1 = 1 \\ I_2 = 2 \times 1 \\ \vdots \\ I_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n! \end{cases}$$

Finalement on trouve :

$$\Rightarrow \ \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Exemple 3: la fonction $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{+\infty} e^{at}.e^{-pt}dt \;= \frac{1}{p-a}$$

Exemple 4:

$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ (on utilise $\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$)

$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ (on utilise $\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}$)

5.3 Propriétés de la Transformée de Laplace

On note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ la fonction image de $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ dite original de $F(p)$:

1. ***Linéarité*** : Si $F_1(p) = \mathcal{L}\big(f_1(t)\big)\ et\ F_2(p) = \mathcal{L}\big(f_2(t)\big)\ alors$:

$$\mathcal{L}(Af_1(t) + Bf_2(t)) = A\mathcal{L}\big(f_1(t)\big)B\mathcal{L}(f_2(t))$$

Exemple : $\mathcal{L}(2 + 3t - 5t^2) = 2\left(\frac{1}{p}\right) + 3\left(\frac{1}{p^2}\right) - 5\left(\frac{1}{p^3}\right)$

2. $\boldsymbol{\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)}$:

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt \xrightarrow{(changement\ de\ variable\ t=\frac{u}{a}} \mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{pu}{a}}\,du$$

3. $\boldsymbol{\mathcal{L}\big(e^{ct}f(t)\big) = F(p-c)}$:

$$\mathcal{L}\big(e^{ct}f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-c)t}\,dt$$

Exemple : $\mathcal{L}(e^{ct}t^n) = \frac{n!}{(p-c)^{n+1}}$

4. $\boldsymbol{\mathcal{L}\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n F^{(n)}(p)}$

5.4 Transformée de Laplace de la fonction dérivée

Si $f(t)$ est continue de classe $\mathbb{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, alors :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) \qquad ou\ f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

On peut itérer ce résultat, et si f est de classe $\mathbb{C}^1$ sur]0,+∞[, alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) \ - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots\cdots - f^{(n-1)}(0^+)}$$

Donc

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(f''(t)) = p^2 F(p) - p f(0^+) \ - f'(0^+)}$$

5.5 Transformée de Laplace de l'intégral

Soit

$$h(t) = \int_0^t f(u)du \quad donc\ h'(t) = f(t)$$

On pose : $\mathcal{L}(h(t)) = H(p)\ et\ \ \mathcal{L}(f(t)) = F(p)$

$$\mathcal{L}(h'(t)) = pH(p) - h(0^+) \quad \Longrightarrow\ H(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{h(0^+)}{p}$$

Exemple :

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{p^2+4} \Longrightarrow\ \mathcal{L}\left(\int \sin 2u\, du = -\frac{1}{2}\cos 2t\right) = \frac{1}{p}\frac{2}{p^2+4} + \frac{-1}{2p}$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{p}{p^2+4}$$

5.6 Table de transformées de Laplace usuelles

De même qu'il existe des tables de primitives usuelles, des tables de développements limités usuels, il existe des tables de transformées de Fourier et des tables de transformées de Laplace de fonctions usuelles. Dans la table ci-dessous, il faudrait en toute rigueur indiquer les abscisses de convergence.

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$
1 ou $H(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ ou $e^{\alpha t}H(t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\cos(\omega t)$ $\sin(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$ch(\omega t)$ $sh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
t^n ou $t^n H(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}$ ou $t^n e^{\alpha t} H(t)$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

5.7Exercices

Exercice 4.1 : Pour chacune des fonctions $F(p)$ suivantes, trouver une fonction causale f telle que $\mathcal{L}(\,f(t)\ = F(p)$:

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} \quad , \quad F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$$

Exercice 4.2 : En utilisant la Transformée de Laplace de la fonction dérivée. Calculer la transformée de Laplace de : $\boldsymbol{f(t) = sin\,2t}$

5.7.1 Applications de la Transformée de Laplace à la résolution des équations différentielles

Exercice 4.3 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 3e^{-3t} \quad , \quad avec\ y(0) = y'(0) = 0$$

Exercice 4.4 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0 \quad , \quad avec\ y(0) = 3\ et\ y'(0) = -7$$

Exercice 4.5 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"() + 3y'(t) + 2y(t) = 1 \quad , \quad avec\ y(0) = y'(0) = 0$$

5.8 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3.1 :

1) Décomposons en éléments simples $F(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t) = \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t})$

2) De même, décomposons en éléments simples $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{p^2+1} - \frac{1}{p+1}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t})$

Solution de l'exercice 3.2 : Nous avons la transformée de Laplace de la fonction : $\cos \omega t$

$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{p}{p^2+2^2}$

Par définition on a aussi :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) \qquad ou\ f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

$$\mathcal{L}((\cos 2t)') = \frac{p^2}{p^2+4} - 1 = \frac{-4}{p^2+4} = -2\mathcal{L}(\sin 2t)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{p^2+4}$$

Solution de l'exercice 3.3 :

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y(p) + 6pY(p) + 9Y(p) = 3\frac{1}{p+3}$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{3}{(p+3)^3}$$

Et en utilisant la formule

$$\mathcal{L}(t^n e^{ct}) = \frac{n!}{(p-c)^{n+1}} \Longrightarrow \mathcal{L}(t^2 e^{-3t}) = \frac{2!}{(p-c)^3}$$

$$Y(p) = \frac{3}{2}\frac{2}{(p+3)^3} \Longrightarrow y(t) = \frac{3}{2}t^2 e^{-3t}$$

Solution de l'exercice 3.4 : La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y(p) - 3p + 7 + 5pY(p) - 15 + 6Y(p) = 0$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{3p+8}{p^2+5p+6} = \frac{3p+8}{(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}$$

Par conséquent on trouve

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}$$

Solution de l'exercice 3.5 : La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y(p) + 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2(p+2)}$$

Par conséquent on trouve

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$