Chapitre 6

Transformation de Fourier

Chapitre 6 : Transformations de Fourier

La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques.

La transformée (continue) de Fourier (également appelée intégrale de Fourier) associe à une fonction

$F(x)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une autre fonction notée $\mathcal{F}(F(x))(\omega)$ ou plus simplement $\hat{F}(\omega)$; ω est une variable indépendante de x, appelée variable duale.

$$F\ :\ F(x) \longmapsto \hat{F}(\omega) \equiv \mathcal{F}(F(x))(\omega) \tag{6.1}$$

Lorsque la fonction $F(x)$ représente un signal, une image, une onde sonore, électromagnétique (x désignant la variable de temps ou d'espace), sa transformée de Fourier $\hat{F}(\omega)$ est son spectre avec ω qui représente la fréquence ou la pulsation.

6.1 Définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$

Définition : Soit une fonction $F(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}(ou\ \mathbb{R})$, F intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens $F \in L^1(\mathbb{R})$:

L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|\, dx$ est finie c.-à-d. convergente.

La transformée de Fourier de F est la fonction $\mathcal{F}(F) = \hat{F}$ définie par :

$$\mathcal{F}(F): \omega \longmapsto \hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx \tag{6.2}$$

Où e^{iz} désigne l'exponentielle complexe.

Notons que même pour F à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\hat{F}$ est (a-priori) à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La transformation de Fourier F est un opérateur qui transforme une fonction $F(x)$ sur R, intégrable, en une autre fonction $\hat{F}(\omega)$; ω est appelée variable duale.

Remarques

- Il est possible de choisir une définition légèrement différente pour la transformation de Fourier; cela n'est qu'une question de convention dont les conséquences ne se sont que des facteurs multiplicatifs dans les formules à venir (notamment dans l'expression de la transformée de Fourier inverse). Typiquement selon les communautés scientifiques, e.g. mécaniciens, électroniciens, physiciens quantiques etc., on considèrera les définitions suivantes :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i2\pi\omega x}dx \quad ou\ encore\ \hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i2\pi\omega x}dx \qquad (6.3)$$

- On peut définir la transformée de Fourier pour une fonction F à plusieurs variables : $F(x_1,\ldots,x_n)$. Si on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, $(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\omega_j$, alors on a :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)e^{-i(\omega,x)}dx \qquad (6.4)$$

Typiquement en traitement d'images, on effectue des transformations de Fourier à deux dimensions.

Par ailleurs la transformée de Fourier d'une fonction radiale est radiale.

- Les situations types sont les suivantes :
  a. la variable primale x est le temps (s) ; dans ce cas, la variable duale ωa la dimension d'une fréquence (Hz). $\hat{F}(\omega)$représente alors le spectre fréquentiel du signal $F(x)$.
  b. la variable primale x est une position (m) ; dans ce cas, la variable duale ω a la dimension de l'inverse d'une longueur. ξ désigne ce que l'on appelle le vecteur d'onde.
  c. Un exemple physique remarquable sont les phénomènes de diffraction qui donnent une image de l'espace dual du réseau ; ils sont en quelque sorte une « machine naturelle à transformation de Fourier ».

6.2 La transformée inverse

Si $\hat{F}(\omega)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut on peut obtenir $F\ (\ x)$ à partir de $\hat{F}(\omega)$ par la transformation inverse (dite formule d'inversion de Fourier):

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{F})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\omega)e^{+ix}d\omega \qquad (6.5)$$

6.3 Propriétés de la transformée de Fourier

6.3.1 Linéarité

Par construction, l'opérateur transformé de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$ est linéaire. En effet, pour $(f,g)(x)$ fonctions satisfaisant les conditions d'existence de leurs transformées de Fourier respectives, et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}(af(x)+bg(x)) = a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x)) = a\hat{f} + b\hat{g} \tag{6.6}$$

6.3.2 Symétrie du graphe de $\left|\hat{F}(\omega)\right|$

On a

$$\left|\hat{F}(\omega)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\cos\omega x\,dx\right|^2 + \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\sin\omega x\,dx\right|^2 \tag{6.7}$$

$Donc\ \forall\omega \in \mathbb{R}, \left|\hat{F}(-\omega)\right|^2 = \left|\hat{F}(\omega)\right|^2$

Le module de $\hat{F}(\omega)$ est une fonction paire.

