

Chapitre 3

Cinématique des fluides

DOUGHA MOSTEFA

4.1. Dynamique des fluides incompressibles

La dynamique tient en considération la description des mouvements en présence des efforts appliqués, la connaissance de loi de comportement et l'application de principe fondamental de la dynamique.

En mécanique des fluides, un fluide parfait est un milieu à l'intérieur duquel les forces intermoléculaires de cohésion sont supposées nulles (Effet de la viscosité est négligeable) pendant le mouvement. Nous disons un fluide parfait est un milieu non visqueux.

Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de viscosité se manifestent. Les pertes d'énergie sont présentes.

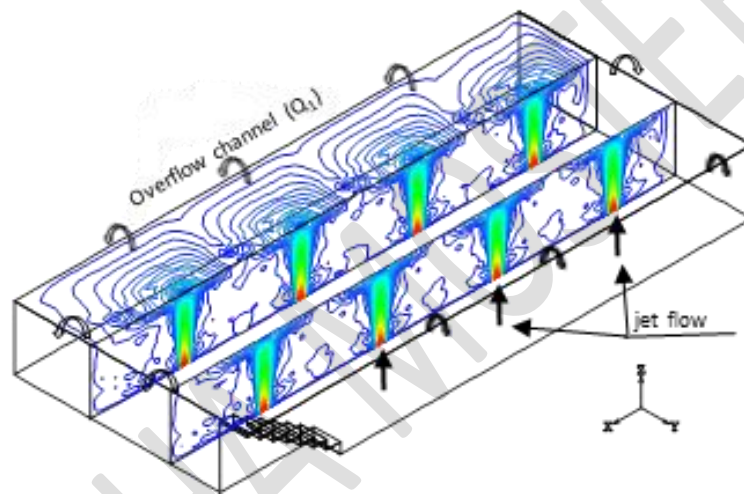


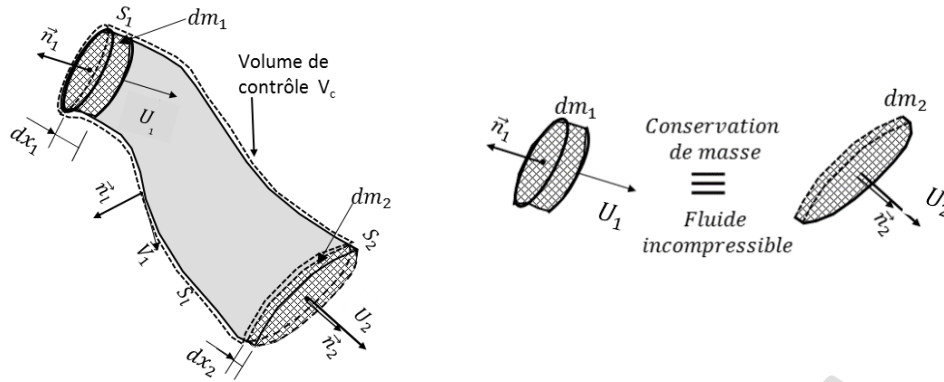
Figure 4.1 : Dynamique de l'eau dans une piscine thermale (d'après M. Dougha 1999).

4.1.1 Equation de continuité (principe de conservation de masse)

4.1.1.1 Écoulement monodimensionnel :

Il s'agit des écoulements qui circulent dans les conduites (ou tubes), étudiés sur le plan de vitesse moyenne et pression moyenne. Ils sont des écoulements monodimensionnels.

Considérons un tube de lignes de courant d'un fluide incompressible en écoulement permanent, de masse volumique ρ .



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du tube de fluide,
- \vec{U}_1 et \vec{U}_2 sont les vecteurs de vitesse moyenne d'écoulement au centre des masses de fluide (ensemble de volumes élémentaires) dm_1 et dm_2 , voir la figure ci-dessus.

A l'instant t : le fluide dans le volume de contrôle a une masse M

A l'instant $t + dt$: le volume de contrôle reçoit une nouvelle masse dm_1 et en même temps, libère une autre masse dm_2 .

Par conservation de la masse d'un fluide incompressible : $dm_1 = dm_2$

Donc $\rho \cdot dV_1 = \rho \cdot dV_2$ ou encore $\rho \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho \cdot S_2 \cdot dx_2$

En divisant par dt nous aboutissons à :

$$\frac{\rho \cdot S_1 \cdot dx_1}{dt} = \frac{\rho \cdot S_2 \cdot dx_2}{dt} \Rightarrow \rho \cdot S_1 \cdot U_1 = \rho \cdot S_2 \cdot U_2$$

ρ : est constante pour un fluide incompressible. U_1 et U_2 sont des vitesses moyennes dans les sections S_1 et S_2 respectivement.

Nous pouvons simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$\underbrace{S_1 \cdot U_1}_{\text{Débit volumique } (Q_1)} = \underbrace{S_2 \cdot U_2}_{\text{Débit volumique } (Q_2)} \quad (4-1)$$

4.1.1.2 Equation de continuité généralisée

Principe de conservation de masse : Dans un volume de contrôle, la variation de masse de fluide égale à la variation interne de masse plus le bilan des échanges de masse entrants et sortants.

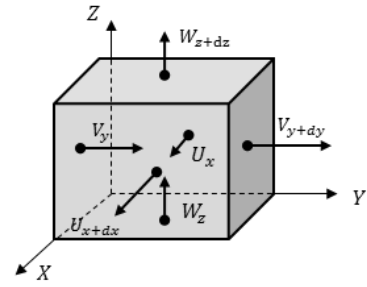
Hypothèse : pas de masse créée ou détruite pendant le temps dt dans le volume élémentaire.

On considère un volume élémentaire de fluide : $dV = dx dy dz$ dans un volume de contrôle, sa masse peut s'exprimer comme ρdV .

La variation de cette masse pendant dt s'écrit :

$$dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \cdot dt$$

Cette variation est égale à la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les six faces du volume élémentaire.



Suivant l'axe \vec{oy} , le fluide rentre avec la vitesse $v(y)$ et sort avec la vitesse $v(y + dy)$. Par conséquent, la masse entrante pendant le temps dt s'exprime par $\rho \cdot v(y) \cdot dx dz dt$ et la masse sortante est donnée par $\rho \cdot v(y + dy) \cdot dx dz dt$.

Le bilan selon l'axe \vec{oy} donne $[\rho \cdot v(y) - \rho \cdot v(y + dy)] \cdot dx dz dt$. Un développement au premier ordre permet d'écrire :

$$\rho \cdot v(y + dy) = \rho \cdot v(y) + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} dy$$

Il reste alors le terme : $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz dt$ suivant l'axe \vec{oy}

Par analogie sur les deux autres axes, on trouve :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy dx dz dt \text{ suivant l'axe } \vec{ox}, \text{ et } -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dy dx dz dt \text{ suivant l'axe } \vec{oz}.$$

Au total, à travers les six faces on a : $d\mathbf{m} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt$

La conservation de la masse du volume élémentaire s'écrit donc :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt$$

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Ou

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (4-2)$$

Dans un écoulement permanent et fluide incompressible ($\rho = Ct$), l'équation de continuité est :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Remarque

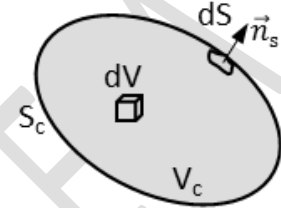
La divergence est négative alors le fluide est en phase de compression ($d\rho/dt > 0$). La divergence est positive nécessite que le fluide soit en phase de dilatation ($d\rho/dt < 0$). La divergence à zéro indique que le fluide est incompressible.

