CHAPITRE 1

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1.1 Notation de Londau

Définition 1.1.1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0$.*

On note $f << g$ (notation de Hardy) ou $f = o(g)$ (notation de Londau)

Remarque 1.1.2

1. $f = o(1) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f = 0$.
2. $f \Re g$ *n'est pas une relation d'équivalence (car elle est transitive, mais ni réflexive ni symétrique).*
3. *Si* $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha = o(x^\beta)$.

Théorème 1.1.3 *Soit $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g eth$ trois fonctions définies au voisinage de x_0 alors :*

1. $f = o(h)$ *et* $g = o(h) \Rightarrow f + \lambda g = o(h)$.
2. $f = o(h) \Rightarrow f.g = o(hg)$.
3. f *est bornée et* g *tend vers l'infinie, alors* $f = o(g)$.

Définition 1.1.4 *Les développements limités consistent grosso modo à trouver une approximation polynomiale à une fonction plus compliquée au voisinage d'un oint choisi. Ils ont de nombreuse application dans d'autre sciences, mais aussi dans les mathématiques elles mêmes en particulier en analyse numérique.*

Définition 1.1.5 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$, admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de $x_0 \in I$ si seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_\ltimes[\mathbb{X}]$, tel que*

$$\forall x \in I : f(x) = P(x - x_0) + o(x - x_0)^n.$$

On appelle $P(x - x_0)$ est la partie régulière du DL et $o(x - x_0)^n$ est le reste d'ordre n.

Par exemple : au voisinage de 0

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3}_{\text{partie régulière}} + x^3(\frac{1}{1-x}) \quad \text{et } o(x-0)^3 = x^3(\frac{1}{1-x})$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

1.2 Formule de Taylor-Lagrange

Si f une fonction continue sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Le réel $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ s'appelle reste de Lagrange.

Remarque 1.2.1 *(Formule de Taylor-Young). Si f une fonction définie et n fois dérivable sur $I=]x_0-h,x_0+h[$. Si $f^{n+1}(x_0)$ existe, alors $\forall x\in I$ on a*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)+\epsilon(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

avec $\epsilon(x)\longrightarrow 0$ quand $x\longmapsto x_0$. Le réel $R_n=\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n+1)}(x_0)+\epsilon(x))$ s'appelle reste de Young.

Cas particulier. Si $x=0$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)+\epsilon(x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

avec $\epsilon(x)\longrightarrow 0$ quand $x\longmapsto x_0$. Cette formule s'appelle la formule de **Mac-Laurin**

Exemple 1.2.2 *On va écrire le DL à l'ordre n de la fonction $\cos : x\mapsto \cos x$ au voisinage de 0.*
$\cos' x=-\sin x$, $\cos'' x=-\cos x$, $\cos^{(3)} x=\sin x$, $\cos^{(4)} x=\cos x$. *De manière générale $n=4k$, $\cos^{(n)}=\cos x$. $n=4k+1$, $\cos^{(n)}=-\sin x$. $n=4k+2$, $\cos^{(n)}=-\cos x$. $n=4k+3$, $\cos^{(n)}=\sin x$. Donc*

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n \text{ où } R_n=\frac{\cos^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Le DL à l'ordre 4 $\quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!},$

Remarque 1.2.3
- *Si f admet un DL au voisinage de x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.*
- *Si f n'admet pas une limite au point x_0 alors n'admet pas un DL au voisinage de x_0.*

Propriétés :
- Si f admet un DL au voisinage de x_0 alors ce développement est unique.
- Si f est une fonction paire(impaire) admet un DL au voisinage de x_0, alors la partie régulière ne contient que les puissance paires (resp. impaires).
  En ettet : f admet un DL au voisinage de x_0, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+R_n$ alors $f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2+...+(-1)^na_nx^n+R_n$
  ⋆ Si f impaire : $f(-x)=-f(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-...-a_nx^n-R_n$, alors $a_0=a_2=a_4=...=a_{2k}=0$, $2k\le n$.
  ⋆ Si f paire $f(-x)=f(x)$ alors $a_1=a_3=a_5=...=a_{2k+1}=0$, $2k+1\le n$.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

1.3 Développement limité de certaines fonctions usuelles à l'origine

La fonction définie par : $f(x) = a^x,\ a > 0$. On a $a^x = e^{x \ln a}$ et la dérivée n-ème de f est $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n e^{x \ln a}$. Donc le DL de cette fonction est donné par

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + ... + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

Pour $a = e$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$

$$Ch(x) = Ch(0) + \frac{Ch'(0)}{1!}x + \frac{Ch''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{Ch^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$Ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$Sh(x) = Sh(0) + \frac{Sh'(0)}{1!}x + \frac{Sh''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{Sh^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$Sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\cos(x) = \cos(0) + \frac{\cos'(0)}{1!}x + \frac{\cos''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \neq -1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

Pour $\alpha = -1$ on retombe sur le DL $\dfrac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\epsilon(x)$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