6.3.3 Translation

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}\big(F(x-a)\big)(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{F}(\omega) \tag{6.8}$$

A une translation de $F(x)$ correspond un déphasage de $\hat{F}(\omega)$; le terme $Im(e^{-i\omega a}) = -\sin\omega a$ étant un facteur de phase.

6.3.4 Modulation (translation fréquentielle)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}\left(e^{+iax}F(x)\right)(\omega) = \hat{F}(\omega - a) \tag{6.9}$$

6.3.5 Changement d'échelle - dilatation dans le « domaine temporel »

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\mathcal{F}\big(F(ax)\big)(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{F}\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.10}$$

6.3.6 Dérivation dans le domaine temporel

Si F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et dérivable, si sa dérivée F' est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors la transformée de Fourier de la dérivée de F est :

$$\widehat{F'}(\omega) = i\omega\hat{F}(\omega) \tag{6.11}$$

Par récurrence pour F de classe $\mathbb{C}^k$ et si chaque fonction dérivée est intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\widehat{F^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k\hat{F}(\omega) \tag{6.12}$$

6.3.7 Dérivation dans le domaine fréquentiel

Si $\hat{F}$ est dérivable, on a :

$$\hat{F}'(\omega) = -i\widehat{xF(x)}(\omega) \tag{6.13}$$

Par récurrence pour $\hat{F}$ de classe $\mathbb{C}^k$, on obtient :

$$\hat{F}^{(k)}(\omega) = (-i)^k\widehat{x^kF(x)}(\omega) \tag{6.14}$$

6.3.8 Convolution

Le produit de convolution des fonctions réelles ou complexes $f\ et\ g$ est la fonction $f * g$ définie comme suit :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x-y)g(y)dy \tag{6.15}$$

On dit que f est convoluée avec g.

On voit que la convolution est commutative :

$$(f * g)(x) = (g\ *)(x) \tag{6.16}$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit des transformées :

$$\mathcal{F}\big((f * g)(x)\big)(\omega) = \hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega) \tag{6.17}$$

6.4 Tableau de transformées de Fourier usuelles

La plupart des transformées de Fourier peuvent être trouvées en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier de la section 6.3 À partir de des propriétés de la transformée de Fourier, une liste des paires de transformée de Fourier importantes est donnée dans le tableau suivant :

Fonction f	Transformée de Fourier
$f = \chi_{[-a,a]}$ $a \in \mathbf{R}_+,\ a < b$	$\dfrac{\sin(2\pi a p)}{\pi p}$
$f = \chi_{[a,b]}$ $a, b \in \mathbf{R},\ a < b$	$e^{-2i\pi p \frac{a+b}{2}} \dfrac{\sin\left(\pi(b-a)\right)}{\pi p}$
$f(x) = \dfrac{x^k}{k!} e^{-ax} \chi_{[0,+\infty[}(x)$ $a > 0$	$\dfrac{1}{(a+2i\pi p)^{k+1}}$
$f(x) = \dfrac{x^k}{k!} e^{ax} \chi_{]-\infty,0[}(x)$ $a > 0$	$-\dfrac{1}{(2i\pi p - a)^{k+1}}$
$f(x) = e^{-a\|x\|}$ $a > 0$	$\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 p^2}$
$f(x) = (1 - \|x\|)\chi_{[-1,1]}(x)$	$\dfrac{\sin^2(\pi p)}{(\pi p)^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$	$e^{-\sigma^2 \pi^2 p^2}$