L'équation de continuité peut également s'établir à partir d'un bilan global. Lorsqu'on effectue un bilan non plus sur un volume élémentaire, mais sur un volume de contrôle de fluide, les quantités étudiées apparaissent sous forme d'intégrales de volume:

Où, puisque le volume de contrôle V_c est fixe :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

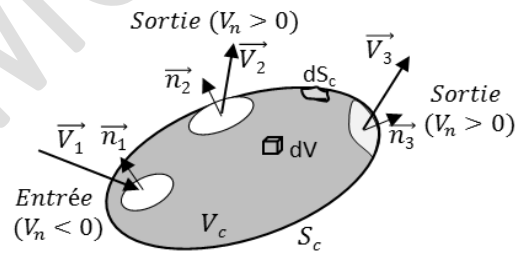
Cette relation est valable indépendamment de V_c .



4.1.2 Théorème d'Euler (Bilan de quantité de mouvement)

Ce théorème traduit l'équilibre de la résultante des forces extérieures appliquées au fluide dans le volume (V_c) limité par la surface (S_c) d'un côté et la variation temporelle de la quantité de mouvement de fluide dans ce volume d'autre côté.

D'où :



$$\sum \vec{F}_{Ext} = \frac{d}{dt} (\sum (dm \cdot \vec{v})) = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} \cdot dV \quad (2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton})$$

$dm \cdot \vec{v}$: Quantité de mouvement d'un volume élémentaire (dV).

Le terme de variation peut être développé en fonction de débit et de vitesse instantanée :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} \cdot dV = \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Pour un fluide incompressible et écoulement permanent, le premier terme du deuxième membre de la relation ci-dessus est nul, et le développement du deuxième terme des flux donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} \cdot dV = \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \rho \sum (Q_{Sortant} \cdot \vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant} \cdot \vec{U}_{Entrante})$$

Donc, on peut dire que :

$$\sum \vec{F}_{Ext} = \rho \sum (Q_{Sortant} \cdot \vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant} \cdot \vec{U}_{Entrante}) \quad (4-3)$$

C'est une équation vectorielle, donc pour l'utiliser, il faut faire les projections sur les axes.

Avec : $Q_{Sortant}$, $\vec{U}_{Sortante}$ sont le débit sortant et la vitesse moyenne sortante du volume de contrôle, respectivement.

$Q_{Entrant}$, $\vec{U}_{Entrante}$ sont le débit entrant et la vitesse moyenne entrante du volume de contrôle, respectivement.

\vec{F}_{Ext} : sont les forces extérieures appliquées sur le volume de contrôle de fluide. Ces forces représentent :

- La force volumique est exprimée par le poids de fluide (champ de gravité),
- Les forces de surface sont exprimées par la force de pression et la résultante des forces de frottement \vec{R} (existe dans le cas de présence une interaction fluide/solide).

Remarque

L'intérêt de ce théorème est qu'il ne nécessite pas de connaître les forces de frottement interne dans le fluide mais il nécessite de connaître la réaction R de l'environnement extérieur sur le volume de contrôle de fluide.

Application n° : 1

Hypothèses : Ecoulement permanent, fluide incompressible et parfait

En pratique, le théorème d'Euler permet de calculer la résultante des forces extérieures de surface alors que leur répartition locale sur la surface limitant le domaine reste inconnue. Il suffit pour cela de choisir le domaine de contrôle V_C car nous connaissons le flux de quantité de mouvement à travers sa surface limite.

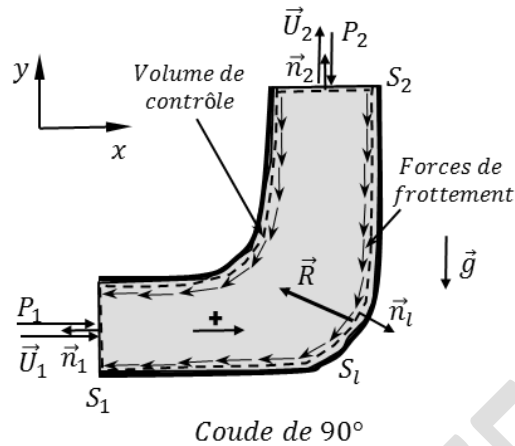
Ce théorème a une utilisation très large pour les applications hydrauliques et aérodynamiques, certains des plus classiques sont présentés ci-dessous.

- **Effort exercé par un fluide sur un coude de conduite.**

C'est la résultante de ces efforts de pression que l'on se propose de calculer en régime permanent, en négligeant les effets visqueux et en supposant le fluide incompressible.

En appliquant l'expression vectorielle du théorème d'Euler 4.3 pour un tube de courant limité par un coude, on a :

$$\sum \vec{F}_{Ext} = \rho \sum (Q_{Sortant} \cdot \vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant} \cdot \vec{U}_{Entrante})$$



$$-p_1 S_1 \vec{n}_1 + p_2 S_2 \vec{n}_2 + \iint_{S_l} -p \vec{n}_l dS + m \vec{g} = \rho (Q_2 \vec{U}_2 - Q_1 \vec{U}_1)$$

La résultante des efforts exercés par le coude sur le fluide à travers la surface latérale S_l est :

$$\vec{R} = \iint_{S_l} -p \vec{n}_l dS$$

Suivant le principe de conservation de masse, on a : $\rho U_1 S_1 = \rho U_2 S_2$

La résultante des forces exercées par le fluide interne sur la surface S_l du coude est $-\vec{R}$ (d'après la loi d'action / réaction) d'où finalement en remplaçant :

$$-\vec{R} = m \vec{g} - [(\rho U_1^2 + P_1) S_1 \vec{n}_1 + (\rho U_2^2 + P_2) S_2 \vec{n}_2]$$

Avec : $m \vec{g}$ est le poids du liquide contenu dans le coude. Dans le cas où les vitesses sont importantes, le poids de fluide devient négligeable par rapport au reste des termes de l'équation vectorielle.

La formule trouvée est une équation vectorielle qui nécessite la projection sur les axes pour trouver les deux composantes de \vec{R} .

