Université Mohamed Boudiaf M'sila
Faculté de Mathématiques et d'informatiques
Département de Mathématiques

Polycopié de cours
Licence mathématiques LMD
Troisième année (Semestre 06)

COURS DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Enseigné par :
Mr. GAGUI Bachir

Année : 2015/2016

Table des matières

Notations

- E, F : Espaces de Banach.
- f, g, φ : Applications.
- df_a : la différentielle de f en a.
- $J_a f$: Jacobienne de f.
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$: Les dérivées partielles de f par rapport x_i.
- M : sous-variété.
- $\mathcal{A}$: Atlas.
- (U, φ) : une carte.
- $T_m M$: Espace tangent.
- $\underset{m \in M}{\cup} T_m M$: Fibré tangent.
- $T_m f$: Application tangente.
- $\mathcal{X}_k(M)$: Champ de vecteur.
- $\Lambda^p(E, \mathbb{K})$: L'ensemble des formes linéaires alternées.
- $S(p)$: L'ensemble de toute les permutations.
- σ : Une transposition.
- $\varepsilon(\sigma)$: Signature de σ.
- $f \wedge g$: produit extérieur de f et g.
- ω : Forme différentielle.
- $\Omega^p_{\mathcal{C}^k}(U, \mathbb{K})$: L'ensemble des formes différentielles de degré p et de claase $\mathcal{C}^k$.
- $d\omega$: Différentielle extérieur.
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v})$: Vecteur rotationel.
- $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{v})$: La divergence.
- $\partial\Omega$: La frontière de Ω.

Introduction

La théorie des variétés différentielles est un sujet que j'ai toujours trouvé particulièrement dificile à enseigner. Mais pourquoi enseigner, et à qui ?.
Ce cours est une introduction à la géoméetrie différentielle, oú l'accent est mis sur les aspects globaux de la théorie. Il présuppose une bonne familiarité avec le calcul différentiel classique (fonctions d'ouverts de R^n dans R^p, équations différentielles), et a pour but d'introduire un certain nombre de notions fondamentales, à la base de la géométrie moderne (orientation, transversalité, structures riemanniennes, dérivées covariantes, courbures, théorie élémentaire du degré). Comme il nous semble important d'introduire ces idées sans noyer l'étudiant dans un flot de concepts nouveaux. nous plaçons notre étude dans le cadre des sous-variétés, pour ce qui est de l'extension du calcul différentiel, puis aux courbes et aux surfaces plongées dans R^3.

Chapitre 1

Calculs différentiels

1.1 Notions fondamentales

Soient E, F deux espaces de Banach et $\mathcal{O}$ un ouvert E

Définition 1.1 *: Soit $f\ :\mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ une application $a \in \mathcal{O}$ un point.*
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue $L : E \longrightarrow F$, telle que, $\forall\ h \in E,\ a+h \in \mathcal{O}$

$$f\,(a+h) = f\,(a) + L\,(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

et

$$lim_{\|h\|\to 0}\|\varepsilon(h)\| = 0$$

Proposition 1.1 *: L'application L est unique.*

Définition 1.2 *: L'application linéaire unique L est appelée la différentielle de f au point a ou l'application tangente de f en a, et on noté par : df_a, $T_a f$ ou $f^{'}(a)$*

Remarque 1.1 *: Si E et F sont de dimensions finies (par exemple $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q, \ldots etc$) toute application linéaire $L\ : E \to F$ est continue .*

Exemple 1.1 *: Soit l'application*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x^2+y^2-1 \end{array}$$

$$\forall a \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2\ : df_a\ = L,\ a=(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2, h \in \mathrm{E} \quad h=(h_1,h_2)$$

$$\begin{aligned} f\,(a+h) - f\,(a) &= f\,(a_1+h_1, a_2+h_2) - f\,(a_1,a_2) \\ &= (a_1+h_1)^2 + (a_2+h_2)^2 - 1 - \left({a_1}^2 + {a_2}^2 - 1\right) \\ &= 2a_1h_1 + 2a_2h_2 + {h_1}^2 + {h_2}^2 \\ &= L\,(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec $\varepsilon\,(h) = (\frac{{h_1}^2+{h_2}^2}{\|h\|})$, $df_a = f^{'}\,(a) = L$, donc

$$\begin{array}{rcl} L:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \binom{h_1}{h_2} & \longmapsto & 2a_1h_1 + 2a_2h_2 = (2a_1 \quad 2a_1)\binom{h_1}{h_2} \end{array}$$

Remarque 1.2

1. *(f est différentiable au point a) $\Longrightarrow$ (f est continue en a)*
2. *$f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ si $n = p = 1$*
   f est différentiable au point $a \Longleftrightarrow f$ est dérivable en a.
   Et $df_a(h) = f'(a)h = f'(a).1$
3. *La définition précédente reste valable pour les espaces de Banach quelconque mais il faut ajouter la continuité de l'application df_a*

Proposition 1.2 *: (la composée)*
Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Si $f :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur $\mathcal{O}$ et $g\ : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est différentiable sur W, telle que $f(\mathcal{O}) \subset W$. Alors $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{O}$ et on a, pour tout $a \in \mathcal{O}$

$$d(g \circ f)_a = (dg)_{f(a)} \circ df_a$$

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$$

Définition 1.3 *On dit que f est différentiable sur $\mathcal{O}$, si f est différentiable en tout point de $\mathcal{O}$.*

Fonctions de classe $\mathcal{C}^{\mathbf{k}}$; $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
La dérivée partielle d'une fonction est la dérivée par rapport l'une de ses variables les autres étant constantes, la dérivée partielle par rapport la variable x est notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ *ou* $\partial_x f$

$$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1 \ldots\ldots x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1 \ldots\ldots x_n) \\ . \\ . \\ f_p(x_1 \ldots\ldots x_n) \end{pmatrix}$$

La dérivée première en $a \in \mathbb{R}^n$ par rapport à x_j si la limite suivante existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\,(a_1\ , a_2, \ldots a_j + h, \ldots a_n) - f\,(a_1, a_2, \ldots ..a_n)}{h}$$

On note de cette limite par $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Définition 1.4 *:*
$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^1si elle admet des dérivées partielles premières par rapport toutes les variables en chaque point $a \in \mathcal{O}$ et sont continues $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ j = \overline{1, n}$ sont continues.
De même $f$est de classe C^2 ssi f admet des dérivées partielles par rapport toute les variables et si les applications $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ j = \overline{1, n}$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{O}$

Remarque 1.3 *:*
Une fonction est dite de classe $C^0 = C$ si elle est continue, est dite de classe C^k($k \geq 1$ un entier) si ses dérivées partielles j'usqua l'ordre k existant et sont continues et dite de C^∞ (infiniment différentiable) si elle est de classe C^k pour tout $k : k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Conclusion : $f \in C^1 \Longrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in C^0$.

1.2 Matrice Jacobienne

$$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$(x_1 \ldots\ldots x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1 \ldots\ldots x_n) \\ . \\ . \\ f_p(x_1 \ldots\ldots x_n) \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en point a si elles existent peuvent être rangées dans une matrice $df_a = f^{'}(a) = J_f(a) = Jf_a$, telle que

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.4 *:*

1. *La matrice Jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction différentiable.*
2. *La matrice Jacobienne de f au point a, c'est la matrice d'application linéaire df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.*
3. *Si $n = p$, la matrice Jacobienne est une matrice carrée, alors le déterminant $det(Jf_a)$ est appelé déterminant Jacobien ou Jacobien.*

Exemple 1.2 *:*

1. *Soit f, telle que*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x_1 x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, 5x_3, 4{x_2}^2 - 2x_3, x_3 \sin x_1 \ ) \end{array}$$

2. *Soit g, telle que*

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta \ , r \ \sin\theta \ ) \end{array}$$

Question : déterminer $Jf_{(x_1,x_2,x_3)}$, $det(J_{g(r,\theta)})$

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8x_2 & -2 \\ x_3 \cos x_1 & 0 & \sin x_1 \end{pmatrix}$$

$$J_g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \ \sin\theta \\ \sin\theta & -r \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors $\det(J_g) = r\cos^2 x + r\sin^2 x = r$

Corollaire 1.1 *: La composée $g \circ f$ des fonctions différentielles sa matrice Jacobienne est :*

$$J(g \circ f)_a = J(g)_{f(a)} . Jf_a$$

Définition 1.5 *: Soient E, F deux espaces de Banach, $\mathcal{O}$ un ouvert de E et V un ouvert de F. Une application $f : \mathcal{O} \longrightarrow V$ est dite difféomorphisme si :*

1. *f est bijective.*
2. *f est différentiable sur $\mathcal{O}$.*
3. *$f^{-1} : V \to \mathcal{O}$ est différentiable sur V.*

Définition 1.6 *: Une application $f : \mathcal{O} \longrightarrow V$ est dite C^k-difféomorphisme si :*

1. *f est bijective.*
2. *f est C^k-différentiable.*
3. *$f^{-1} : V \to \mathcal{O}$ est C^k-différentiable.*

Si k=0 l'application f est appelée homéomorphisme.

1. *f est bijective.*
2. *f est continue.*
3. *f^{-1} est continue.*

Notation :$\text{Isom}(E, F) = \{\ f : E \to F$ linéaire +bijective$\}$

Remarques 1.1

1. *Toute application C^k-difféomorphisme est homéomorphisme, la réciproque est fausse.*
2. *Un homéomorphisme conserve les propriétés topologiques (ouvert,fermé, compact, convexe,...etc).*
3. *Un difféomorphisme conserve les propriétés topologiques et géométriques.*

1.3 Théorème d'inversion locale-globale

Définition 1.7 *: Soient E, F deux espaces vectoriels et $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Le rang de l'application φ noté : rang φ ou $rg\varphi$ est $r = \dim(Im\varphi)$, On a :*

1. *$r \leq \dim(E),\ r \leq \dim(F)$.*
2. *$r = \dim(E) \Longleftrightarrow \varphi$ est injective.*
3. *$r = \dim(F) \Longleftrightarrow \varphi$ est surjective.*

Définition 1.8

1. *Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^k et $x \in \mathcal{O}$ on dit que φ est une immersion en x, si $d\varphi_x$ est injective.*
2. *On dit que φ est une submersion en x, si $d\varphi_x$ est surjective.*
3. *Si $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow F$ est à la fois submersion en x et immersion en x, on dit que φ est étale.*

Définition 1.9 *:Une application f de classe C^k $(k \geq 1)$ de $\mathcal{O}$ dans V est dite étale en x, si*

$$df_x \in Isom(E, F)$$

Proposition 1.3 *:Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k, alors :*

1. *φ immersion sur $\mathcal{O} \Longleftrightarrow$ rang $d\varphi_x = n,\ \forall\ x \in \mathcal{O}$.*
2. *φ submersion sur $\mathcal{O} \Longleftrightarrow$ rang $d\varphi_x = p,\ \forall\ x \in \mathcal{O}$.*

Remarque 1.5 *:*

1. φ *est* C^k*-difféomorphisme* $\Longrightarrow$ φ *est étale*
2. φ *est étale* $\Longrightarrow$ φ *est* C^k*-difféomorphisme (locale)*
3. φ *étale +bijective* $\Longrightarrow$ φ *est* C^k*-difféomorphisme (globale)*

Exemple 1.3 *:*

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r, \theta) \longmapsto (r \cos\theta , r \sin\theta)$$

f *est étale ?*

$$df_{(r,\theta)} = Jf_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$\left|Jf_{(r,\theta)}\right| = r \neq 0$$