1.4 Opération sur les développements limités

1.4.1 La somme

Soient f et g deux fonctions admettent deux DL d'ordre n au voisinage de 0.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + x^n\epsilon_1(x)$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

tels que $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$ Alors

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)+x^n(\epsilon_1(x)+\epsilon_2(x))$$

Donc

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + ... + (a_n+b_n)x^n + x^n(\epsilon_1(x)+\epsilon_2(x))$$

et $\lim\limits_{x\to 0}(\epsilon_1(x)+\epsilon_2(x)) = 0$

Par exemple : Si $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$ alors

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + ... + 2\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k}\epsilon(x) \quad 2k \leq n$$

D'où

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k}\epsilon(x) = Ch(x) \quad 2k \leq n$$

1.4.2 Le produit

Sous les mêmes conditions ci-dessus, on a :

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (A(x) + x^n\epsilon_1(x)) + (B(x) + x^n\epsilon_2(x))$$

où $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ et $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$ Alors

$$(f.g)(x) = A(x).B(x) + x^n\epsilon_1(x).B(x) + x^n\epsilon_2(x).B(x) + x^{2n}\epsilon_1(x).\epsilon_2(x)$$

Donc le DL de $f.g$ au voisinage de 0 est le produit des parties régulières des deux fonctions.

Par exemple : Soit la fonction $H(x) = e^x.\sin(x)$. On cherche le DL à l'ordre 6 au voisinage de zéro.

$$H(x) = e^x.\sin(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...).(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...)$$

$$H(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{33} + \frac{x^6}{18} + R_6$$

Exercice : Même question pour la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ au voisinage de zéro.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

1.4.3 La division

Sous les mêmes conditions ci-dessus telles que $b_0 \neq 0$, on fait la division euclidienne suivant les puissances croissantes jusqu'au l'ordre n. :

$$A(x) = B(x).Q(x) + x^{n+1}R(x), \text{ avec } deg(Q) \leq n.$$

Alors que Q est la partie polynomiale du DL à l'ordre n de $\dfrac{f}{g}$

Par exemple : Le DL à l'ordre 2 de $\dfrac{2+x+x^3}{1+x^2}$. On pose $A(x) = 2+x+x^3$ et $B(x) = 1+x^2$, alors $Q(x) = 2+x-2x^2$, $R(x) = 1+2x$ par conséquent

$$A(x) = (1+x^2)(2+x-2x^2) + x^3(1+2x)$$

Exemple 1.4.1 *Le DL à l'ordre 5 de la fonction $th : x \mapsto th(x)$*

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^6.(\frac{x}{180} + \frac{x^3}{180})}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}$$

1.4.4 Composition

Proposition 1.4.2 *Si $g(0) = 0$, la fonction $f \circ g$ admet au voisinage de 0 un DL d'ordre n en ne prenant que les termes de degré inférieur ou égal à n. du polynôme $A(B(x))$.*

Par exemple Le DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$. On a

$$\sin x = x + x^2\epsilon(x) \quad \text{et } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \epsilon_2(x)$$

Il en résult $e^{\sin x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

1.4.5 DL des fonctions en un point quelconque

La fonction f admet un DL au voisinage d'un point x_0 si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t+x_0)$. admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $t = x - x_0$.

Par exemple DL de $f(x) = e^x$ en 1. On pose $t = x-1$. Si x est proche de 1 alors t est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL de e^t on 0.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} + x^n\epsilon(t)$$

$$e^x = e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} + x^n\epsilon(x-1)), \quad \lim_{x\to 1} \epsilon(x-1) = 0.$$

Exercice :

1. Calculer le DL en 0 de $x \mapsto chx$ par la formule de Taylor-Young. Retrouver ce DL en utilisant que $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt[2]{1+x}$.
3. Justifier l'expression du DL de $\dfrac{1}{1-x}$ à l'aide de l'unicité des DL de la somme d'une suite géométrique.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

1.4.6 Développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ l'ordre n s'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que

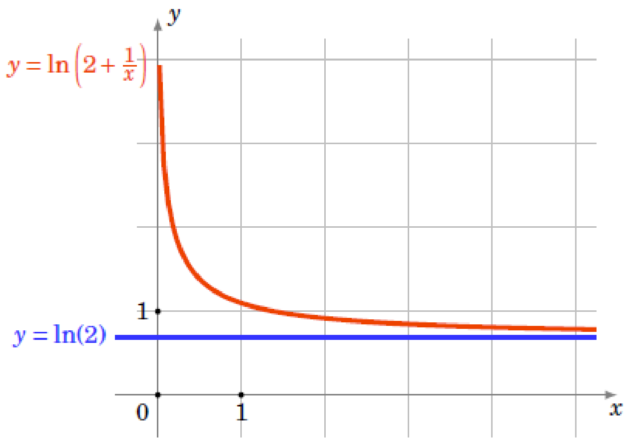
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x}),$$

où $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = 0$

Exemple 1.4.3 *Soit la fonction définie par :* $f : x \mapsto \ln(2 + \frac{1}{x})$

$$f(x) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2x}) = \ln 2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{24x^3} + ... + \frac{1}{n2^n x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x})$$

Cela nous permet d'avoir une idée assez précise du comportement de f au voisinage de $+\infty$. Lorsque $x \to +\infty$ alors $x \to \ln 2$. Et le second terme est $+\frac{1}{2}x$ donc est positif, cela signifie que la fonction $f(x)$ tend vers $\ln 2$ tout en restant au-dessus de $\ln 2$.