4.1.3 Théorème de Bernoulli (principe de conservation d'énergie)

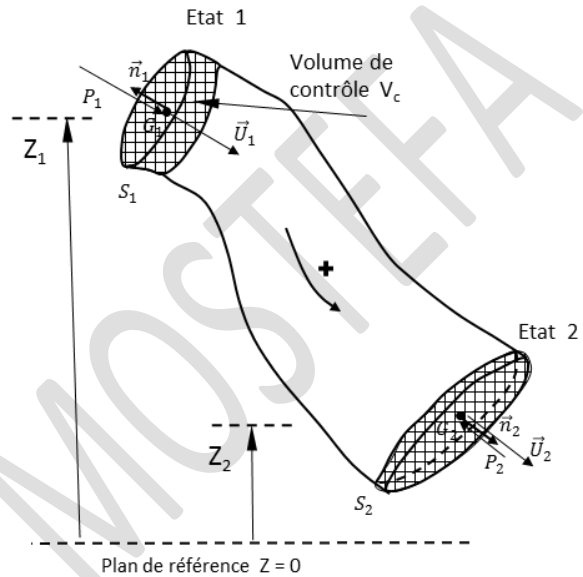
a) Théorème de Bernoulli sur un écoulement de fluide parfait

Il s'agit de faire le bilan d'énergie d'un ensemble de volumes élémentaires limités par le volume de contrôle qui s'écoulent de l'état 1 vers l'état 2, voir la figure ci-dessous.

Hypothèses de travail :

1. Le fluide est incompressible.
2. L'écoulement est permanent (stationnaire).
3. Le fluide est parfait (c'est-à-dire non visqueux, pas de perte d'énergie).
4. le fluide est newtonien (voir paragraphe 1.2.4)

Considérons un tube de lignes de courant dans un écoulement. Choisissons un volume de contrôle V_C qui s'écoule d'une vitesse moyenne \vec{U} . Le volume subit à une pression P est placé à une côte Z par rapport à un plan horizontal de référence.



Question : quelles sont les énergies produites par le volume de contrôle ?

Réponse :

- 1) Energie cinétique due à sa vitesse moyenne : $E_C = \frac{1}{2}m.U^2$; m : masse du volume V_C
- 2) Energie potentielle due à la pression : $E_P = P.V_C = P \frac{m}{\rho}$; ρ : masse volumique
- 3) Energie potentielle due à l'altitude (position) : $E_Z = m.g.Z$

Par définition, l'énergie totale (E_T) du volume de contrôle V_C est :

$$E_T = E_C + E_P + E_Z = \frac{1}{2}m.U^2 + P \frac{m}{\rho} + m.g.Z$$

Avec : $[E_T]$: N.m = Joule

Nous voudrions connaître l'énergie de fluide par unité de poids ($m.g$) et qui est donnée par :

$$H_T = \frac{E_T}{m.g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + Z$$

$$H_T = H_C + H_S$$

Avec :

H_T : est la charge hydraulique totale,

Le terme $H_c = \frac{U^2}{2g}$ est la charge cinétique ou la charge dynamique,

Le terme $H_s = \frac{P}{\rho g} + Z$ est la charge piézométrique ou la charge statique,

H_T, H_c, H_s : sont des hauteurs par unité de colonne de fluide ($m_{c\ fluide}$).

Nous voudrions maintenant connaître la variation de la charge hydraulique totale d'un fluide qui s'écoule d'un état vers d'autre.

Suivant la figure ci-dessus, le volume de contrôle V_C en état (1) à une charge hydraulique totale (H_1) et en état (2) à une charge hydraulique totale (H_2).

$$\text{Etat 1 :} \quad H_1 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + Z_1$$

$$\text{Etat 2 :} \quad H_2 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + Z_2$$

Suivant le principe de conservation de l'énergie entre les deux états (1) et (2), avec l'absence des frottements dans l'écoulement (Fluide parfait), c.-à-d., pas de perte de charge, est que :

$$H_1 \stackrel{\text{Fluide parfait}}{=} H_2$$

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

U_1 et U_2 : vitesses moyennes (m/s) au centre de gravité du volume de contrôle V_C .

Z_1 et Z_2 : hauteurs statiques (m) par rapport au plan horizontal de référence.

Pour un fluide incompressible et parfait dans un écoulement permanent la charge totale suivant le théorème de Bernoulli est :

$$H_T = \frac{E_T}{m \cdot g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + Z = \text{Constant} \quad [m_{cf}] \quad (4-4)$$

L'équation de Bernoulli montre que la pression totale reste constante le long d'un écoulement dans le cas d'un fluide parfait (absence des pertes d'énergie).

Remarque

L'équation de Bernoulli peut également s'interpréter en termes de pression (énergie par unité de volume). L'équation (4.12) devient :

$$P_T = P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad [\text{pa}]$$

P_T : est la pression totale.

P : est la pression statique (elle existe même s'il n'y a pas de mouvement),

$P + \rho g z$: est la pression motrice ; elle génère le mouvement ($\rho g z$ est la pression de pesanteur),

$\frac{1}{2} \rho v^2$: est la pression cinétique (ou pression dynamique); elle résulte du mouvement,

b) Théorème de Bernoulli sur un écoulement de fluide réel

Hypothèses de travail :

1. Le fluide est incompressible.
2. L'écoulement est permanent (stationnaire).
3. Fluide newtonien
4. Le fluide est réel visqueux (Présence des pertes d'énergie).

Cette fois, le fluide est non conservatif, c.-à-d., l'énergie totale d'un fluide visqueux n'est pas conservée au cours du temps, il y a dissipation de l'énergie mécanique sous forme de chaleur.

Suivant le principe de conservation d'énergie par unité de poids de fluide entre deux états de l'écoulement, voir la figure précédente :

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{12} \quad (4-5)$$

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{12}$$

Et suivant l'équation de continuité, le débit est le même :

$$; \quad U_1 = \frac{Q}{S_1} \quad U_2 = \frac{Q}{S_2}$$

Q : est le débit volumique.

ΔH_{12} : Pertes de charge entre l'état (1) et l'état (2) en $[m_{c\text{ fluide}}]$.

Les pertes de charge ΔH_{12} sont liées aux plusieurs paramètres hydrauliques et géométriques. Elles dépendent au régime d'écoulement, à la géométrie et à la nature des surfaces de contact.

4.1.3.1 Présentation graphique : lignes de charge piézométrique et cinétique

H_T : est la hauteur de la charge hydraulique totale.

$H_S = \frac{P}{\rho g} + Z$ est la hauteur de la charge piézométrique,

$H_C = \frac{U^2}{2g}$ est la hauteur de la charge cinétique,

$$H_T = H_C + H_S$$

Le théorème de Bernoulli peut alors être interprété à partir de l'évolution de différentes hauteurs le long du circuit. Comme illustré sur les figures 4.2 et 4.3, et en suivant l'unité de poids du fluide dans son trajet, trois lignes différentes peuvent être tracées.