$df_{(r,\theta)}$ *linéaire + bijective,i.e.,* $df_{(r,\theta)} \in Isom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$*,donc* f *est étale.*
f *est difféomorphisme ?*
$f\,(r,\theta) = f\,(r, \theta + 2\pi)$ $\Longrightarrow$ f *n'est pas injective* $(\theta \neq \theta + 2\pi)$
$\Longrightarrow$ f *n'est pas un difféomorphisme global.*

Théorème 1.1 *:(d'inversion locale)*
Soient U, W *deux ouverts de* E *et* F *(resp) et soit* $f \in C^k(U, W)$ *une application étale en* $x \in U$*, alors il existe un ouvert* V *de* U *contenant* x *tel que* $f|_V : V \longrightarrow f(V) \subset F$ *soit un* C^k*-difféomorphisme de* V *dans* $f(V)$*. De plus en notant* f^{-1} *le difféomorphisme réciproque, on a*

$$\forall y \in fV,\ df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

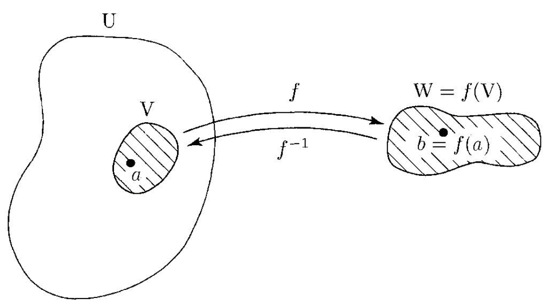

FIGURE 1.1 – inversion locale

Théorème 1.2 *:(d'inversion globale)*
Soient U *un ouvert de* E *et* φ *une application de* U *dans* E*. On suppose que*

1. φ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* U*.*
2. φ *est bijective de* U *sur* $\varphi(U)$*.*
3. *Pour tout* $x \in U$, $d\varphi_x$ *est inversible.*
   Alors $\varphi(U)$ *est un ouvert et* φ *est un* C^k*-difféomorphisme de* U *sur* $\varphi(U)$*.*

Corollaire 1.2 *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^k *telle que* f' *ne s'annule pas sur* I*. Alors* $f(I)$ *est un intervalle ouvert et* f *est un* C^k*-difféomorphisme de* I *sur* $f(I)$*.*

1.4 Les fonctions implicites

Théorème 1.3 *: (de Fonctions implicites)*
Soit f une application de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ a valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et (a,b) un point de U tel que :

1. *$f(a,b) = 0$.*
2. *$J_f^y(a,b)$ est inversible.*

Alors il existe un ouvert V de$\mathbb{R}^n$, un ouvert W de $\mathbb{R}^p$ et une application g de classe C^1 définie sur V à valeur dans W tq :

1. *$(a,b) \in V \times W \subset U$*
2. *Pour tout couple $(x,y) \in V \times W$ on a $f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = g(x)$*
3. *Pour tout couple $(x,y) \in V \times W$ la matrice $J_f^y(x,y)$ est inversible et la matrice Jacobienne de g est donnée par*

$$J_g(u) = -\left[J_f^y(u, g(u))\right]^{-1} . [J_f^x(u, g(u))].$$

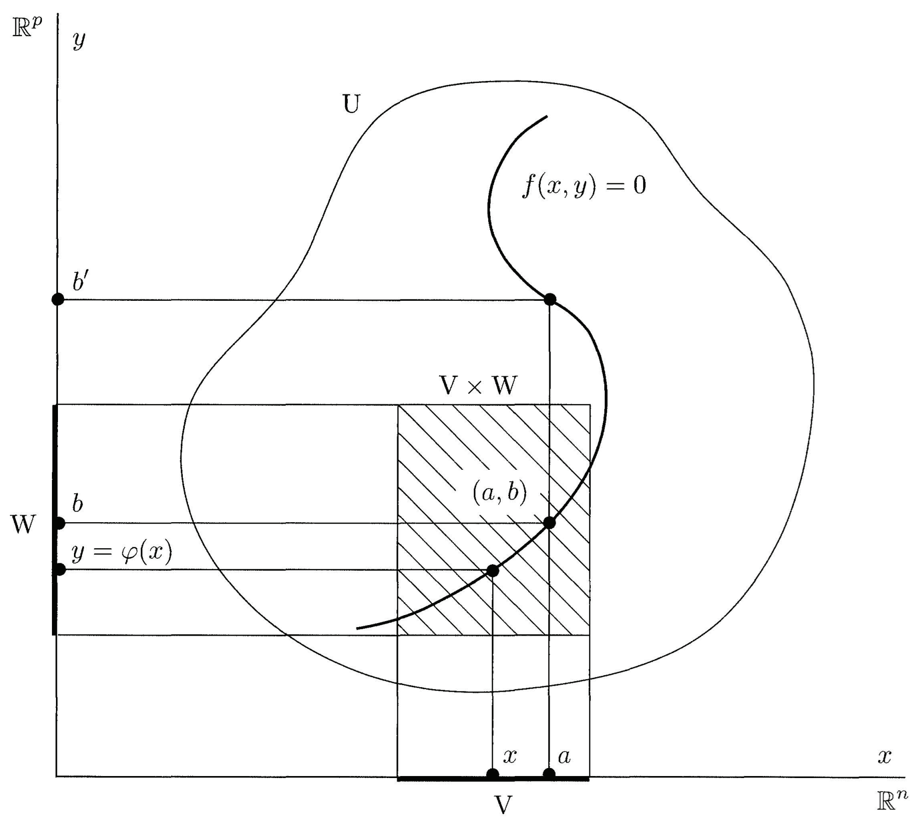

FIGURE 1.2 – fonctions implicites

Exemple 1.4 *:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

On veut résoudre l'équation $f(a,b) = 0$ pour une valeur voisin de a, c'est–dire si l'on peut trouver une fonction g définie au voisinage de a pour x voisin de a $f(x, g(x)) = 0$

$$\exists g = ?, \; f(a,b) = 0$$

$$(x,y) \in V \times W \quad f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = g(x)$$
$$V = g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

1.5 Série d'exercices pour chapitre I

Exercice 01

1- Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (e^{2x+y}, 3y - cosx, x^2 + y + 2) \ et \ g(x,y,z) = (3x + 2y + z^2, x^2 - z + 1).$$

Si $F = f \circ g \ et \ G = g \circ f$, déterminer $d_{(0,0,0)}F \ et \ d_{(0,0)}G$.

2- Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables et soit F définie par :

$$F(x,y) = f(x,y,g(x,y)).$$

a- Déterminer $d_{(x_0,y_0)}F$ en fonction des dérivées partielles de f et g.

b- Si $F(x,y) = 0$ pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\partial_x g \ et \ \partial_y g$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 02

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

$$g(x,y) = \begin{cases} yx^2 \sin(\frac{1}{x}) & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2- La fonction g est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

(considérer la suite $u_n = \left(\frac{1}{2\pi n}, y_0\right), \ avec \ y_0 \neq 0, \ n \leq 1)$.

Exercice 03

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

et l'application

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (rcos\theta, rsin\theta) \end{array}$$

1- Montrer que $H = f \circ F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

2- Calculer $\frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta)$.

Exercice 04

1- Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^3 \end{array}$$

a- L'application f est-elle homéomorphisme ?.

b- L'application f est-elle difféomorphisme ?.

2- Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (rcos\theta, rsin\theta) \end{array}$$

a- Est ce que g est $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

b- L'application g est-elle étale ?.

Exercice 05

1- Soit

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x cosx, e^x siny) \end{array}$$

- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Calculer la matrice $f^{'}(x,y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
- Montrer que f est un difféomorphisme local.
- f est - elle un difféomorphisme global.

2- Même question pour l'application g, telle que :

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2, 2xy) \end{array}$$

3- Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \varphi:\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image que l'on déterminera.

Exercice 06

Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^y-y^x \end{array}$$

1- Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant 1 tels que l'ensemble (non vide)

$$E=\{(x,y)\in I_1\times I_2:\ \varphi(x,y)=0\}.$$

soit le graphe d'une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_1 et valeur dans I_2 et vérifiant $\phi(1)=1$, i.e., $E=\{(x,\phi(x)),\ x\in I_1\}$

2- Donner le developpement limité l'ordre 1 de ϕ au voisinage de 1.

Exercice 07

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble

$$\{(x,y,z)\in U^3;\ x^2+y^2+z^2-\cos(xyz)=0\}$$

soit le graphe d'une fonction numérique ϕ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.

2- Monter que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et calculer ses dérivées partielles en point $(0,0)$.

Exercice 08

Pour une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit (la norme d'une application linéaire)

$$\|A\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$$

1- Soit $\{M_n\}$ une suite des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $\sum_n\|M_n\|<+\infty$ alors $\sum_n M_n<+\infty$.

2- Montrer que si $\|A\|<1$, alors $\sum_n A^n<+\infty$.

3- Montrer que si $\|A\|<1$, alors $(I-A)$ est inversible.

4- Soit $GL_n=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M\ inversible\}$.
- (i) Montrer que GL_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) Montrer que l'application $f:GL_n\rightarrow GL_n$ définie par $f(A)=A^{-1}$ est différentiable en I et calculer sa différentielle df_I.
- (iii) Calculer df_A pour $A\in GL_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 2

Sous variété de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

Deux sous ensembles d'un espace de Banach E sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Un sous espace vectoriel.
- Un ouvert de tel sous espace : un morceau de courbe ou de surface de l'espace vectoriel.
Par contre un cercle ou une sphère ne sont que localement homéomorphe une droite ou un plan.
Dans ce chapitre on définit un ouvert qui généralise la notion d'un espace vectoriel, c'est une sous-variété de dimension d.
Si $d = 0$, ce sont des points discrèts ou points isolés.
Si $d = 1$, la sous-variété est une courbe.
Si $d = 2$, la sous-variété est une surface.
Si $d \geq 3$, la sous-variété est une ultrasurface ou hypersurface.