6.5 Application de la transformée de Fourier à la résolution des équations différentielles

6.5.1 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $\mathcal{F}(f) = \hat{F}$ Alors on a :

$$\mathcal{F}\big(f'(x)\big) = i\omega\hat{F}(\omega) \quad et\, \mathcal{F}\big(f''(x)\big) = (i\omega)^2\hat{F}(\omega) \tag{6.17}$$

En générale :

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}(x)\right) = (i\omega)^k\hat{F}(\omega) \tag{6.18}$$

Exemple : En appliquant la transformée de Fourier trouver une solution de l'équation différentielle suivante :

$$-y"(x) + y(x) = e^{-x^2} \tag{6.19}$$

Appliquons la transformée de Fourier , on obtient

$$\mathcal{F}(-y"(x)) + \mathcal{F}(y(x)) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

Soit la transformée de Fourier de la fonction $y(x)$est

$$\mathcal{F}(y(x)) = \hat{Y}(\omega)\ alors\ \mathcal{F}(y"(x)) = (i\omega)^2\hat{Y}(\omega) \ = -\,\omega^2\hat{Y}(\omega)$$

L'équation (6.17) devient :

$$\Longrightarrow\ (\omega^2+1)\hat{Y}(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2+1)}\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

Et on a $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{|x|}\right) = \frac{1}{(\omega^2+1)}$

Alors

$$\hat{Y}(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{|x|}\right).\mathcal{F}\left(\quad ^{-x^2}\right)$$

Ainsi :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}e^{-x^2}$$

6.6 Exercices

Exercice 6.1 : Montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\qquad a > 0$

Exercice 6.2 : Montrer que : $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ $\qquad a > 0$

Exercice 6.3 :

a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0 & si\ |x| \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b) Même question pour la fonction triangle

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

c) Exprimer $\Delta'(x)$ à l'aide de $\Pi(x)$.

d) En utilisant la relation obtenue dans c), retrouver le résultat de b}.

e) Déterminer le produit de convolution $\Pi * \Pi$et en déduire le résultat obtenu dans la question b).

Exercice 6.4 : sachant que la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est donné par :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-|\omega|}$$

Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 6.5 : Résoudre l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad avec\ u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty \quad , t > 0$$

6.7 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 6.1 :

$$Soit\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \ \ on\ peut\ ecrire$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy$$

On procède par changement de variables. Soit la substitution :

$$x = r\cos\theta \quad , y = r\sin\theta$$

D'où

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , dxdy = drd\theta$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\ dydx$$

$$I^2 = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-ar^2} rdr\ d\theta = \int_{0}^{+\infty} e^{-ar^2} rdr \int_{0}^{2\pi} d\theta\ = \frac{\pi}{a}$$

Finalement on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx\ = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Solution de l'Exercice 6.2 :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}. e^{-i\omega x} dx$$

Par intégration par partie on trouve :

$$\hat{F}(\omega) = \frac{-1}{i\omega} e^{-ax^2}.e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.(-2ax)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$\hat{F}(\omega) = -\frac{2a}{\omega}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.(-ix)e^{-i\omega x}\,dx}_{=\frac{\hat{F}}{d\omega}(\omega)}$$

$$\hat{F}(\omega) = \frac{-2a}{\omega}\frac{d\hat{F}}{d\omega}(\omega)$$

On obtient donc l'équation différentielle séparable :

$$\frac{d\hat{F}}{\hat{F}} = \frac{-1}{2a}\omega d\omega$$

$$\ln \hat{F} = \frac{-1}{4a}\omega^2 + k$$

$$\Longrightarrow \hat{F}(\omega) = k e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$$