- **Fluide parfait** : La présentation des lignes de charge piézométrique et de charge cinétique dans une conduite inclinée est donnée par :

La charge totale (H_T) est constante, pas de perte d'énergie dans l'écoulement ($\Delta H_{12} = 0$)

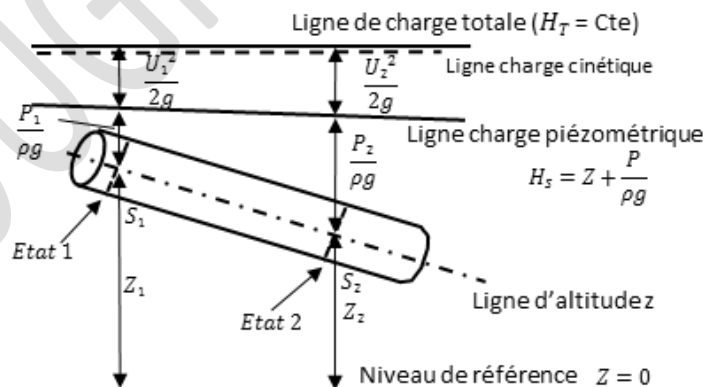


Figure 4.2 : Présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique d'un fluide parfait.

- **Fluide réel** : La présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique dans une conduite linéaire inclinée indique que la charge hydraulique totale (H_T) diminue avec la présence des pertes de charge (ΔH) dans l'écoulement, voir la figure 4.3.

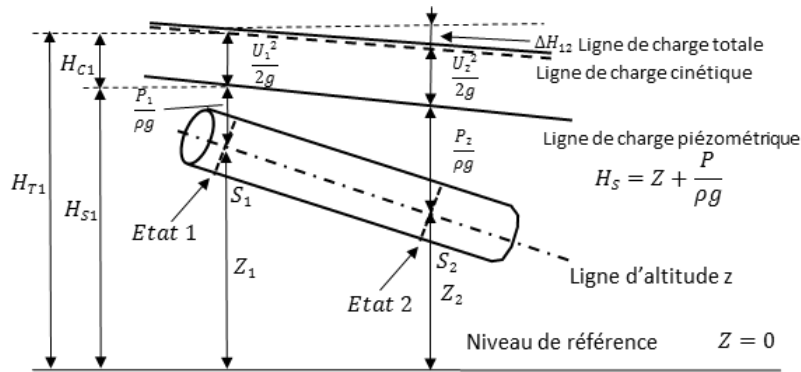


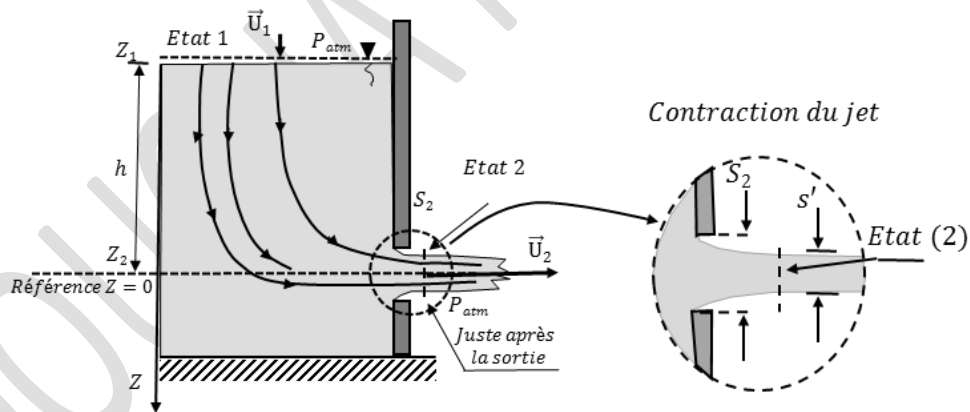
Figure 4.3 : Présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique d'un fluide réel dans une conduite inclinée.

4.1.3.2 Application du théorème de Bernoulli

a) Formule de Torricelli (1608 - 1647)

Il s'agit d'un écoulement de vidange d'un réservoir à travers un orifice, voir la figure.

Un réservoir plein de section (S_1), la vitesse de vidange à travers un orifice de section (S_2) est très petite devant comparée à celle du réservoir (S_1). Nous appliquons le théorème de Bernoulli sur l'écoulement entre l'état (1) de la surface libre et l'état (2) de la section juste après la sortie du jet.



Pour un fluide parfait

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{12} \quad \Delta H_{12} \rightarrow 0$$

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2$$

La pression juste après la S_2 du jet est égale à la pression atmosphérique, et qui est également celle de la surface libre ($P_1 = P_{atm}$).

Par conséquent $P_1 = P_2 = P_{atm}$

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du jet ; la surface libre est pratiquement au repos.

Suivant le principe de conservation de masse $Q_1 = Q_2 \Rightarrow U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2$ $U_1 \ll U_2$

Par conséquent :
$$\rho g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \rho U_2^2 \Rightarrow U_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

D'où la formule théorique de Torricelli reliant la vitesse de sortie à la hauteur h de liquide au-dessus de l'orifice est :

$$U_2 = \sqrt{2g \cdot h}$$

Expérimentalement, cette formule est corrigée soit pour la vitesse ou soit le débit (pour un fluide réel) :

$$U_2 = C_V \sqrt{2g \cdot h}$$

$$Q = U_2 \cdot S_2 = C_c \cdot C_V \cdot \sqrt{2 \times g \cdot h} = C_Q \cdot \sqrt{2 \times g \cdot h} \quad (4-6)$$

Avec : $C_c \approx \frac{\text{Section juste avant la sortie}}{\text{Section juste après la sortie}}$ est le coefficient de contraction, dépend de la géométrie de l'orifice. C_V est le coefficient de correction de vitesse par rapport à l'expérimental.

De manière générale, C_Q est déterminé expérimentalement. Dans le tableau 4.1, vous trouvez quelques valeurs du coefficient C_Q .




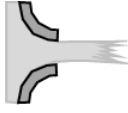
| Forme | Nomination | Valeur de C_Q |
|---|---------------------------|-----------------|
|  | Paroi mince | 0.61 |
|  | Paroi mince aigüe | 0.61 |
|  | Orifice à bords profilés | 0.50 |
|  | Orifice à bords rentrants | 1.00 |

Tableau 4.1 : Coefficient C_Q en fonction de la forme d'orifice.

b) Tube de Pitot (Henry Pitot (1692-1771))

Le tube de pitot est un instrument de mesure de la vitesse instantanée dans un écoulement. L'instrument se présente sous forme d'un corps cylindrique, de section circulaire. Il comprend une première prise de pression en avant de l'hémisphère et une seconde prise implantée à la périphérie du corps cylindrique, à distance convenable de l'extrémité amont.