2.1 Définitions d'une sous-variéte

Notation : Soit $n, d \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq d \leq n$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}$$

Définition 2.1 *: Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est appelée sous-variété de classe C^k et de dimension d, si pour tout point $m \in M$, il existe un ouvert U de m dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ de classe C^k, telle que*

$$\begin{aligned} \varphi\,(U \cap M) = &\ \varphi\,(U) \cap \{\{\mathbb{R}^d\} \times \{0_{n-d}\}\} \\ &= V \cap \{\mathbb{R}^d \times \{0\}\}. \end{aligned}$$

Remarques 2.1 *:*

1. *$n - d$, est appelée la codimension de M*
2. *On a*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_d(x), \varphi_{d+1}(x), \varphi_n(x)) \end{array}$$

Si $x \in U \cap M$, alors

$$\varphi(x) \in \varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n \times \{0_{n-d}\}$$

c-à-d, si $x \in U \cap M$, on a

$$\varphi_{d+1}(x) = \varphi_{d+2}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0$$

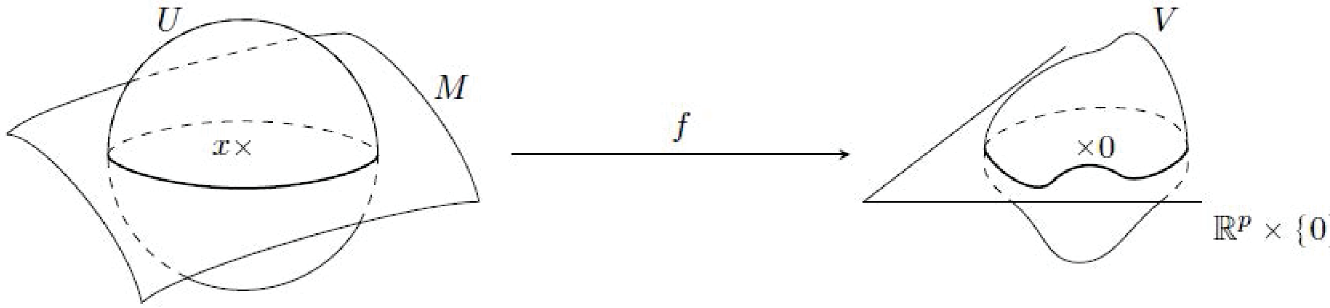

FIGURE 2.1 – Définition d'une sous-variété

Exemple 2.1 *: Soit M le cercle*

$$M = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$\varphi\,(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^2$$

et un difféomorphisme

$$\varphi\,(x,y) = (arctg\ \frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2} - 1)$$

Alors M est une sous variété de dimension 1 et de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

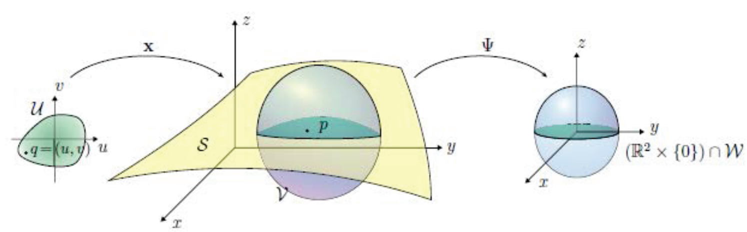

FIGURE 2.2 – Exemple d'une sous-variété

Conclusion :

1. Si $n = d$, *alors* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d$ et on a

$$\varphi\,(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n = \varphi(U) \text{ et } U \subset M$$

   les sous variétés de dimension maximale sont donc les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (et réciproquement).

2. Si $d = 0$ *alors* $\mathbb{R}^d = \{0\}$, et on a

$$\varphi\,(U \cap M) = \varphi\,(U) \cap \mathbb{R}^d = \{0\}$$

   Alors $U \cap M$ se réduit au point $\varphi^{-1}(0) = m$, les sous variétés de dimension nulles sont des parties discrètes de $\mathbb{R}^n$ (et réciproquement).

3. Puisque φ induit un homéomorphisme de $U \cap M$ sur l'ouvert $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^d$ de $\mathbb{R}^d$, les sous-variétés de dimension d possèdent localement les mêmes propriétés topologiques que $\mathbb{R}^d$.

4. Un point m à une sous-variété de dimension 1, alors un voisinage de $M \setminus \{m\}$ est formé de deux parties connexes disjoints.

Exemple 2.2 *Soit* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$.
- M n'est pas une partie discrète de $\mathbb{R}^2$, donc M n'est pas une sous-variété de dimension 0.
- M n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car est un fermé.
- Soit

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = xy \end{array}$$

g est continue, $\{0\}$ est fermé de $\mathbb{R}$ et $g^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy = 0\}$ est fermé.
L'image d'un fermé par une application continue est fermé, donc M n'est pas une sous-variété de dimension 1, car privée de l'origine, elle est formée de quatre composantes connexes.

Définition 2.2 *:(Deuxième définition de s-v)*
Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.
M est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et de classe C^k, si et seulement si,
$\forall x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k, telle que

1. $\varphi^{-1}(0) = U \cap M$.
2. *φ est une submersion en x (df_x est surjective).*

Définition 2.3 *:(Troisième définition de s-v)*
Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.
M est une sous-variété de dimension d et de classe C^k, si
$\forall x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une application $g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k, telle que

1. *g(0)=m.*
2. *$g : \Omega \longrightarrow U \cap M$ est un homéomorphisme.*
3. *$dg_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est injective (rang $g'(0) = d$).*

Remarques 2.2

1. *Le couple (Ω, g) s'appelle paramétrisation ou représentation paramétrique.*
2. *Ω est un voisinage de 0 n'est pas obligatoire, on peut prendre Ω voisinage de t_0 avec $t_0 \in \Omega$ vérifier $g(t_0) = m$*
3. *$g : \Omega \longrightarrow U \cap M$, rang$g'(0) = n$, la matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(0,0,...,0)\right)$ est de rang n par raison de continuité, elle est de rang n, $\forall t \in \Omega$*

$$g'(0) \text{ de rang } n \Leftrightarrow g'(t) \text{ de rang } n,\ \forall t$$

Exemple 2.3

1. *Soit l'ensemble M donné par la paramétrisation*

$$M = \{(t, t^2) :\ t \in \mathbb{R}\}$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & g(t) = (t, t^2) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
W *un voisinage de* (x_0, y_0)*, on a* $g(t_0) = (x_0, y_0)$ *et* $g^{'}(0) = (1, 2t) \Rightarrow g^{'}(0) = (1, 0)$ *est de rang* 1.
Donc $g^{'}(0)$ *est injective et par conséquence* $g^{'}(t_0)$ *est injective.*
$g : \Omega \longrightarrow U \cap M$ *est un homéomorphisme ? (g continue, bijective et* $g^{-1} = Pr/M$ *est continue)*

2. $M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\forall x \in M,\ x = (x_0, y_0, z_0)\ \ \exists U, x \in U$$

Posons $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
φ *est de classe* C^{∞}, $M \subset \mathbb{R}^3$

$$\varphi^{-1}(0) = U \cap M = \mathbb{R}^3 \cap M = M$$

φ *Est submersion ?*

$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$d\varphi_{(x_0,y_0,z_0)} = (2x_0 \quad 2y_0 \quad 2z_0)$$

$$rang\ d\varphi = \begin{cases} 1 & x_0 = y_0 = z_0 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0, 0) \notin S^2$$

$$d\varphi :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall x \in M,\ rang\ d\varphi = 1 = \dim \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \varphi$ *est submersion.*
Alors $S^2 = M$ *est une sous-variété de dimension* $d = n - p = 2$ *et de classe* C^{∞}.

3. *Soit* $H = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 - y^2 - z^2 = c\}$, H *est une sous-variété ?.*
Posons $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - c$

$$dg_{(\mathrm{x,y,z})} = (2x \ \ -2y \ \ -2z) \qquad \forall (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3$$

$$rang\ dg_{(\mathrm{x,y,z})} = \begin{cases} 0 & x = y = z = 0 \\ 1 & x = y = z \neq 0 \end{cases}$$

$$(0, 0, 0) \in H \quad si\ c = 0$$

$$(0, 0, 0) \notin H \quad si\ c \neq 0$$

   (a) *Si* $c \neq 0$

$$g^{-1}(0) = U \cap H = H$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \quad g(x) = 0\}$$

$$g^{-1}(0) = x \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad H \subset \mathbb{R}^3$$

$$= H \cap \mathbb{R}^3 = H$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

   $rang\ dg = 1 = \dim \mathbb{R}$ g *est submersion, donc* H *est une sous-variété de dimension* $d = n - p = 2$ *et de classe* C^{∞}

   (b) *Si* $c = 0,\ rang\ dg_x = 0 \quad \Longrightarrow g$ *n'est pas une submersion en* $(0, 0, 0)$*, on ne peut dire rien.*

Définition 2.4 *: (valeur-régulière)*
Soit g une application différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
Supposons que $b \in \mathbb{R}^p$ soit une valeur régulière et que $g^{-1}(b)$ ne soit pas vide, alors $g^{-1}(b)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

Remarque 2.1
M est une sous-variété si elle est différentiable en chaque b : $U \cap M = g^{-1}(b),\ b \in \mathbb{R}^{n-d}$ avec dg_b est surjective.

Proposition 2.1 *Soit*
$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \ : f(x) = 0\}$$
oú f est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^k$, alors si $\forall m \in M$: $df_m = f'(m) \neq 0$ M est une sous-variété, par contre s'il existe un point $m \in M$ tel que $df_m = f'(m) = 0$ cela ne prouve pas que M n'est pas une sous-variété.

Exemple 2.4 *:*

1. *Soit*
$$M = S^n = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$
On prend $f = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 - 1$, et $df = (2x_1\ 2x_2\ ...\ 2x_{n+1})$
$f^{-1}(1) = S^{n+1}$ et $+1$ une valeur régulière de f, df ne peut s'annuler sur S^{n+1}.
d'oú la sujectivité, alors M est une sous-variété.

2. *Soit*
$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \ x^3 - y^3 = 0\right\}$$
On prend $f(x, y) = x^3 - y^3$
$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ leur différentielle est $df_{(x,y)} = (3x^2, -3y^2)$
$$\forall m = (x, y) \in M,\ m = (0, 0) \in M$$
$$df_{(0,0)} = (0, 0) \implies rang df_{(0,0)} = 0$$
On ne peut rien dire.
Donc, $x^3 - y^3 = (x - y)(\ x^2 + y^2 + xy)$
$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x - y = 0\right\}$$
$\forall x, y \in M,\ df_{(x,y)} = (1 \quad -1) \neq 0$. Alors M est une sous-variété de dimension d =1 de classe C^∞.

Graphe d'une application
Soit U un ouvert de E *et soit* $f : U \subset E \longrightarrow F$ une application.
Le graphe de f est l'ensemble
$$Gr(f) = \left\{(x, f(x)); x \in U\right\} \subset E \times F.$$

Théorème 2.1 *: Soit $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ deux espaces vectoriels de dimension finies, U_1 un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k, alors le graphe de g*
$$\{(x, g(x))\, ;\ x \in U\}\,.$$
Est une sous-variété de $E = \mathbb{R}^n \times\ \mathbb{R}^p$ de dimension égale celle de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.5 *:(Quatrième définition de s-v)*
Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, après une permutation éventuelle des coordonnées de x,tout point $m \in M$ possède un voisinage U tel que $U \cap M$ soit le graphe d'une application g d'un ouvert de

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, ..., x_d, 0, 0, ..., 0)\}$$

dans

$$\mathbb{R}^{n-d} = \{(0, 0, ..., x_{d+1}, x_{d+2}, ..., x_n)\}$$

Proposition 2.2
Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ soit une sous-variété de dimension d il faut et il suffit que : $\forall x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in M \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ contenant x, un autre ouvert V de $\mathbb{R}^d$ contenant $\overline{x}$ et une application $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que (après une permutation éventuelle des coordonnées de x) $M \cap U$ soit le graphe de l'application h

$$U \cap M = \{(\overline{x}, h(\overline{x}) : \overline{x} \in V\}$$

Exemple 2.5 *: Le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$*

$$U_1 = \{|x| < 1, y > 0\}$$
$$U_1 \cap S^1 : g : x \longmapsto g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$U_2 = \{|x| < 1, y < 0\}$$
$$U_2 \cap S^1 : g : x \longmapsto g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$
$$U_3 = \{x > 0, |y| < 1\}$$
$$U_3 \cap S^1 : g : y \longmapsto g(y) = \sqrt{1 - y^2}$$
$$U_4 = \{x < 0, |y| < 1\}$$
$$U_4 \cap S^1 : g : y \longmapsto g(y) = -\sqrt{1 - y^2}$$

Remarque 2.2 *Une courbe de $\mathbb{R}^n$, c-à-d, une application différentiable f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, n'a pas nécessairement pour image une sous-variété, même si f est un homéomorphisme de I dans $f(I)$.*

Exemple 2.6 *Soit la fonction paramétrée suivante*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2, t^3) \end{array}$$

cause du point de rebroussement.

