UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Année universitaire : 2022/2023

1-ère année Informatique - Semestre 2
Examen Final en Analyse 2
Durée : 1 h 30 min

Exercice 1 : (06 Pts)

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

2. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$$

Exercice 1 : (07 Pts)

On considère

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\cos(2x)dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\cos^2(x)dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\sin^2(x)dx,$$

— Calculer K, $\quad I+J$ et $I-J$.
— En déduire I et J.

Exercice 1 : (07 Pts)

1. Résoudre l'équation différentielle
$$-y' + y = x^2.$$

2. Détrminer toutes les fonctions $z : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui sont dérivables, solutions de l'équation différentielle
$$z' + z - x^2z^2 = 0$$
et telles que $z(0) = \frac{1}{3}$.
- On poura faire le changement de variable $y = z^{-1}$.

Corrigé de l'examen ANL02

Exercice 1

1) Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x); \quad \tan = x + \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x); \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x)$$

$$\frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x)) - (x + \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x))$$

$$+\frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x))^2 = -\frac{5}{12}x^4 + x^4\epsilon(x)$$

et

$$\sin^2 x = (x + x\epsilon(x))^2 = x^2 + x^2\epsilon(x)$$

Donc

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{5}{12}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x} = \frac{0}{0}, \qquad \text{F.I}$$

Au voisinage de zéro, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^2}(-\frac{5}{12}x^2 + x^2\epsilon(x)) = -\frac{5}{36}$$

Exercice 2

$$K = \frac{1}{2}\left[e^{-2x}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\sin 2x dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\frac{-\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\sin 2x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\sin 2x = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}\cos 2x dx$$

D'où $K = \dfrac{1}{4}$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-\frac{\pi}{4}}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$I - J = K = \frac{1}{4}$$

Donc

$$I = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}; \quad J = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3

1. Résoudre sans second membre :

$$-y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

alors la solution homogène $y_H = Ce^x$, la solution particulière est de la forme $y_P = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_P = 2ax + b$. On remplace dans l'équation complète et par identification, on a $y_P = x^2 + 2x + 2$, par conséquent la solution générale

$$y = Ce^x + x^2 + 2x + 2.$$

2. On a

$$z' + z = x^2 z^2 \Leftrightarrow z' + z = x^2 z^2, \quad \text{équation de Bernoulli,}$$

en multipliant cette dérnière équation par z^{-2} on trouve

$$z^{-2} z' + z^{-1} = x^2,$$

par le changement de variable $y = z^{-1}$ alors $y' = -z' z^{-2}$

$$-y' + y = x^2, \quad \text{c'est l'équation 1}$$

D'où

$$y = Ce^x + x^2 + 2x + 2 \Rightarrow z = \frac{1}{Ce^x + x^2 + 2x + 2}$$

Donc les solutions z vérifient $z(0) = \frac{1}{3}$. $\qquad C = \frac{2}{9} e^{-\frac{1}{3}}$

$$z = \frac{1}{e^{x - \frac{1}{3}} + x^2 + 2x + 2}$$