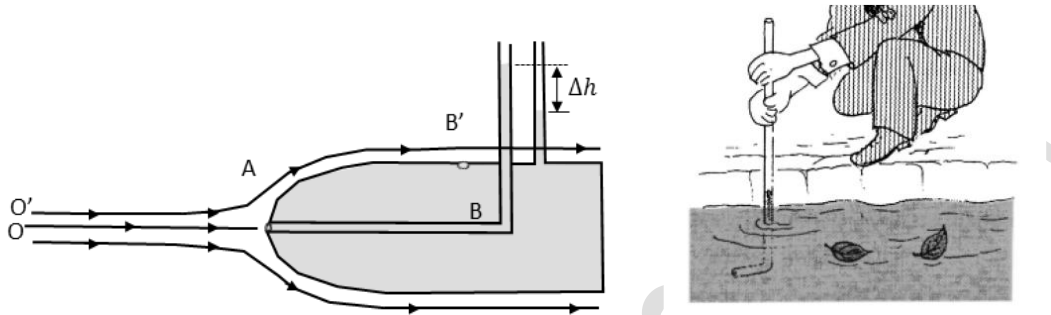


Figure 4.4 : Différents types de tube de Pitot et son mode d'utilisation.

Dans un écoulement permanent de fluide incompressible. L'application du théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant passant par le port O situé loin en amont et le port A où la vitesse est nulle (point d'arrêt généré sur le front d'attaque de l'objet) :

$$P_O + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_A$$

En O et O'. L'écoulement est uniforme et les lignes de courant sont rectilignes et parallèles ; la pression est donc la même en O et O'.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre O et B', situés sur la même ligne de courant :

$$P_O + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_{B'} + \frac{1}{2} \rho V_{B'}^2$$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le front de l'objet : $V_O = V$ d'où $P_{O'} = P_{B'}$ or, on a $P_O = P_{O'}$ et $P_B = P_{B'}$ par conséquent : $P_O = P_B$

$$P_B + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_A$$

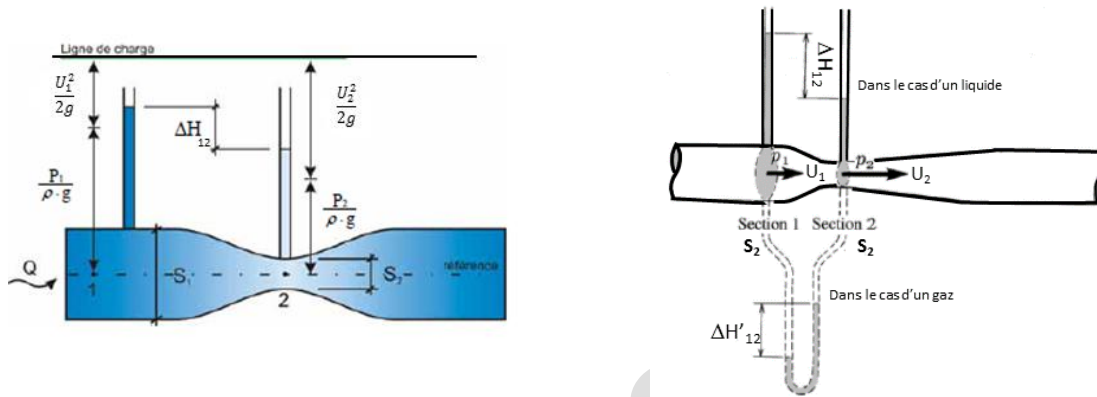
La vitesse instantanée de l'écoulement se déduit donc de la différence $P_A - P_B$

$$V = \sqrt{\left(\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}\right)} = \sqrt{2g\Delta h} \quad (4-7)$$

a) Venturi-mètre (Venturi 1746-1822)

Le tube de Venturi est utilisé pour les mesures de vitesse ou de débit d'un écoulement en conduite. Il consiste simplement à aménager une réduction de section comme la montre la figure ci-dessous.

Le théorème de Bernoulli quantifie que dans la section où la vitesse est élevée, la pression est basse, et vice versa.



Entre les deux sections (1) et (2), l'application du théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent et fluide parfait donne :

$$\frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} \quad \text{avec} \quad Z_1 = Z_2$$

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$

En outre, de l'équation de continuité donne : $U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2 = Q$

En conséquence, $S_1 > S_2 \Rightarrow U_1 < U_2$ suivant le principe de conservation de masse et $U_1 < U_2 \Rightarrow P_1 > P_2$.

Par contre pour un fluide réel, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + \Delta H_{12}$$

Donc, $\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \Delta H_{12}$ avec : ΔH_{12} : pertes de charge hydraulique

$$2g\Delta H_{12} = U_2^2 - U_1^2 = \left(\frac{Q}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{S_1}\right)^2 = Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g\Delta H_{12}}{\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)}} \quad (4-8)$$

Donc, le débit circulant dans la conduite peut être estimé par cette formule.

4.1.4 Différents régimes d'écoulement

4.1.6.1 Expérience d'Osborne Reynolds (1842-1912)

La figure ci-dessous montre le montage expérimental qui comprend un réservoir de liquide s'ouvrant sur une conduite cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant. Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre qu'elle fluctue de manière aléatoire.

Observations de Reynolds

| Variation de débit | Observation du colorant dans le tube | Régime d'écoulement |
|--------------------|--|-----------------------|
| Débit faible | Le filet colorant ne se mélange pas | — |
| Débit augmente | Le filet oscille en forme de sinusoïde | Écoulement laminaire |
| Débit encore plus | La sinusoïde oscille | Écoulement critique |
| Débit encore plus | Le filet explose et se mélange | Écoulement turbulent. |

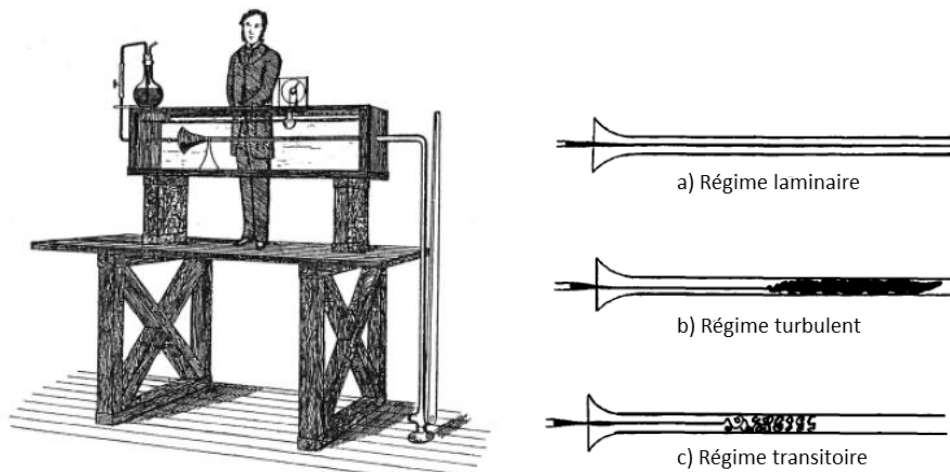


Figure 4.5 : Expérience de Reynolds, visualisation des régimes d'écoulement.