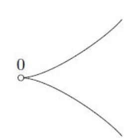

FIGURE 2.3 – Point de rebroussement

Théorème 2.2 *:*
Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe C^k et W une sous variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension e de classe C^k, alors $V \times W$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimension $(d + e)$ et de classe C^k.

2.2 Espace tangent d'une sous-variété

Définition 2.6 *:*
Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe C^k, un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit vecteur tangent en m à M s'il est le vecteur de vitesse en m d'une courbe tracée sur M et d'origine m, c-à-d, s'il existe un intervalle $I =]-\delta, +\delta[$ contenant "0" et une application différentiable

$$C \ : \ ]-\delta, +\delta[\ \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in I, \ C(t) \in M$$

$$C\left(0\right) = m, \quad C^{'}(0) = \left(\frac{dC}{dt}C(t)\right)(0) = v$$

Exemple 2.7

1. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$

$$\begin{array}{rcl} C :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ C\left(t\right) \in S^1 = M$$

$$C\left(0\right) = (1, 0) = m$$

$$C^{'}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \ C^{'}\left(0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v$$

2. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} C :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t, 0) \end{array}$$

$$C\left(0\right) = (1, 0, 0)\,, \ C^{'}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{'}\left(0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

Remarque 2.3 *: L'ensemble de vecteurs tangents en m à M s'appelle l'espace tangent m à M et le note $T_m M$.*

Proposition 2.3 *: $T_m M$ est un espace vectoriel de même dimension que M.*

Lemme 2.1 *:*
Soient U un ouvert de E et $f : U \subset E \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Si V est une sous-variété de E contenu dans U et W est une sous-variété de F, telles que $f(V) \subset W$.
Si $x \in V$ et $y = f(x) \in W$ alors : si $z \in T_x V \Longrightarrow df_x.z \in T_y W \Longrightarrow f^{'}.z \in T_y W$

Lemme 2.2 *:*
Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons $\widetilde{V} = V \cap U$, alors

$$z \in T_x \widetilde{V} \Longleftrightarrow z \in T_x V$$

2.2.1 Méthode de calcul T_mM

Théorème 2.3 *: Soit M une sous-variété de dimension -d- de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et $m \in M$*

1. *Si dans un voisinage ouvert U de m, $M \cap U = f^{-1}(0)$, ou f est une submersion alors :*
$$T_mM = \ker df_m = \ker f^{'}(m)$$
2. *Si dans un voisinage ouvert U de m et un C^k-diffeomorphisme φ de U dans un voisinage V de "0" telles que*
$$\varphi(U \cap M) = V \cap \left\{\mathbb{R}^d \times \{0\}\right\}$$
donc
$$T_mM = \left(\varphi^{'}(m)\right)^{-1}(\mathbb{R}^d)$$
3. *Si (Ω, g) est une paramétrisation de $U \cap M$, ou U est un voisinage de m, alors*
$$T_mM = \left(g^{'}(0)\right)(\mathbb{R}^d) = Im\ \left(g^{'}(0)\right)$$

Exemple 2.8 *:*

1. *Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$*
$m = (0, 0, 1)$, Calculer $T_{(0,0,1)}S^2$?.
Solution :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{aligned}$$
$f^{-1}(0) = U \cap M = M \quad , \quad M = S^2$
f <u>est submersion</u> ?.
$\forall x \in \mathbb{R}\ \ df_x$ *Surjective*
$$d_{(x,y,z)}f = (2x \quad 2y \quad 2z)$$
$$rang\ \left(d_{(x,y,z)}f\right) = 1 = \dim \mathbb{R}$$
$\Longrightarrow\ df_x$ *est surjective*
$\Longrightarrow f$ *est submersion*
Alors :$T_{(0,0,1)}S^2 = \ker(f^{'}(0, 0, 1))$
$$f^{'} = d_{(0,0,1)}f\ \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \longmapsto (0\ 0\ 2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$
$$df_{(0,0,1)}H = 2h_3$$
$$T_{(0,0,1)}S^2 = \left\{ (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 :\ f^{'}(0, 0, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3\ ,\ 2h_3 = 0\} = m+ < h_1, h_2 >$$
$T_{(0,0,1)}S^2$ *est le plan.*
$$f : X \longrightarrow Y \qquad \ker f\ = \{x \in X\ : f(x) = 0\}$$

2. *Soit* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = \varphi(x,y)\}$.
oú $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$, U *voisinage de* 0 *et* $\varphi(0,0) = 0$.
Question : Calculer $T_m M$.
Soient $m = (x_0, y_0, \varphi(x_0,y_0))$ *et* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *telle que*

$$dg_{(0,0)} = g^{'}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Img^{'}(0,0) = g^{'}(\mathbb{R}^2) &= \{g^{'}(h_1\ h_2);\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix};\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} T_m M &= \left\{ \left(h_1, h_2, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)h_2 \right);\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3;\ h_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)h_2 \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

2.3 Applications différentiables

Définition 2.7
Soient M_1 *une sous-variété de* $\mathbb{R}^{n_1}$, M_2 *une sous-variété de* $\mathbb{R}^{n_2}$ *et* $f : M_1 \longrightarrow M_2$ *une application. On dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *en* $m \in M_1$, *s'il existe un voisinage* U *de* m *et une application* g *de classe* $\mathcal{C}^k$ $g : U \longrightarrow g(U)$ *telle que*

$$g_{|U\cap M} = f_{|U\cap M}.$$

Remarques 2.3 *- Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *en chaque point de* M, *on dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$.
- Si M *est un ouver de* $\mathbb{R}^n$, *on peut prendre* $g = f$ *et l'ontrouve la définition usuelle.*

Définition 2.8 *(Application tangente)*
Soient une sous-variété M *de* $\mathbb{R}^n$ *et une application* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *de classe* $\mathcal{C}^1$.
On appelle application tangente de f *à* M *en* $a \in M$, *la restriction de* $df_{(a)}$ *à* $T_a M$, *on la noté par* $T_a f$

$$\begin{aligned} T_a f : T_a M &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto d_a f(x) \end{aligned}$$

Définition 2.9 *Soient* M, N *deux sous-variétés de* $\mathbb{R}^n$ *et une application* $f : M \longrightarrow N$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, *alors l'application tangente* $T_m f$

$$T_m f : T_m M \longrightarrow T_{f(x)} N$$

est définie par : $v \in T_m M,\ v = \gamma^{'}(0) = C^{'}(0)$

$$T_m f(v) = (f \circ C)^{'}(0) \in T_{f(m)} N$$

Exemple 2.9 *Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $T_m f$ n'est rien d'autre que df_m considéré comme application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans le sous espace $df_m\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.10 *(Plongement)*
Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de M sur $f(M)$. On dit que f est un plongement si, $f(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.4 *(Composition)*
Si $f : M_1 \to M_2$ et $g : M_2 \to M_3$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de sous-variétés de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f : M_1 \to M_3$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$T_m(g \circ f) = T_{f(m)}(g) \circ T_m f.$$

Définition 2.11

1. *On dit que $f : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme de la sous-variété M_1 sur la sous-variété M_2, si f est bijective et si f et f^{-1} sont différentiables.*
2. *On dit que f est un difféomorphisme local en $m \in M_1$, s'il existe un voisinage ouvert U_{M_1} de m sur M_1 (pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{n_1}$) et un voisinage ouvert V_{M_2} de $f(m)$ sur M_2 (pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{n_2}$) telle que la restriction de f a U soit un difféomorphisme de U_{M_1} sur U_{M_2}.*

Théorème 2.5 *(D'inversion local pour les sous-variétés)*
Avec les notions précédentes.
Si $T_m f$ est bijectif, f est un difféomorphisme local.

2.4 Théorèmes de Sard et Morse

Théorème 2.6 *(de Sard)*
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ est une immersion en x de classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe un voisinage $\widetilde{U}$ de x telle que $f(\widetilde{U})$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.12 *(de Morse)*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 à valeurs réelles, telle que 0 est un point critique $T_0 f = 0$, 0 est un point critique non dégénéré. L'application T_f est transverse la sous-variété $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en 0, $T_f : x \to (x, T_x f)$

Définition 2.13 *(fonction de Morse)*
M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^2$, f est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés

Théorème 2.7 *(de Morse)*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que 0 est un point critique non dégénéré, alors il existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$. Alors $T_0\varphi = Id$ et

$$f(x) = f(0) + q(\varphi(x))$$

avec q une forme quadratique non dégénéré.

Théorème 2.8
Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour presque toute forme linéaire $l \in \mathbb{R}^{n^*}$, la restriction $l_{|_M}$ est une fonction de Morse sur M.

Chapitre 3

Variétés abstraites

3.1 Carte, Atlas

Soient S un ensemble et n un entier positif.

Définition 3.1 *: Une carte sur S est une bijection $\varphi : U \longrightarrow V$ d'une partie U de S sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$, on note la carte par (U, φ, V) ou par fois par (U, φ)*
Un $\mathcal{C}^k$-Atlas sur S est une famille de carte (U_i, φ_i, V_i) avec $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$ un homéomorphisme, $i \in I$ telle que

1. *$S = \bigcup_{i \in I} U_i$ (un recouvrement)*
2. *Compatibilité : Soient deux carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ oú*

$$\varphi_{ji} : (\ U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(\ U_i \cap U_j).$$

Est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

Définition 3.2 *: Un atlas $\mathcal{A}$ de dimension n de M est un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension nn tel que :*

1. *Les ouvertes U_α recouvrent M,*
2. *Tous les cartes de $\mathcal{A}$ sont compatible deux à deux.*

Définition 3.3 *: Soit M un espace topologique séparé, un système de cartes de classe C^k de dimension n sur M est la donnée*

1. *Un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M*
2. *Une famille de homomorphisme $\varphi_i : U_i \longrightarrow W_i$ ou W_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.*
   L'homéomorphisme $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ soit un C^k-difféomorphisme de $\varphi_i (U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j (U_i \cap U_j)$.

Définition 3.4 *: Deux systèmes de cartes $U = \{(U_i,\ \varphi_i)\}_{i \in I}$ et $V = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in I}$ sont dits équivalents si leurs réunions est encore un système de carte, i.e.,*

$$U = \{(U_1,\ \varphi_1), (U_2,\ \varphi_2), (U_3,\ \varphi_3)\}$$

$$V = \{(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2), (V_3, \psi_3)\}$$

$$U \cup V = \Big\{ (U_1,\ \varphi_1), (U_2,\ \varphi_2), (U_3,\ \varphi_3), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2), (V_3, \psi_3) \Big\}$$

Ceci équivalent $\forall i, j\ :\ \psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un C^k-difféomorphisme de

$$\varphi_i (U_i \cap V_j) \quad dans\ \psi_j (U_i \cap V_j)$$

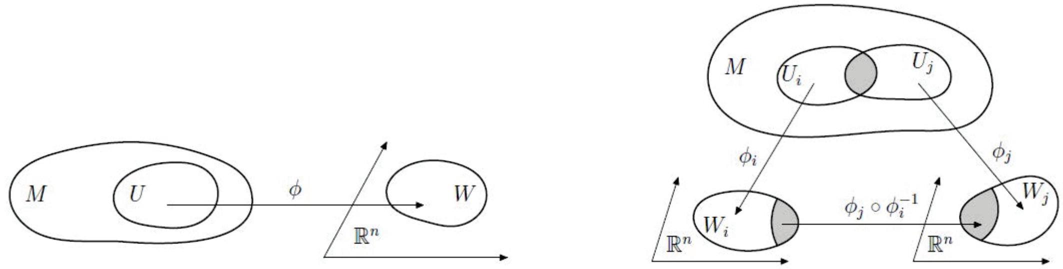

FIGURE 3.1 – Carte et changement de cartes

Exemple 3.1 *:*

1. *Tout ouvert* $U \subset \mathbb{R}^n$ *admet un Atlas qui consiste en une seule carte* (U, Id) *d'oú variété.*
2. $S^n = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$ *un Atlas sur* S^n *formé par deux cartes* (U_N, φ_N) *et* (U_S, φ_S)
   (a) $S^n = U_n \cup U_S$ *(recouverement).*
   (b) $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ *est un difféomorphisme (même pour* $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$*), avec* (φ_N, φ_S) *sont les projections stéréographiques.*

3.2 Variété topologique, variété différentielle

Définition 3.5 *:(Variété topologique)*
On dit que M *est une variété topologique si :*

1. M *un espace topologique séparé.*
2. *Pour tout* $m \in M$ *, il existe un ouvert* U *de* M *contenant* m *est un homéomorphisme*

$$\varphi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

   ou W *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.6 *: Une structure différentielle de dimension* n *sur* M *est une classe d'équivalence d'atlas de dimension* n *sur* M

Définition 3.7 *: On appelle variété différentielle de dimension* n *et de classe* C^k*, la donnée de l'espace topologique sépare* M *et d'un système de carte de classe* C^k *et de dimension* n.