Pour déterminer la constante k on pose :

$$k = \hat{F}(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.e^{-i0x}dx \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Solution de l'Exercice 6.3 :

a) On a :

$$\mathcal{F}(\Pi(x))(\omega) = \hat{\Pi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x).e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega x}dx = \frac{-1}{i\omega}\left(e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{+i\frac{\omega}{2}}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}$$

b) Notons que la fonction $\Delta(x)$est paire, on a pour $\omega \neq 0$,

$$\widehat{\Delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x).e^{-i\omega x}dx = \int_{-1}^{1} (1-|x|)e^{-i\omega x}dx = 2\int_{0}^{1} (1-x)\cos\omega x\, dx$$

On intégré par partie on trouve :

$$\widehat{\Delta}(\omega) = 2\left(\frac{(1-x)}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^1 + \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega x\, dx\right)$$

$$\widehat{\Delta}(\omega) = 2\left(\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x\Big|_0^1\right) = \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

c) On vérifie aisément que: $\Delta'(x) = \Pi\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$

d) $\widehat{\Delta}'(\omega) = \mathcal{F}\big(\Delta'(x)\big) = \mathcal{F}\left(\Pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \mathcal{F}\left(\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$$= e^{+i\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}\big(\Pi(x)\big) - e^{-i\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}\big(\Pi(x)\big)$$

$$= 2i\sin\frac{\omega}{2}\mathcal{F}\big(\Pi(x)\big)$$

$$\widehat{\Delta}'(\omega) = \frac{4i}{\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

Or on a aussi : $\widehat{\Delta}'(\omega) = i\omega\mathcal{F}\big(\Delta(x)\big)$

$$\widehat{\Delta}'(\omega) = i\omega\left(\frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4i}{\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

e)

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(y).\Pi(x-y)dy$$

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(x-y)dx$$

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \Pi(s)ds \qquad en\,posant\; s = x - y$$

$$\Pi * \Pi(x) = \begin{cases} 1 + x & si - 1 < x < 0 \\ 1 - x & si \quad 0 < x < 1 \\ \quad 0 & si|x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\Pi * \Pi(x) = \Delta(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

on sait aussi que :

$$\mathcal{F}(\Pi * \Pi(x)) = \mathcal{F}(\Pi(x))\mathcal{F}(\Pi(x))$$

$$\mathcal{F}(\Pi * \Pi(x)) = \mathcal{F}(\Delta(x)) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

Solution de l’Exercice 6.4 :

On remarque que

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{-1}{2}\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right) = \frac{-1}{2} \times \; i\omega\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{-i\omega\pi}{2}e^{-|\omega|}$$

Solution de l’Exercice 6.5 :

La transformée de Fourier de l’équation de la chaleur par rapport à la variable x est une équation différentielle séparable en t avec paramètre ω :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)(\omega) = c^2\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\big(u(x,t)\big)(\omega) = c^2(-i\omega)^2\mathcal{F}\big(u(x,t)\big)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = c^2(-i\omega)\hat{u} \Longrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\hat{u}} = -\omega^2 c^2 \partial t$$

$$\ln \hat{u} = -c^2\omega^2 t + k$$

$$\hat{u} = ke^{-c^2\omega^2 t}$$

On emploie la transformée de Fourier de la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x) \Longrightarrow \hat{u}(x,0) = f(\omega) = k$$

On a donc :

$$\hat{u} = f(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}$$

Le second membre est le produit de deux fonctions de ω, donc sa transformée de Fourier inverse sera une convolution

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\big(f(\omega)\big) *. \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right)$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\big(f(\omega)\big) *. \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{4c^2t}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}\, dy$$

Bibliographie

[1] Ahmed Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace Cours et exercices*, Ellipses, Paris, (2012).

[2] Claire David Pierre Gosselet, *Equationsaux dérivées partiellesCours et exercices corrigés*, DUNOD, Paris, (2012).

[3] MURRAYR.SPIEGEL, *THEORIE ET APPLICATIONS DE L'ANALYSE*, McGraw-Hil, Paris, (1973).

[4] مسعود حناشي شنيتي بن سلوى، دروس و تمارين في التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر (2001)