L'étude systématique du régime d'écoulement faite par Reynolds a été réalisée en fonction des différents paramètres intervenant dans le problème : la masse volumique du fluide (ρ), sa viscosité dynamique (μ), la géométrie de la conduite (D)..., etc. Reynolds a montré que la transition du régime laminaire au régime turbulent ne dépend pas

séparément de chacun des paramètres, mais d'une seule grandeur les regroupant tous dans un nombre adimensionnel nommé le nombre de Reynolds (Re) :

$$Re = \frac{\rho UD}{\mu} = \frac{UD}{\nu} \quad (4-9)$$

ρ : masse volumique de fluide en (kg/m^3),

$\nu = \mu/\rho$: viscosité cinématique en (m^2/S),

U : vitesse moyenne dans la section transversale de la conduite en (m/S),

D : Diamètre interne de la conduite en (m).

Pour $Re \leq 2000$, l'écoulement est laminaire. Le mouvement des volumes élémentaires de fluide se fait de façon régulière et ordonnée.

Pour $2000 < Re < 4000$, l'écoulement transitoire qui est caractérisé par la présence des perturbations localisées introduites dans l'écoulement est progressivement dissipée.

Pour $Re \geq 4000$, l'écoulement est turbulent, caractérisé par le déplacement irrégulier des volumes élémentaires et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent dans son ensemble. Les forces de viscosité ne sont plus suffisantes pour empêcher les volumes élémentaires de créer des perturbations turbulentes qui chevauchent l'écoulement global.

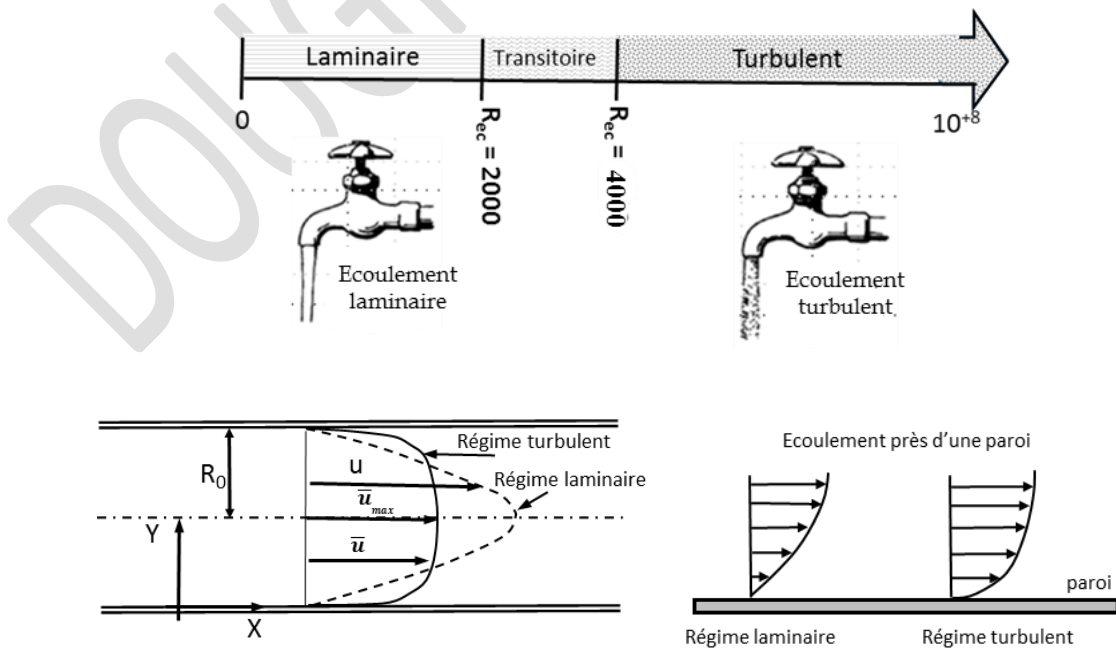
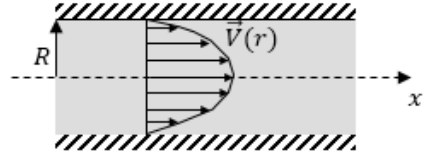


Figure 4.6 : Régimes d'écoulement : Laminaire, transitoire et turbulent.

4.1.6.2 Ecoulement laminaire et pertes de charge

La perte de charge est proportionnelle à la distance parcourue ; on dit que la perte de charge est régulière.

Si, on considère une conduite de longueur L , la perte de charge totale s'exprime par :



$$\Delta H = \frac{128\nu L Q_m}{\pi D^4}$$

et réciproquement, le débit massique est donné par

$$Q_m = \frac{\pi D^4 \Delta H}{128\nu L}$$

Il s'agit de la formule de Poiseuille.

On peut encore exprimer la perte de charge en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) 2\pi r dr$$

La vitesse moyenne également appelée vitesse débitante est la vitesse uniforme qui donnerait le même débit $Q_m = \rho U S$. La formule de Poiseuille s'écrit alors :

$$\Delta H = \frac{32\mu L U}{D^2} \quad (4-10)$$

Coefficient de perte de charge linéaire

La perte de charge par unité de longueur $\Delta H/L$ s'exprime généralement sous forme d'un coefficient sans dimension dit coefficient de perte de charge linéaire défini par :

$$\lambda = \frac{\Delta H/L}{\frac{1}{2} \rho U^2 / D}$$

Pour un écoulement laminaire dans une conduite, on a :

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{32\mu U}{D^2} = \left(\frac{32\mu U}{D^2} \frac{2}{\rho U^2} \right) \frac{1}{2} \rho U^2 = \left(\frac{64\mu U}{\rho D^2 U^2} \right) \frac{1}{2} \rho U^2$$

On voit apparaître le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

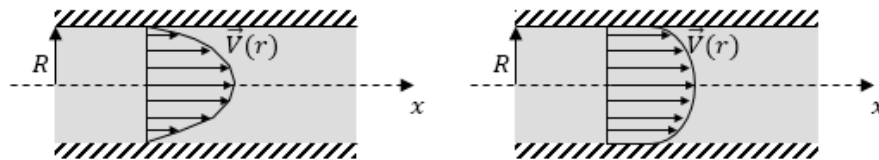
D'où le coefficient de perte de charge linéaire d'un écoulement laminaire en conduite :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (4-11)$$

Ceci est valide que pour $Re < 2000$

4.1.6.3 Ecoulement turbulent et pertes de charge

En régime turbulent, le profil de vitesse dans une conduite cylindrique n'est plus parabolique ; à cause des turbulences, les vitesses sont uniformisées sur un large domaine. On observe une brusque variation de vitesse au voisinage des parois.



Les coefficients de perte de charge linéaire λ devront être déterminés expérimentalement ou bien tirés d'abaques, comme le diagramme de Moody reproduit ci-dessous.

Puisque les pertes de charge sont liées aux contraintes de frottement τ de la paroi de la conduite, elles dépendent non seulement des paramètres de l'écoulement, mais de l'état de surface (plus ou moins lisse ou rugueux) de cette paroi. Cet état est généralement qualifié par une seule dimension géométrique ϵ , d'un ordre de grandeur comparable à la hauteur géométrique moyenne des aspérités de cette paroi.