Définition 3.8 *: Une structure de variété différentielle de dimension* n *et de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* M *est la donnée d'une classe d'équivalence de système de carte de classe* $\mathcal{C}^k$ *et de dimension* n.

Exemple 3.2 *:*

1. *Toute sous-variété* M *de dimension* n *et de classe* C^k *est une variété différentielle de* $\dim = n$ *et de classe* C^k.
   Soit M *une sous variété.*
   M *est un espace topologique sépare :*
   On sait que : $\forall x \in M,\ \exists U$ *voisinage de* x *de* $\mathbb{R}^n$ *et* Ω *vosinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$*, tels que :*

$$g(0) = x\ ,\ g^{'}(0) : est\ injective\ \ (immersion)\ ,\ g : \Omega \longrightarrow U \cap M :\ est\ homomorphisme$$

$\{U_x \cap M\}_{x \in M}$: *est un recouvrement de* M.
On prend

$$\varphi_i : g_x^{-1} : U \cap M \longrightarrow \Omega$$

et

$$\varphi_i \circ \; \varphi_j^{-1} = g_x^{-1} \circ g_x$$

est un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme*

2. *L'inverse est faux : le carré n'est pas une sous-variété, par contre le carré est une variété différentille.*
3. *Le cercle* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *est une variété différentielle car est une sous-variété.*
   (a) $\exists (Ui)_{i \in I}$ *recouvrememt de* S^1.
   (b) $\varphi : \Omega \longrightarrow U \cap M$ *homéomorphisme.*
   (c) $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cup U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cup U_j)$ *est un* $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme.*

Proposition 3.1 *:*
Soit M *une variété différentielle de dimension* n *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *et* $\{(U_i, \; \varphi_i)\}$ *un atlas sur* M .
Soit N *une variété différentielle de dimension* m *est de classe* $\mathcal{C}^q$ *et* $\{(V_j, \; x_j)\}$ *un atlas sur* N .
Alors $M \times N$ *est une variété différentielle de dimension* $(n+m)$ *et de classe* $\mathcal{C}^{\inf(p,q)}$

Exemple 3.3 *:* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : x^2 + y^2 = 1, \;\; 0 < z < 1\}$, M *est le cylindre.*

$$M = S^1 \times \,]0, 1[$$

$]0, 1[$ *est une variété avec* $(]0, 1[\,, id)$ *est un atlas.*
S^1 *est une variété car est une sous-variété.*
$M = S^1 \times \,]0, 1[$ *est une variété*

$$\dim(M) \; = \dim(\; S^1) + \dim(M_1)$$

Théorème 3.1 *: Une variété différentielle* M *est un espace localement compact et localement connexe.*

Remarques 3.1 *:*

1. *Si on remplace dans toutes définitions* $\mathbb{R}^n$ *par* $\mathbb{C}^n$ *et* $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme par biholomorphe, i.e., (holomorphe +bijective +l'inverse est holomorphe), on obtient la notion : variété analytique complexe.*
2. *Une variété complexe de dimension 1 s'appelle surface de Riemann.*

3.3 Application différentiables

Définition 3.9 *: Soit* M *une variété différentielle de dimension* $\dim = n$ *et* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *une application,* f *est dite différentiable en* $m \in M$ *si :*

1. (U, φ) *une carte sur* M *en* m.
2. $f \circ \varphi^{-1} : \varphi\,(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *est différentiable en* $\varphi\,(m)$ *sur l'ouvert* $\varphi\,(U)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.1 *: Cette définition est indépendante du choix de la carte en* m.

Définition 3.10 *:*
Soient M et N deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^p$ et de dimension n et m (respectivement) et $f : M \longrightarrow N$ une application continue.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^r$ $(r \leq p)$ en $m \in M$, si pour toute carte (U, φ) en m est pour toute carte (V, ψ) en $f(m)$ l'application : $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ en $\varphi(m)$ de l'ouvert $\varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right)$ dans $\varphi(V)$, i.e.,

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi \ : \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \longrightarrow \psi(V)$$

est de classe $\mathcal{C}^r$ en $\varphi(m)$

Remarques 3.2 *:*

1. *On considère non pas U mais $U \cap f^{-1}(V)$ pour que les compositions d'applications soient bien définies. Il est important de supposer que f est continue pour être sur que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n(\dim M = n)$.*
   U ouvert de $M, f^{-1}(V)$ ouvert de $M \Rightarrow \varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. *Cette définition est indépendante des cartes choisies en m et en $f(m)$.*

Exemple 3.4 *: Soit l'application f telle que $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ de variété N dans $\mathbb{R}$.*
f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur N, si $f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{R}$.
Alors (U, φ) est une carte sur N.

Définition 3.11 *: Soit l'application $f : M \longrightarrow N$ de variété M dans la variété N, est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en tout les points de M, on écrit $\varphi \in \mathcal{C}^k(M, N)$.*

Proposition 3.2 *Soient M et N deux variétés différentielles de dimension m et n (respectivement) et de classe $\mathcal{C}^k$, on a l'équivalence :*

1. *$f \in \mathcal{C}^k(M, N)$*
2. *$\forall x \in M$, il existe une carte (U, φ) de M en x et une carte (V, ψ) dans N en $f(x)$, telles que*
$$f(U) \subset V, \ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k\left(\varphi(U \cup f^{-1}(V)), \psi(V)\right)$$

Proposition 3.3
Soient M, N et P trois variétés différentielles de dimension m, n et p (respectivement), si $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ et $g \in \mathcal{C}^k(N, P)$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(M, P)$

Définition 3.12 *: Soient M, N deux variétés différentielles et $f : M \longrightarrow N$ une application.*
On dit que f est $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si,

1. *f est de classe $\mathcal{C}^k$ (i.e., $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$).*
2. *f est bijective.*
3. *f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ (i.e., $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(N, M)$).*

Remarque 3.2 *On note par*

$$Diff^p(M, N) = \left\{l'ensemble\ de\ \mathcal{C}^k - diffomorphisme\ de\ M\ dans\ N\right\}.$$

Proposition 3.4
$(Diff^p(M, N), \bullet)$ admet une sructure d'un groupe.

3.4 Espace tangent d'une variété

Définition 3.13 *:(Vecteur tangent)*
Soit M une variété différentielle, x un point de M, γ_1, γ_2 deux courbes paramétrées par $]-1,1[$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$.
On dit que γ_1, γ_2 sont tangentes en x, si qu'elle que soit la carte (U, φ) telle que $x \in U$, on ait

$$\frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_1(t)))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_2(t)))_{t=0}.$$

Remarques 3.3

1. *Si cette égalité est vérifiée pour une carte, elle l'est pour toutes.*
2. *On note parfois $J^1\gamma_1(0) = J^2\gamma_2(0)$ l'ensemble des classes d'équivalences de telles courbes pour cette relations d'équivalence est appelé espace tangent en x de M, on le note par : T_xM.*
3. *L'un des inconvénients de cette définition est que la structure d'espace vectoriel de T_xM n'est pas évidente. De même il n'est pas tout fait claire ce qu'est une famaille continue (ou de classe $\mathcal{C}^k$) de champs de vecteurs.*
4. *Notons par contre une naturalité de cette définition, si $f : M \longrightarrow N$ est une application différentiable entre variétés. On définit*

$$\begin{array}{rcl} df : T_xM & \longrightarrow & T_{f(x)}N \\ \gamma & \mapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$$

Définition 3.14 *:*
Soit M une variété différentielle de $\dim = n$ et $m \in M$. Un vecteur tangent en m à M est une classe de : $C : I \longrightarrow M$ pour la relation d'équivalence suivante

$$C\mathfrak{R}\gamma \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C(0) = \gamma(0) = m \\ \text{dans la carte } (U\varphi) \text{ de } M \text{ en } m, \text{ on a} \\ (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ C)'(0) \end{array} \right\}$$

Remarques 3.4

1. *On sait ce que soit les courbes $C : I \longrightarrow M$ mais on sait pas la définie de vecteur $C'(0)$.*
2. *Cette définition est indépendante du choix de la carte.*
3. *On connait $(\varphi \circ C)'(0)$ mais ne connait pas $C'(0)$.*

Définition 3.15 *:*
L'ensemble des vecteurs tangent en m M est noté par T_mM.

Proposition 3.5
L'espace T_mM est un espace vectoriel de dimension $\dim = n$.

Définition 3.16 *:*
Soient M et N deux variétés de dimension n et p (resp) et $f : M \longrightarrow N$ de classe $\mathcal{C}^k$.
L'application T_mf de T_mM dans $T_{f(m)}N$ est appelée l'application tangente.

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n & \underset{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi}{\longrightarrow} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Théorème 3.2 *: Soient M et N deux variétés et $f : M \longrightarrow N$ de classe $\mathcal{C}^k$.*
L'application $T_m f$ est linéaire de $T_m M$ dans $T_{f(m)}N$. Si P une troisième variété et g une application $g : N \longrightarrow P$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors

$$T_m(g \circ f) = T_{f(m)}g \circ T_{f(m)}f.$$

3.5 Fibré tangent

Définition 3.17 *:*
Soit M une variété de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$. On note par

$$TM = \underset{m \in M}{\cup} T_m M$$

l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tout point de M. On appelle TM le fibré tangent.

Remarque 3.3
$T^*M = \underset{m \in M}{\cup} T_m^* M$ s'appelle le fibré cotangent.
T_m^*M est le dual algébrique de $T_m M$.

Théorème 3.3 *: Soit M une variété de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$.*
Le fibré tangent peut être muni d'une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension $2n$.

3.6 Champs de vecteurs

Soit M une variété et TM le fibré tangent, on a

$$TM = \underset{m \in M}{\cup} T_m M$$

et soit l'application π, telle que

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \rightarrow & M \\ z \in T_m M & \mapsto & \pi(z) = m \end{array}$$

$\pi^{-1}(m) = T_m M$, donc π est surjective

Définition 3.18 *:*
Soit M une variété de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$. On appelle champ de vecteur sur M, l'application

$$X : M \longrightarrow TM$$

de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, telle que $\pi \circ X = Id_M$ i.e., $X(m) \in T_m M$.
L'ensemble de champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ sera noté par $\mathcal{X}_k(M)$. On notera simplement $\mathcal{X}(M)$ si $k = +\infty$

Remarque 3.4
X n'est pas projective, i.e., X n'est pas l'inverse de π et π n'est pas projective.