Remarque 1.4.4
1. *Un DL en $+\infty$ s'appelle aussi un développement asymptotique.*
2. *dire que la fonction $x \mapsto f(x)$ admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n est équivalent à $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n.*
3. *On peut définir de même ce qu'est un DL en $-\infty$*

1.5 Applications

1. Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... \text{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = a_0.$$

Exemple :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

On. En 0

$$f(x) = \ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x)) - (x - \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x))$$

$$+\frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x))^2$$

et

$$g(x) = 3x^2\sin^2 x = 3x^2(x + x\epsilon(x))^2 = 3x^4 + x^4\epsilon(x)$$

Ainsi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{5}{12}x^4 + x^4\epsilon(x)}{3x^4 + x^4\epsilon(x)}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{5}{36}$$

Note : en calculant le DL à un ordre inférieur (2 par exemple), on n'aurait pas pu conclure, car on aurait obtenu $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2\epsilon(x)}{x^2\epsilon(x)}$, ce qui ne lève pas l'indétermination. De façon générale, on calcule les DL à l'ordre le plus bas possible, et si cela ne suffit pas, on augmente progressivement l'ordre (donc la précision de l'approximation).

2. Supposons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une DL en x_0 : alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k\epsilon(x)$$

où k est le plus petit entier supérieur où égale à 2 tel que le coefficient a_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de x_0 est donnée par le signe $f(x) - y$ c'est-à-dire le signe de $a_k(x - x_0)^k$.

Exemple :

Soit la fonction définie par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

— Déterminons la tangente en $\frac{1}{2}$ du graphe de f et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.

On a $f"(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$ et $k = 2$

On en déduit le DL de f en $\frac{1}{2}$ par la formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f"(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2\epsilon(x)$$

Donc le tangente en $\frac{1}{2}$ est $y = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2})$ et le graphe de f est en dessous de la tangente car $f(x) - y = (-\frac{3}{2} + \epsilon(x))(x - \frac{1}{2})^2$ est négatif autour de $x = \frac{1}{2}$

— Déterminons les points d'inflexion.

Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de $f"(x) = 0$. Donc parmi $x = 0$ et $x = 1$.

* Le DL en 0 : est $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4$ (il s'agit juste d'écrire les monômes par degrés croissants !). L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 1$ (une tangente horizontale). Comme $-3x^2$ change de signe en 0 alors 0 est un point

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

d'inflexion de f.
* Le DL en $x = 1$: est $f(x) = -2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc $y = -2(x-1)$. Comme $2(x-1)^3$ change de signe en 1, 1 est aussi un point d'inflexion de f .

0. Responsable de module : M. TOUAHRIA

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Année universitaire : 2022/2023

1-ère année Informatique - Semestre 2
Module Analyse 02- Série :01

Exercice 01 :

Calculer les DL d'ordre 4 au voisinage de de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes :

1.
$$f_1(x) = \ln(1+x), \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = \cos x, \quad f_4(x) = \sin x, \quad f_5(x) = \tan x,$$
$$f_6(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad f_7(x) = \frac{1+x}{2+x}, \quad f_8(x) = \frac{1}{\cos x}$$

2. Déduire les DL d'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes :
$$g_1(x) = \cos x + \sin x, \quad g_2(x) = e^x . \tan x, \quad g_3(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad g_4(x) = e^{\cos x}$$
$$g_5(x) = \sin(\ln(1+x)), \quad g_6(x) = \sqrt{\cos x}$$

Exercice 02 :

En utilisant les DL calculer les limies suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1)}{x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x\sin x - \cos x}{(e^x-1)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sin x)^4}[\sin \frac{x}{1-x} - \frac{\sin x}{1-\sin x}]$$

Exercice 03 :

En utilisant la division euclidienne calculer les DL d'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}, \quad f_2(x) = \frac{e^x}{1+x-x^2}$$

Exercice 04 :

Calculer les DL d'ordre 3 au voisinage de de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = Sh(x), \quad f_2(x) = \arcsin x, \quad f_3(x) = th(x), \quad f_4(x) = e^{\arcsin x}$$

Exercice 05 : Calculer les développements limités suivants :

$$1)\ \frac{1}{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}, \quad 2)\ \ln x \text{ à l'ordre 3 en 2}$$
$$3)\ \cos x \text{ à l'ordre 3 en} \frac{\pi}{3}, \quad 4)\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}$$

Exercice 06 :

Calculer les limites
$$\lim_{x\to +\infty} (\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)})^x, \quad \lim_{x\to +\infty} (\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2})^x$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***