4.1.6.4 Perte de charge linéaire

Si on considère un fluide qui s'écoule dans une conduite de longueur L de l'état (1) à l'état (2). La perte d'énergie due aux forces de frottements est sous la forme suivante :

$$\Delta H_t = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{U^2}{2}$$

L : est la longueur de la conduite en (m),

D : est le diamètre de la conduite en (m),

U : est la vitesse moyenne de fluide (m/s),

λ : est le coefficient de perte de charge linéaire. Il varie selon le régime d'écoulement.

- En écoulement laminaire, $Re < 2000$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (4-12)$$

- En écoulement turbulent lisse, $4000 < Re < 10^5$

- Formule de Blasius

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25} \quad (4-13)$$

En écoulement turbulent rugueux, $Re \geq 10^5$

- Formule de Colebrook-white

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,710 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (4-14)$$

Avec : $\frac{\varepsilon}{D}$ est la rugosité relative de la conduite

- Utilisation de l'abaque de Moody

Plusieurs travaux sur les pertes de charge dans les conduites ont permis d'élaborer un graphique (Diagramme de Moody) permettant de déterminer le coefficient λ en fonction de Re pour les différents types d'écoulement et des rugosités relatives ε/D :

$$\lambda = f \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (4-14)$$

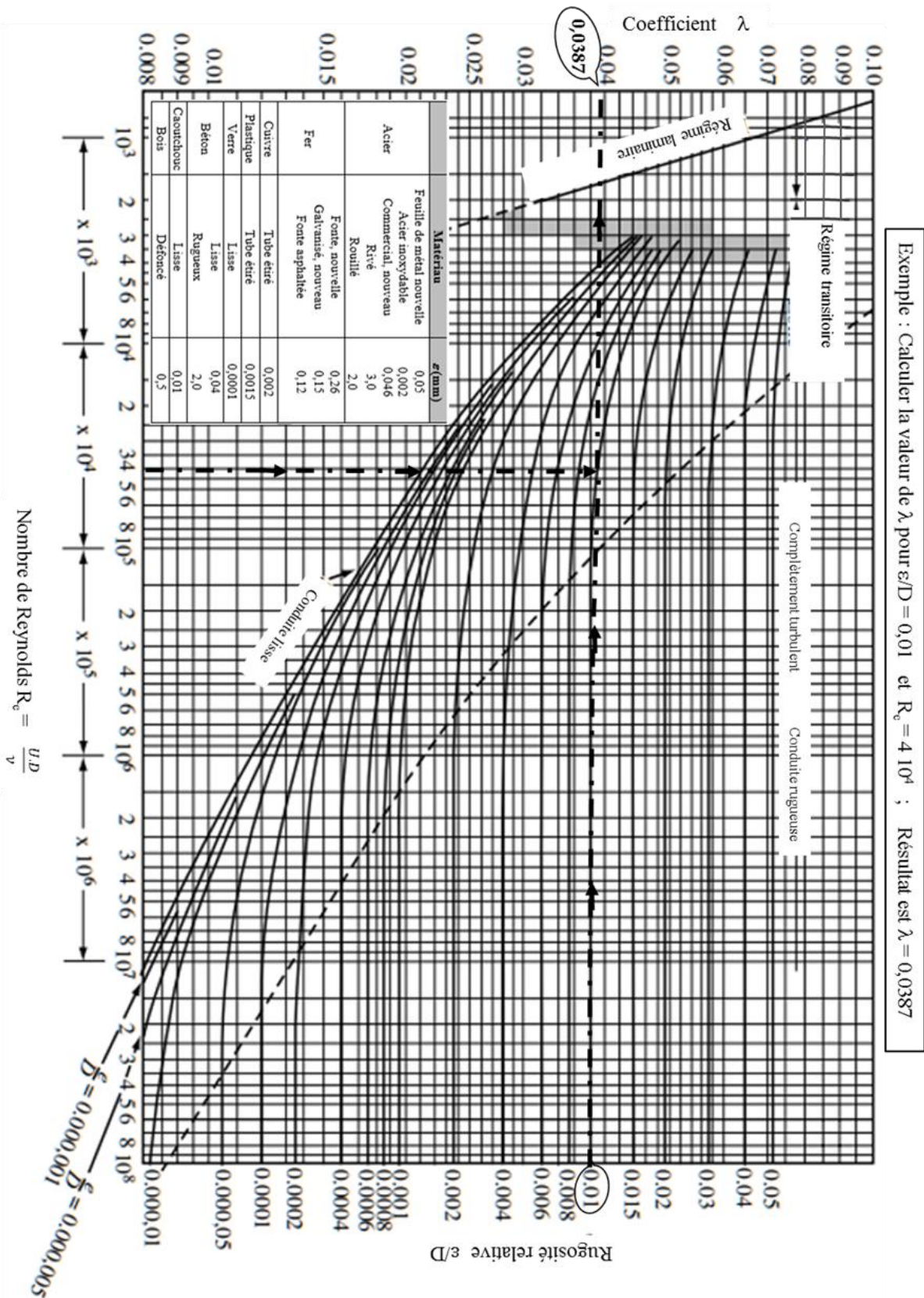


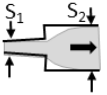
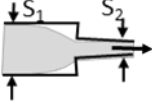
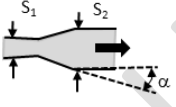
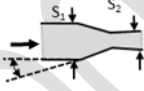
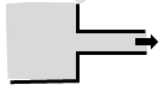

Figure 4.7 : Abaque de Moody pour calculer le coefficient de perte de charge linéaire λ

4.1.6.5 Pertes de charge singulières

La présence d'une singularité sur l'écoulement dans une conduite comme un coude, un diaphragme, un élargissement brusque, une contraction ...etc. Dans la pratique industrielle, cette perte de charge est écrite sous la forme :

$$\Delta H_{sing} = k \frac{U^2}{2g} \quad (4-15)$$

Où U est la vitesse moyenne prise avant ou après la singularité, K est le coefficient de perte de charge singulière, et qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds. Quelques singularités typiques sont reproduites ci-dessous :

| Forme | Nomination | Coefficient K_{sing} | Perte de charge singulière |
|---|------------------------|---|---|
|  | Élargissement brusque | $\left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2$ | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$ |
|  | Rétrécissement brusque | $0,5\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)$ | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$ |
|  | Divergence | $\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \sin(\alpha)$ | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$ |
|  | Convergent | $\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)^2 \sin(\alpha)$ | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_1^2}{2g}$ |
|  | Entrée brusque | 0,5 | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$ |
|  | Entrée progressive | 0,04 | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$ |

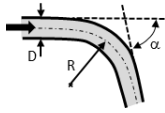
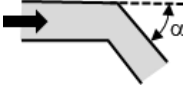
| | | | |
|---|---------------|--|---|
|  | Coude arrondi | $\frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847 (\frac{D}{R})^{7/2}]$ | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U^2}{2g}$ |
|  | Coude brusque | $\sin^2(\alpha) + 2 \sin^4(\frac{\alpha}{2})$ | $\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U^2}{2g}$ |

Tableau 4.2 : Coefficient de perte singulière K en fonction de forme de singularité.