Exemple 3.5

1. *Un champ de vecteurs sur un ouvert U de l'espace de Banach E s'identifie une application différentiable de U sur E.*

2. $X \in \mathcal{X}(S^n)$ *ssi* $X : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *telle que, pour tout* $m \in S^n$, $< m, X(m) >= 0$. *Ainsi toute matrice antisymétrique d'ordre* $n+1$ *définie un champ de vecteurs sur* S^n.
3. $\mathcal{X}(S^n)$ *peut être muni d'une sructure d'espace vectoriel sur le corp* $\mathbb{R}$ *grâce la structure de vectoriel l'espace tangent en tout point. La somme et la multiplication par un scalaire se définit point par point.*

Définition 3.19 *:*
Soit M *une variété de dimension* n *et de classe* $\mathcal{C}^k$. *On dit que* TM *est trivial si* TM *est isomorphe à* $M \times \mathbb{R}^n$ *dans le sens, il existe un difféomorphisme* $\psi : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ *tel que* ψ *est un isomorphisme de l'espace vectoriel* $\{m\} \times \mathbb{R}^n$ *dans* T_mM.

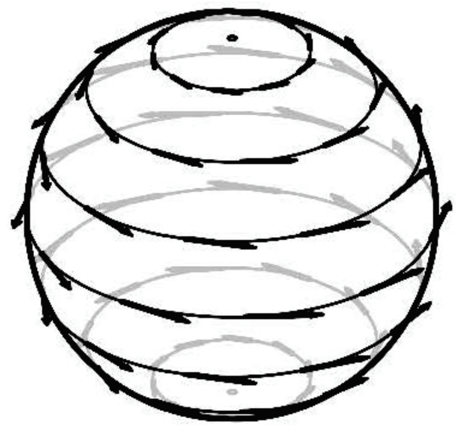

FIGURE 3.2 – Champ de vecteurs sur S^2

Théorème 3.4 *: Soit* M *une variété de dimension* n *et de classe* $\mathcal{C}^k$, *alors* TM *est trivial* $\Leftrightarrow$ *il existe* n *champs de vecteurs sur* M, *tels que* $\forall m \in M, (X_1(m), X_2(m), ..., X_n(m))$ *est une base de* T_mM.

Théorème 3.5 *:* S^n *admet un champ de vecteurs non nul, si* n *impair alors il existe* $X : S^n \longrightarrow TS^n$ *telle que* $\pi \circ X = Id_{S^n}$, $\forall m \in S^n$, $X_i(m) \neq \emptyset$

Corollaire 3.1 *: Si* n *est pair* TS^n *n'est pas trivial.*

3.7 Série d'exercices pour les chapitres II et III

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2015/2016
Département de Mathématiques — Module : Géométrie differentielle

Série de TD $N^0 = 02$
sur les sous-variétés et les variétés

Exercice 01 :
Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés :

1- $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1\}$
2- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2=1 \ et \ x^2+y^2-x=0\}$(fenêtre de Viviani)
3- $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x=0 \ ou \ y=0\}$
4- $M = \{(t,t^2), \ t \in \mathbb{R}_-\} \cup \{(t,-t^2), \ t \in \mathbb{R}_+\}$
5(*)- $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2=y^2\}$
6- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^3+y^3+z^3-3xyz=1\}$ (la cubique)

Exercice 02 :

1. Soit M la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y=|x|\}$$
- Montrer que M est fermée dans $\mathbb{R}^2$
- Montrer que M n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit S^3 la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par :
$$S^3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x^2+y^2+z^2+t^2=1\}$$
- Montrer que S^3 est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$. Qu'elle est sa dimension ?.
- Déterminer $T_{(a,b,c,d)}S^3$ l'espace tangent S^3 au point $(a,b,c,d) \in S^3$

Exercice 03 :
Soit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z=x^2+y^2\}$
- Calculer $T_{(1,0,1)}M$, par deux méthodes.

Exercice 04 :
1- Soit
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2=1 \ et \ 0<z<1\}$$
-Donner un système de carte compatible avec la structure de variété.
2- Soit
$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2=1\}$$
Donner un système de carte (Atlas) sur S^2, utiliser les projections stéréographique Nord et Sud.

Exercice 05 :
Soit $M_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2=x \ et \ x^2+y^2+z^2=a^2, \ a>0\}$
- Déterminer a pour que M_a soit une sous-variété.
- Donner une interprétation géométrique.
-Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,3)}M_3$.

Exercice 06 :
1- Montrer que tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n.
2- La réciproque est elle vraie ?.
2- Qu'elles sont les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0 ?.

Exercice 07 :
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $M = \{(x,f(x)), \ x \in I\}$
1- Est ce que M est une sous-variété ?.
2- Qu'elle est sa dimension ?.

Exercice 08 :
Monter que l'image d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (φ est de classe $\mathcal{C}^k$) est une sous-variété de même dimension.

Exercice 09 :
soit
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (\varphi,\theta) & \mapsto & (cos\theta, sin\theta, cos\varphi, sin\varphi) \end{array}$$

et soit $\pi^2 = Img$.
1- Posons $\mathbb{R}^2/_{2\pi\mathbb{Z}^2} = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$ oú (x_1, y_1) *et* $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, y_1)\mathfrak{R}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 \in 2\pi\mathbb{Z} \\ y_2 - y_1 \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array} \right.$$

1- Disinier $\mathbb{R}^2/_{2\pi\mathbb{Z}^2}$.
2- Montrer que $\mathbb{R}^2/_{2\pi\mathbb{Z}^2}$ est homéomorphe avec π^2.
3- Déduire que π^2 est une sous-variété.

Exercice 10 :
1- Soit $GL_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M\ inversible\}$
- GL_n est un ouvert, sous variété.
- Dans le cas affirmatif qu'elle est sa dimension.

2- Soit $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ det(A) = 1\}$
- Montrer aue $SL_n(\mathbb{R})$ est une variété de dimension $n^2 - 1$.

3- Soit $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ A^t A = I\}$
- Montrer aue $O_n(\mathbb{R})$ est une variété, qu'elle est sa dimension.

avec :

1. GL_n : groupe linéaire (l'ensemble des matrices inversibles)
2. SL_n : groupe spécial linéaire (l'ensemble des matrices spéciales unitaires).
3. $O(n)$: groupe orthogonal (l'ensemble des matrices unitaires).

Chapitre 4

Formes différentielles, différentielle extérieur et intégration des formes différentielles sur les sous-variétés

4.1 Formes p-linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimention n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Définition 4.1 *Soit l'application f, telle que*

$$\begin{array}{rcc} f : E \times E \times E .... \times E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

f est dite p-linéaire si, f est linéaire par rapport chaque variable x_i.

Remarque 4.1

1. *Si $p = 1$, f est dite linéaire.*
2. *Si $p = 2$, f est dite bilinéaire.*
3. *L'ensemble de p-formes linéaires noté par $L_p(E, \mathbb{K})$.*

Exemple 4.1

$$\begin{array}{rcc} f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f_1(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array}$$

f_1 et f_2 sont des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

4.2 Formes p-linéaires alternées

Définition 4.2 *Soit*

$$\begin{array}{rcc} f : E \times E \times E .... \times E = E^p & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

est dite forme linéaire alternée si,

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = -f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p), \ \forall i, j = 1, p \ et \ i \neq j$$

Exemple 4.2 *Dans l'exemple précédent f_1 est une forme alternée, mais f_2 n'est pas.*

Remarque 4.2

1. *L'ensemble des p-formes linéaires alternées est noté par $A^p(E,\mathbb{K})$ ou $\Lambda^p(E,\mathbb{K})$*
2. *$\Lambda^p(E,\mathbb{K}) = A^p(E,\mathbb{K})$ est un sous-espace de $L_p(E,\mathbb{K})$*

Proposition 4.1 *Soit f telle que*

$$\begin{array}{rcl} f : E\times E\times E....\times E = E^p & \to & \mathbb{K} \\ (x_1,x_2,...,x_p) & \mapsto & f(x_1,x_2,...,x_p) \end{array}$$

f est alternée si,

1. *$f(x_1,x_2,...,x_p) = 0$ chaque fois qu'il existe un couple $(i,j), x_i = x_j$ et $i \neq j$*
2. *un uplets vecteurs liées $x_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$*

Remarque 4.3 *Si $p > n$ la seule forme p-linéaire alternée sur E c'est la forme $f \equiv 0$*

Définition 4.3 *Soit l'ensemble $\{1,2,...,p\} \subset \mathbb{N}$.*
On dit qu'une permutation de $\{1,2,...,p\}$ vers $\{1,2,...,p\}$ toute application bijective.
On note par $S(p)$ l'ensemble de toute les permutation de $\{1,2,...,p\}$ vers $\{1,2,...,p\}$

Définition 4.4 *Soit $\sigma \in S(p)$.*
On dit que σ est une trasposition ssi,

$$\exists i,j \in \overline{1,p}: \ \sigma(i) = j, \ \sigma(j) = i, \ \text{et } \sigma(k) = k, \ \forall k \neq i, k \neq j$$

Remarque 4.4 *1- Une transposition σ est une permutation qui permute deux éléments (nombres) distinctss et laisse les autres.*
2- $\sigma^2 = I$

Définition 4.5 *On définit l'application ε par*

$$\begin{array}{rlcl} \varepsilon: & S(p) & \longrightarrow & \{-1,+1\} \\ & \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{nombre du permutation est pair} \\ -1, & \text{nombre du permutation est impair} \end{cases} \end{array}$$

On appelle la signature de σ, la valeur de l'application ε au σ i.e., $\varepsilon(\sigma)$

Proposition 4.2 *Soient $f \in L_p(E,\mathbb{K})$ et $\sigma \in S(p)$, On définit l'application (σf) par*

$$\begin{array}{rcl} (\sigma f): E\times E\times E....\times E = E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,x_2,...,x_p) & \longmapsto & f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(p)}) \end{array}$$

qui admet les propriétés suivantes :

1. *$(\sigma f) = \varepsilon(\sigma) f$, i.e., $f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,x_2,...,x_p)$*
2. *$\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$*
3. *$\tau(\sigma f) = (\tau\sigma) f$*

4.3 Produit extérieur

Définition 4.6 *Soit $f \in A^p(E,\mathbb{K})$, $g \in A^q(E,\mathbb{K})$ et soit ϕ une application bilinéaire définie par $\phi : F \times G \longrightarrow H$ oú F, G et H sont des espaces vectoriels.*
On définit l'application $f \wedge_\phi g$ par

$$\begin{array}{rcl} f \wedge_\phi g : E^{p+q} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}..., x_{p+q}) & \longmapsto & f \wedge_\phi g \end{array}$$

oú

$$f \wedge_\phi g = \sum_{\sigma \in S} \phi \left[f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}).g(x_{\sigma(p+1)}, x_{\sigma(p+2)}, ..., x_{\sigma(p+q)}) \right]$$

Définition 4.7 *On appelle l'application $f \wedge_\phi g$ le produit extérieur de f et g par rapport ϕ.*
On note par $f \wedge g$ le produit extérieur de f et g au lieu de $f \wedge_\phi g$.

