Notes de cours

Système de Second Ordre

Dans ce chapitre on donne la forme générale d'un système de 2nd ordre ainsi que les paramètres caractéristiques de se système qui parvient d'une fonction de transfert et de son équation caractéristique suite a une transformée de Laplace.

Suite a cette définition paramétrique on détaille la réponse indicielle d'un système de second ordre tout en montrons leur conditions de stabilités que se soit l'emplacement des pôles ou bien l'effet paramétrique de se système sur sa réponse.

1. Définition

Un système de second ordre est un système décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}+2m\omega_0\frac{ds(t)}{dt}+\omega_0^2 s(t)=k\omega_0^2 e(t)$$

Cas générale :

$$a_2\frac{d^2s(t)}{dt^2}+a_1\frac{ds(t)}{dt}+a_0 s(t)=b_2\frac{d^2e(t)}{dt^2}+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

Paramètres :

k : gain statique $k=\frac{s(\infty)}{e(\infty)}$

m : coefficient d'amortissement : ξ

ω_0 : pulsation propre.

3- Transformée de Laplace

Pour des conditions initiales nulles

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} \rightarrow p^2S(p)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \rightarrow pS(p)$$

4. Fonction de transfert et équation caractéristique

4.1. Fonction de transfert

H(p)= ?

$$p^2S(p)+2m\omega_0 pS(p)+\omega_0^2S(p)=k\omega_0^2E(p) \quad\Rightarrow\quad \frac{S(p)}{E(p)}=H(p)=\frac{k\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}$$

$$\mathrm{H(p)} = \frac{k\omega_0^2}{\mathrm{p}^2 + 2m\omega_0\mathrm{p} + \omega_0^2}$$

4.2. Equation caractéristique

$$\mathrm{D(p)} = \mathrm{p}^2 + 2m\omega_0\mathrm{p} + \omega_0^2$$

5. Réponse indicielle d’un système de second ordre

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = k\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$S(p) = k\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} E(p) \quad \text{avec } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = k\omega_0^2 \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = k\omega_0^2 [\frac{a}{p} + \frac{b}{p-p_1} + \frac{c}{p-p_2}]$$

$$a = \left.\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right|_{p=0} = \frac{1}{p_1 p_2}$$

c

$$b = \left.\frac{1}{p(p-p_2)}\right|_{p=p_1} = \frac{1}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$c = \left.\frac{1}{p(p-p_2)}\right|_{p=p_2} = \frac{1}{p_2(p_2-p_1)}$$

D’où

$$S(p) = k\omega_0^2 \left[\frac{\frac{1}{p_1 p_2}}{p} + \frac{\frac{1}{p_1(p_1-p_2)}}{p-p_1} + \frac{\frac{1}{p_2(p_2-p_1)}}{p-p_2} \right]$$

On obtient :

$$s(t) = k\omega_0^2 \left[\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1(p_1-p_2)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2-p_1)} e^{p_2 t} \right] u(t)$$

Donc :

$$s(t) = \frac{k\omega_0^2}{p_1 p_2} \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right] u(t)$$

$$D(p)=0$$

$$\Delta=(m\omega_0)^2-\omega_0^2=\omega_0^2\,(m^2-1)$$

m=0

$$D(p)=p^2+\omega_0^2=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} p_1=j\omega_0 \\ p_2=-j\omega_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1=j\omega_0 \\ p_2=-j\omega_0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; p_1p_2=\omega_0^2 \text{ et } p_1-p_2=2j\omega_0$$

$$s(t)=\frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2}\left[1-\frac{j\omega_0}{2j\omega_0}e^{j\omega_0 t}-\frac{j\omega_0}{2j\omega_0}e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$s(t)=k\left[1-\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right]$$

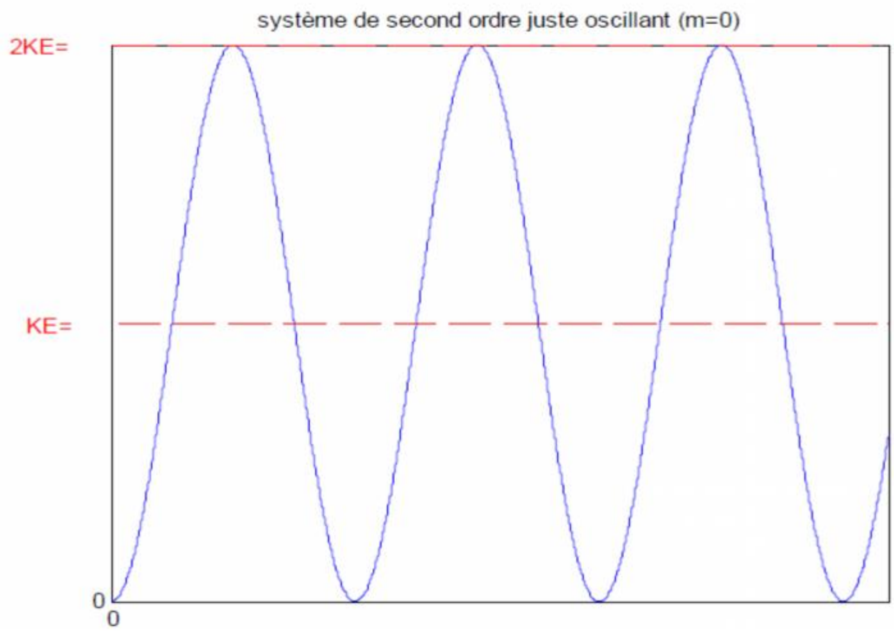
On obtient :

$$s(t)=k\left[1-\cos\omega_0 t\right]$$

C’est un système oscillant.