4.1.6.6 Calcul des pertes de charge dans une conduite composée.

Application 1

Suivant l'équation de Bernoulli entre les états (1) et (2) :

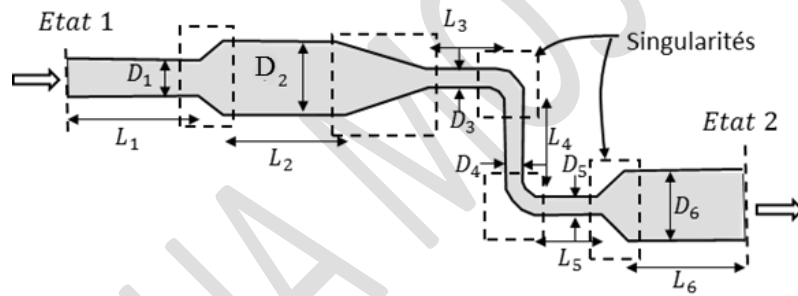


Figure 4.8 : Circuit hydraulique composé

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{12}$$

Les pertes de charge hydraulique entre les états (1) et (2) sont estimées par :

$$\Delta H_{12} = H_1 - H_2 = \sum_{i=1}^6 \Delta H_{li} + \sum_{j=1}^5 \Delta H_{singj}$$

$$\Delta H_{12} = \sum_{i=1}^6 \lambda \frac{l_i}{D_i} \cdot \frac{\rho U_i^2}{2} + \sum_{j=1}^5 k_j \cdot \frac{\rho U_{j+1}^2}{2} \quad (4-16)$$

En général, U_{j+1}^2 est la vitesse moyenne en aval de la singularité.

Application 2

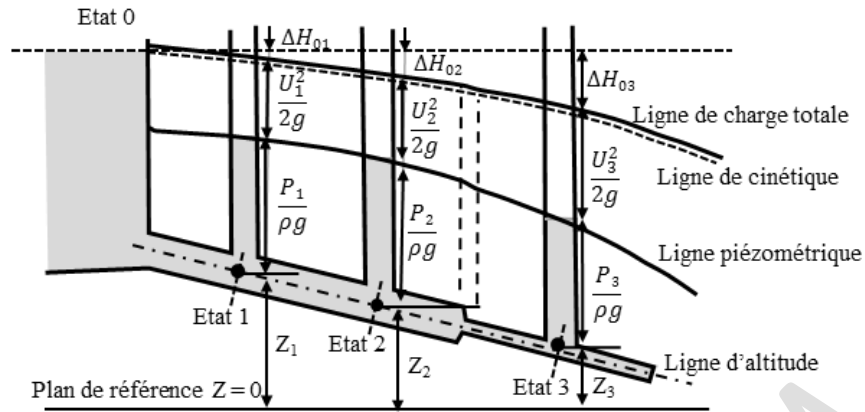


Figure 4.9 : Diminution des lignes piézométrique et d'énergie en fonction des pertes de charge.

Application 3

Généralisation de l'équation de Bernoulli avec machine hydraulique

- Pour la présence d'une pompe caractérisée par la charge supplémentaire (gain) (H_{Pompe})
 - Pour la présence d'une turbine caractérisée par la charge perdue (perte) ($H_{Turbine}$)
- Donc, l'équation de Bernoulli entre les deux états (1) et (2) dans la présence d'une pompe.

$$H_1 + H_{Pompe} = H_2$$

L'équation de Bernoulli entre les deux états (1) et (2) dans la présence d'une turbine est :

$$H_1 - H_{Turbine} = H_2$$

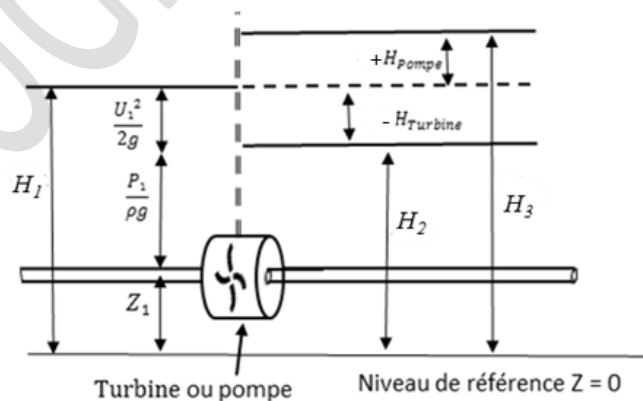


Figure 4.10 : Présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique en présence d'une pompe ou d'une turbine.

La relation entre la puissance utile d'une machine hydraulique aux grandeurs usuelles de l'hydraulique est la suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Puissance} &= \frac{\text{Energie}}{\text{Temps}} = \text{Déplacement} \times \frac{\text{Force}}{\text{Temps}} \\
&= \text{Déplacement} \times \frac{\text{accélération} \times \text{masse}}{\text{Temps}} \\
&= \text{Déplacement} \times \frac{\text{accélération} \times \text{masse volumique} \times \text{Volume}}{\text{Temps}} \\
&= \text{Déplacement} \times \text{accélération} \times \text{masse volumique} \times \frac{\text{Volume}}{\text{Temps}} \\
&= \text{Déplacement} \times \text{accélération} \times \text{masse volumique} \times \text{débit volumique} \\
&= [m] \times \left[\frac{m}{s^2} \right] \times \left[\frac{Kg}{m^3} \right] \times \left[\frac{m^3}{s} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Puissance utile} &= H \times g \times \rho \times Q \\
&= \rho g \cdot Q \cdot H \quad [\text{Watt}]
\end{aligned}$$

Avec : H est la charge d'une pompe ou d'une turbine.

Le rendement d'une pompe est donné par l'expression suivante : $\eta = \frac{P_{net}}{P_{alimentation}}$

Le rendement d'une turbine est donné par l'expression suivante : $\eta = \frac{P_{fournie}}{P_{net}}$

Le travail fourni par une pompe au fluide

La présence d'une pompe sur la conduite d'écoulement permet de fournir le travail W_p :

$$W_m = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (z_2 - z_1) \quad [J/kg]$$

4.2 Résumé des formules importantes du chapitre

Conservation de masse $S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2$ (4-1)

Equation de continuité $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\vec{v}) = 0$ (4-2)

Théorème d'Euler $\Sigma \vec{F}_{Ext} = \rho \Sigma (Q_{Sortant} \cdot \vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant} \cdot \vec{U}_{Entrante})$ (4-3)

Equation de Bernoulli $\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{12}$ (4-5)

Charge hydraulique

$$H = \frac{E_T}{m \cdot g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + Z$$

Pression totale

$$P_T = P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho U^2$$

DOUGHA MOSTEEA