Exemple 4.3 *Soit $f, g \in A^1(E,\mathbb{K})$, $\phi : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$*

$$\begin{array}{rcl} f \wedge_\phi g : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f \wedge_\phi g \end{array}$$

$$f \wedge_\phi g = \sum_{\sigma \in S(2)} \phi \left[f(x_{\sigma(1)}).g(x_{\sigma(2)}) \right] = \phi \left[f(x_1).g(x_2) \right] - \phi \left[f(x_2).g(x_1) \right]$$

pour

$$\begin{array}{rcl} \phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1.x_2 \end{array}$$

donc, on a

$$f \wedge_\phi g = f \wedge g = f(x_1).g(x_2) - f(x_2).g(x_1)$$

Définition 4.8 *Soit $f_1, f_2, ..., f_p$ p-forme linéaire sur E.*
On appelle produit extérieur de p-forme linéaire (f_i), $i \in \{1, 2, ..., p\}$ l'application pour

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \longmapsto & f_1 \wedge f_2 \wedge .... \wedge f_p(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

telle que $f_1 \wedge f_2 \wedge .... \wedge f_p(x_1, x_2, ..., x_p) = det \left[f_i(x_j) \right], 1 \leq i, j \leq p$

Propriétés

1- Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ base canonique de E et soit $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ base duale de E, alors

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} +1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2- $f_p(x_1, x_2, ..., x_p) = det[x_i] f_p(e_1, e_2, ..., e_n) = det[x_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$.
3- Soit (e_1, e_2) base de E, $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$, alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = x_1 f(e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + x_2 f(e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1 f(e_1, e_1) + x_1y_2 f(e_1, e_2) + x_2y_1 f(e_2, e_1) + x_2y_2 f(e_2, e_2) \\ &= x_1y_2 f(e_1, e_2) + x_2y_1 f(e_2, e_1) \\ &= x_1y_2 f(e_1, e_2) - x_2y_1 f(e_1, e_2) = det[x_i] f(e_1, e_2) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

avec $f(e_1, e_2) = 1, f(e_2, e_1) = -1, f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$

Proposition 4.3 *Soit f, g et h trois formes p-linéaire, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$, le produit extérieur est associatif*
2. *$(f \wedge (g + h)) = (f \wedge g) + (f \wedge h)$, le produit extérieur est distributif*
3. *$f \wedge g = -g \wedge f$*
4. *soit $f \in A^p$, $g \in A^q$ alors $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$*

4.4 Formes différentielles sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$

Définition 4.9 *On appelle forme différentielle de degré p sur l'ouvert $U \subset E$, toute application ω de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \omega : U \subset E & \longrightarrow & A^p(U, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \omega(x) = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_p \leq n} a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \end{array}$$

oú $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}$ sont des fonctions continues.
L'ensemble des formes différentielles de degré p sur l'ouvert $U \subset E$ et de classe $\mathcal{C}^k$ est noté par : $\Omega^p_{\mathcal{C}^k}(U, \mathbb{K})$

Exemple 4.4
1- $f : U \subset E \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors $f \in \Omega^0_{\mathcal{C}^k}(U, \mathbb{K})$
2- $f \in \mathcal{C}^1$, alors $df : E \to A^1(E, \mathbb{K}) \Rightarrow df \in \Omega^1_{\mathcal{C}^0}(U, \mathbb{K})$

Remarque 4.5 *$\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{K})$, donc*

$$\begin{array}{rcl} \omega : U \subset E & \longrightarrow & A^p(U, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \omega(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \omega(x) : E = \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) & \longmapsto & \omega(x)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \omega(x, \xi) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \omega(x, \xi) &= \omega\left(x; \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x; \xi_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i(\xi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i\right)(\xi) \end{aligned} \tag{4.2}$$

alors

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$$

s'appelle la forme canonique de ω

Produit extérieur de deux formes différentielles
Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles de degrés p et q (respectivement), on définit le produit extérieur $\omega_1 \wedge \omega_2$ par :

$$\begin{array}{rcl} \omega_1 \wedge \omega_2 : \Omega^p \times \Omega^q & \longrightarrow & \Omega^{p+q}(U, \mathbb{K}) \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \end{array}$$

Exemple 4.5
Soit ω_1 est un 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\omega_1(x) = xdy - ydx - dz$.
Soit ω_2 est un 2-forme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\omega_2(x) = (x + y)dx \wedge dy - zdz \wedge dx$, alors

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^3(U \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{K})$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) & = & (xdy - ydx - dz) \wedge ((x+y)dx \wedge dy - zdz \wedge dx) \\
& = & x(x+y)dy \wedge dx \wedge dy - xzdy \wedge dz \wedge dx - y(x+y)dx \wedge dx \wedge dy \\
& + & yzdx \wedge dz \wedge dx - (x+y)dz \wedge dx \wedge dy - zdz \wedge dz \wedge dx \\
& = & -xzdy \wedge dzvdx - (x+y)dz \wedge dx \wedge dy \\
& = & -xzdy \wedge dz \wedge dx - (x+y)dx \wedge dz \wedge dy \\
& = & xzdy \wedge dx \wedge dz - (x+y)dx \wedge dy \wedge dz \\
& = & -xzdx \wedge dy \wedge dz + (x+y)dx \wedge dy \wedge dz \\
& = & -(xz + (x+y))dx \wedge dy \wedge dz
\end{array}
$$

4.5 Différentielle extérieur

Définition 4.10 *L'application α définie par*

$$\alpha(x)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i d\omega(x, \xi_i)(\xi_1, \xi_2, ..., \widehat{\xi_i}, ..., \xi_p)$$

tel que le vecteur $(\xi_1, \xi_2, ..., \widehat{\xi_i}, ..., \xi_p)$ est le vecteur $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ ommit la composante ξ_i.
On appelle α la différentielle extérieur de ω est noté $d\omega$.
Alors $d\omega \in \Omega^{p+1}_{\mathcal{C}^{k-1}}(U, \mathbb{K})$, oú

$$d\omega(x; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i d\omega(x, \xi_i) \overrightarrow{\xi_i}$$

avec

$$\overrightarrow{\xi_i} = (\xi_1, \xi_2, ..., \widehat{\xi_i}, ..., \xi_p)$$

Remarque 4.6 *On définit l'application d par*

$$
\begin{array}{rcl}
d : \Omega^p_{\mathcal{C}^k} & \longrightarrow & \Omega^{p+1}_{\mathcal{C}^{k-1}}(U, \mathbb{K}) \\
\omega & \longmapsto & d\omega
\end{array}
$$

L'application d est linéaire, i.e.,

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$$

Définition 4.11 *Soit $\omega \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}$ tel que $\omega = \sum_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_p \leq n} a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$, on définit $d\omega$ par*

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_p \leq n} d(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$$

avec

$$d(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_p \leq n} \partial(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}) dx_i$$

Exemple 4.6 *Soit ω une 1-forme différentielle, telle que*

$$w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz \in \Omega^1_{\mathcal{C}^1}(U, \mathbb{K})$$

et P, Q *et* $R \in \mathcal{C}^1$*, alors*

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= (\frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx) \\ &+ (\frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dy) \\ &+ (\frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dz) \end{aligned}$$

alors

$$d\omega(x) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$$

Remarque 4.7

1. *Le vecteur associe est, s'appelle le vecteur rotationel*

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2. *Soit* $w = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy \in \Omega^1_{\mathcal{C}^1}(U, \mathbb{K})$*, alors le vecteur de la divergence de* $\overrightarrow{A} = (a_1, a_2, a_3)$ *noté* $div(\overrightarrow{A})$ *défini par :*

$$div(\overrightarrow{A}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

3. *Si* $n = 2$ *la composante* z *de la quantité* $\frac{\partial a_3}{\partial z}$ *est ignoré.*

Définition 4.12 *Soit* $\omega \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k},\ p \geq 1$
1- On dit que w *est fermé sur* U *si* $dw = 0$.
2- On dit que w *est exacte sur* U*, s'il existe un* $\alpha \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}$ *tel que* $\omega = d\alpha$*, on dit alors* α *est une primitive de* ω

Remarque 4.8

1. $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz \in \Omega^1_{\mathcal{C}^1}(U, \mathbb{K})$ *est fermé* $\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(P, Q, R) = 0_{vect}$
2. *Soit* $w = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy$ *est fermé* $div(\overrightarrow{A}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 0$
3. $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$*, alors* $\forall i \in 1, 2, ..., n :\ \omega_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$*, donc pour déterminer* α *revient donc à résoudre un système d'équation aux dérivées partielles.*
4. *Si* $\omega = d\alpha$ *est une forme exacte de classe* $\mathcal{C}^1$*, alors grâce au théorème de Schawrtz, alors pour* $i \neq j$ $i, j \in 1, 2, ..., n$ *on a*

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

5. $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ *une forme différentielle fermé, si* $i \neq j$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Définition 4.13 *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
On dit que l'ouvert U est étoilé s'il existe un point $a \in U$ tel que pour tout point m de U le segment $[am]$ est inclu dans U.

Exemple 4.7
1- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
2- Une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ est étoilée.
3- L'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash_{\{0,0\}}$ n'est pas étoilé.

Théorème 4.1 *(de Poincaré)*
Si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, alors toute forme diférentielle sur U qui est fermé est exacte.

4.5.1 Changement de variables

Soient $\omega \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}$ et $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(V)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On définit l'image réciproque $\varphi^*\omega$ définie par

$$\varphi^*\omega(x)(\eta_1, ..., \eta_2) = \omega(\varphi(x))(d\varphi_x\eta_1, ..., d\varphi_x\eta_p)$$

Propriétés : Soient α *et* β deux formes différentielles, alors on a les propriétés suivantes :
1- $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$
2- $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$
3- $\varphi^*(\alpha + \beta) = \varphi^*(\alpha) + \varphi^*(\beta)$
4- $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

4.6 Intégration des formes différentielles

Soit $\omega = a(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge .... \wedge dx_p$ une p-forme différentielle sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et A un sous-ensemble mesurable de V.
On définit l'intégrale de ω sur A par :

$$\int_A \omega = \int_A a(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge .... \wedge dx_p$$

pour vu que cette dernière intégrale ait un sens, c'est–dire que, si $a(x)$ est intégrable sur A.
Pour tout difféomorphisme φ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur V préservant l'orientation, on a

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^*\omega = \int_A \omega.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ une aplication différentiable. Si B est un sous-ensemble mesurable de U et ω est une p-forme différentielle définie sur un voisinage de $\varphi(B)$, on peut définir

$$\int_B \varphi^*\omega$$

quand cela un sens.