Cas général :

$$s(t)=kE_0\left[1-\cos\omega_0 t\right]$$



m=1

$$D(p)=p^2+2\omega_0 p+\omega_0^2=0 \;\Rightarrow\; (p+\omega_0)^2=0$$

$$\Rightarrow\; p_1=p_2=-\omega_0$$

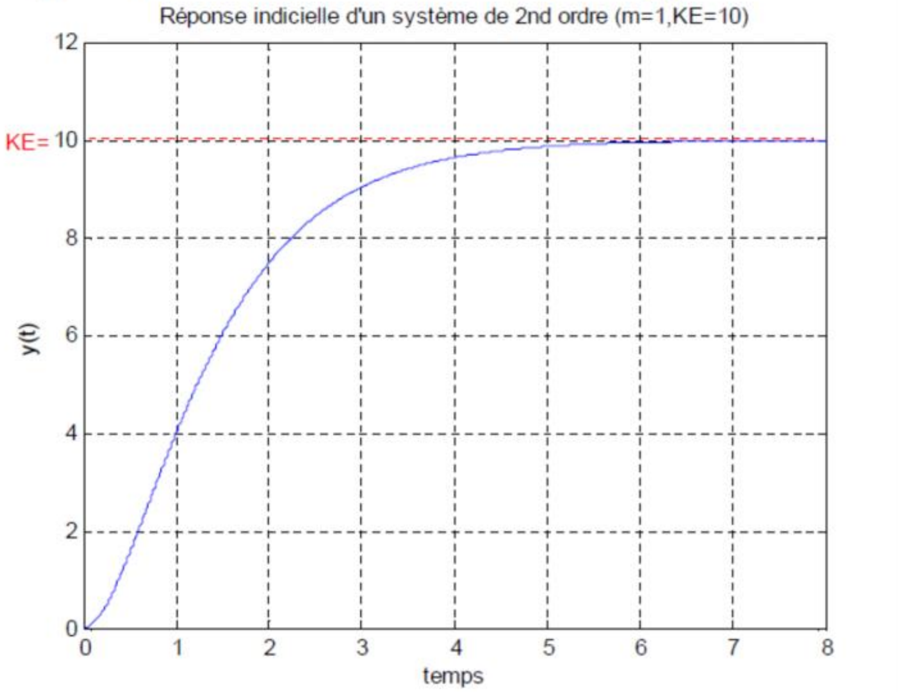
$$s(t) = kE_0\left[1-(1+\omega_0)e^{\omega_0 t}\right]$$

m>1

$$\Delta > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1} = \omega_0(-m+\sqrt{m^2-1}) < 1 \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1} < 1 \end{cases}$$

$$s(t) = kE_0\left[1 - \frac{p_2}{p_2-p_1}e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2-p_1}e^{p_2 t}\right]$$



C'est un système hyper-amorti.

<u>**0<m<1**</u>

$$\Delta = \omega_0^2(m^2-1) < 0$$

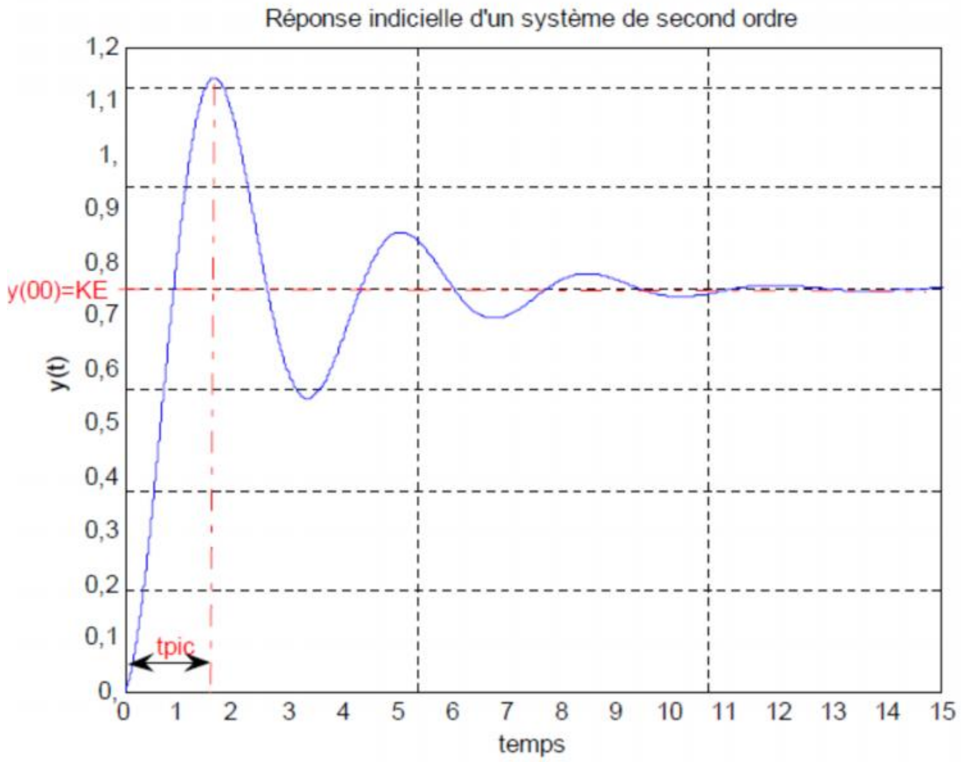
Deux pôles complexes conjugués.

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

$$s(t) = kE_0\left[1 - e^{\frac{-m\omega_0 t}{\sqrt{1-m^2}}}\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t+\varphi)\right]$$

Avec :

$$\begin{cases} \varphi = arctg\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m} \\ \omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$



C’est un système oscillant amorti.