4.6.1 Intégrale d'une 1-forme différentielle

Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ une 1-forme différentielle continue sur U et

$$\begin{array}{rcl} \gamma : I = [a,b] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \end{array}$$

une courbe (arc) paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 4.14 *On appelle intégrale de la forme différentielle ω suivant le chemin fini γ, le réel*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega(x) = \int_I \gamma^*\omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma' dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))x_i'(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \omega_i(\gamma(t))x_i'(t)dt\end{aligned}$$

Proposition 4.4
Si $\omega = df$ est une forme exacte de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors pour tout arc

$$\gamma : [a,b] \to U$$

on a

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Proposition 4.5

1. *Si ω_1 et ω_2 sont deux formes différentielles continues sur U et γ un arc paramétré sur U, on a alors pour tout α, β on a*

$$\int_\gamma (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2 : \qquad \textit{Linéarité}$$

2. *Si $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin paramétré de calsse $\mathcal{C}^1$, $c \in [a,b]$ et ω une forme différentielle continue sur U, alors*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,b]}} \omega$$

4.6.2 Formule de Green-Riemann

Définition 4.15

1. *On dira qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$ a un bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, si sa frontière $\partial\Omega$ est union finie de supports de courbes γ_i, $i = 1, 2, ..., n$ fermées simples et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*
2. *On dira que $\partial\Omega$ est orienté de sorte que Ω soit sa gauche, si pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et lorsque t croit le point $\gamma_i(t)$ se déplace en laissant Ω sa gauche : cela signifie qu'en point $\gamma_i(t)$, la base $(\nu, \gamma_i'(t))$ est directe oú ν est le vecteur normal sortant au point $\gamma_i(t)$.*

Remarque 4.9 *Si U est un ouvert contenant l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω et ω est une 1-forme continue sur U, alors*

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega.$$

On considère maintenant un ouvert élémentaire Ω de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ \varphi_1 < y < \varphi_2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ c < y < d,\ \psi_1 < x < \psi_2\} \end{aligned}$$

avec $a < b$, $c < d$, φ_1 et φ_2 sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ même pour ψ_1, ψ_2 sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[c,d]$, et on a $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et $\psi_1 \leq \psi_2$

Lemme 4.1 *Soient $P(x,y)dx$ et $Q(x,y)dy$ deux 1-forme différentielle continues sur un ouvert U contenant $\overline{\Omega}$, alors on a*

$$\int_{\partial\Omega} P(x,y)dx = \int_a^b [P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))]\,dt$$

et

$$\int_{\partial\Omega} Q(x,y)dy = \int_c^d [Q(t,\psi_1(t)) - Q(t,\psi_2(t))]\,dt$$

Théorème 4.2 *(de Green-Riemann)*
Soit Ω un ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et et ω est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, alors on a

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

On rappelle que si on note $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, on a

$$\int_\Omega d\omega = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Remarques 4.1

1. *Ce résultat peut être étendus des ouverts plus généraux, par exemple des ouverts simples.*
2. *La formule de Green-Riemann est utile dans les deux sens.*
3. *Selon le problème considéré on peut vouloire ramener un calcul d'intégrale double au d'une calcul d'une intégrale curviligne ou l'inverse.*

Définition 4.16 *On appelle champ de vecteur sur U, toute application de U dans $\mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M &\longmapsto \overrightarrow{F}(M) \end{aligned}$$

les éléments de U sont considérés comme des points.
Une application de U dans $\mathbb{R}$ est par fois appelée champ de scalaire.

4.6.3 Formule de Stokes

On vu au section précédente la formule de Green-Riemann qui est un analogue du théorème fondamental de l'analyse pour la dimension 2.
On appelle que dans tous les cas il s'agit d'exprimer une intégrale sur un domaine en fonction d'une intégrale sur le bord de ce domaine.

Théorème 4.3 *(de Stokes)*
Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ à bord compacte, orienté de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathcal{C}^2$, on munit le bord $\partial\Omega$ de l'orientation induite par l'orientation de M.
Soit ω une forme différentielle de degré $p-1$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de M, alors on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_M d\omega.$$

4.6.4 Intégration d'une forme différentielle sur une p-courbe

De même qu'on a pu intégrer des 1-formes sur des courbes, on va maintenant définir d'une 2-forme sur une surface et plus généralement d'une p-forme sur une p-courbe.
• Pour les intégrales curvilignes l'idées était d'utiliser un paramétrage du chemin considéré pour se ramener une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
• Pour une surface on va se ramener de la même façon une intégrale sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
• L'intégrale pour p-courbe sera obtenue en calculant une intégrale sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Définition 4.17 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$*
On appelle p-courbe de U une application injective $\gamma : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ telle que $d_y\gamma$ est de rang p pour tout $y \in V$. L'image $\gamma(V)$ d'une p-courbe est appelé suport de cette courbe.

Remarques 4.2

1. *Une 0-courbe de $\mathbb{R}^n$ s'identifie un pointde $\mathbb{R}^n$.*
2. *Une 1-courbe est une courbe paramétrée.*
3. *Une 2-courbe est une nappe paramétrée.*

Définition 4.18 *Soient $V \subset \mathbb{R}^p$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts. $\gamma : V \to U$ une p-courbe et ω une p-forme différentielle continue sur U, alors on pose*

$$\int_\gamma \omega = \int_V \gamma^* \omega$$

Remarque 4.10 *Si ω est une 1-forme sur U et $\gamma : [a, b] \to U$ est une courbe paramétrée, on retrouve bien la définition*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

4.7 Sous-variétés orientées

Définition 4.19 *On appelle orientation d'un espace vectoriel de dimension fini E, une application ν de l'ensemble des bases de E vers $\{-1, +1\}$, telle que $\nu(B) = \nu(\widetilde{B})$ si et seulement si $det(B\widetilde{B}) > 0$ oú $\widetilde{B}$ base duale.*

Définition 4.20 *Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ est dite orientable s'il existe une application ν qui tout $a \in M$ associe une orientation $\nu(a)$ de l'espace tangent T_aM de sorte que $\nu(a)$ depende continuement de a.*

Remarque 4.11 *Si M est une sous-variété de dimension $d = 1$, choisir une orientation revient à choisir pour tout $a \in M$ un vecteur $\tau(a) \in T_aM\backslash\{0\}$ qui dépend continuement de a, le vecteur $\tau(a)$ montre le sens de parcours positifs*

4.8 Sous-variété à bords

C'est comme les sous-variétés mais on autorise un bord.

Définition 4.21 *Un ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété à bord de dimension $d = p$, si pour tout $a \in M$ il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme φ entre le voisinage U de a et le voisinage Ω de 0 :zéro.*
• $\varphi(a) = 0$.
• *Soit* $\varphi(U \cap M) = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \Omega;\ y_{p+1} = ... = y_n = 0\}$.
• *Soit* $\varphi(U \cap M) = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \Omega;\ y_1 \leq 0 \text{ et } y_{p+1} = ... = y_n = 0\}$
Un tel difféomorphisme est une coordonnée rectifiant M en a

Remarques 4.3

1. *Le bord de M, noté ∂M est l'ensemble des points $a \in M$ vérifiant la deuxième condition.*
2. *Une sous-variété peut être vue comme une sous-variété à bord de bord vide.*
3. *Si M est une sous-variété à bord, alors $M \backslash \partial M$ est une sous-variété.*

Proposition 4.6
1. *Le bord d'une sous-variété bord de dimension p, est une sous-variété de dimension $p - 1$*
2. *Si M est une sous-variété bord de $\mathbb{R}^n$ orientable, alors ∂M est une sous-variété orientable de $\mathbb{R}^n$*

Définition 4.22 *Si M est orienté par ν, $a \in M$ et φ est une coordonnée rectifiant M en a, alors l'orientation ν_∂ de ∂M est définie par*

$$\nu_\partial(a; (d_a\varphi)^{-1}(e_1), (d_a\varphi)^{-1}(e_2), ..., (d_a\varphi)^{-1}(e_p)) = \nu(a; (d_a\varphi)^{-1}(e_1), (d_a\varphi)^{-1}(e_2), ..., (d_a\varphi)^{-1}(e_p))$$

avec $(d_a\varphi)^{-1}(e_1)$: vecteur extérieur.

Théorème 4.4 *(du Rotationnel)*
Soit S une surface orienté à bord de $\mathbb{R}^3$
Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ défini au voisinage de $S \cup \partial S$, alors ona

$$\iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu}\, dA = \oint_{\partial S} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau}\, ds$$

oú $\overrightarrow{\nu}$: est la normale la surface S.
$\overrightarrow{\tau}$: est le vecteur tangent ∂M

Théorème 4.5 *(Formule d'Ostrograsdskii-théorème de flux-divergence)*
Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^3$.
Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface lisse fermée dilimitant un ouvert Ω et orienté par le champ de vecteur $\overrightarrow{N}$ normal S et pointant vers l'extérieur de S, alors

$$\iiint_S div(\overrightarrow{F})dV = \iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu}\, dA$$

4.9 Formules d'analyse vectorielle

Soient f, g des champs scalaires et $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ des champs vectoriels de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :

- $div(\overrightarrow{F} + \lambda \overrightarrow{G}) = div(\overrightarrow{F}) + \lambda div(\overrightarrow{G})$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F} + \lambda \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) + \lambda \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{G})$.
- $div(f\overrightarrow{F}) = f.div(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{grad}(f)(\overrightarrow{F})$.
- $\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{F}) = f.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge (\overrightarrow{F})$.
- $\overrightarrow{F}$ admet un potentiel scalaire, alors $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f, i.e.,

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{grad}(f), \quad \int_{\Gamma} \overrightarrow{F}(M)\overrightarrow{dM} = f(B) - f(A)$$

4.10 Série d'exercices pour chapitre VI

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2015/2016
Département de Mathématiques — Module : Géométrie differentielle

Série de TD $N^0 = 03$
sur les formes différentielles

Exercice 01 :
Déterminer si les applications suivantes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont bilinéaires
1. $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1$
2. $f((x_1, x_2), (y_1; y_2)) = x_1x_2$
3. $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$

II- Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.
1. $\phi(x, y, z) = x_1 + y_2 + z_3$
2. $\phi(x, y, z) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3. $\phi(x, y, z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$

Exercice 02 :
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les applications ω et α suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_3 \end{array}$$

1- Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.
2- A l'aide de ω et α, on définit une nouvelle application, notée $\omega \wedge \alpha$, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \omega \wedge \alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) & \mapsto & \omega(X, Y)\alpha(Z) + \omega(Y, Z)\alpha(X) + \omega(Z, X)\alpha(Y) \end{array}$$

a- Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est alternée.
b- Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est bilinéaire.
c- Calculer $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$.
d- Déduire que $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$: $\omega \wedge \alpha(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$.

Exercice 03 :
1- Simplifier $dx \wedge dz \wedge dy + 3dz \wedge dy \wedge dx - dy \wedge dz \wedge dx + 5dx \wedge dx \wedge dx - 7dz \wedge dz \wedge dy$.
2- Les formes différentielles suivantes sont-elles fermées ? sont-elles exactes ? Préciser une primitive le cas échéant.
(i) $xdy - ydx$, (ii) $(x^2 + 3y)dx - y^3 dy$, (iii) $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, (vi) $e^x(y + x)dx + (e^x + 3e^y)dy$
Exercice 04 :
Soit la forme différentielle

$$\omega = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2ydy$$

1- Montrer que ω n'est pas exacte.
2- Déterminer la fonction φ (une variable) telle que la forme différentielle $\omega_1 = \varphi(x)\omega$ soit fermée.
3- Montrer aue ω_1 est alors exacte et détermine une primitive.
Exercice 05 :
Soit $dx_1, ..., dx_p$ une base dans l'espace des formes dfférentielles $\Omega^1(U \subset \mathbb{R}^p)$.
1- Le produit extérieur a pour propriété $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ pour $\alpha, \beta \in \Omega^1(U \subset \mathbb{R}^p)$. En déduire que $dx_i \wedge dx_i = 0,\ \forall i \in [1, p]$.
2- Existe-t-il une 1-forme $\omega \in \Omega^1(U \subset \mathbb{R}^p)$ telle que $\omega \wedge \omega \neq 0$?
3- Existe-t-il une 2-forme $\omega \in \Omega^2(U \subset \mathbb{R}^p)$ telle que $\omega \wedge \omega \neq 0$?
Exercice 06 :
En utlisant la formule de Green-Riemann, calculer les intégrales :
1- Soit la courbe C un cercle donné par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$
(a)$\oint_C xydx + (x + y)dy$, (b) $\oint_C (x - y)dx + (x + y)dy$, (c) $\oint_C x^2ydx + xy^2dy$
2- Soit la courbe γ un ellipse donné par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(a) $\oint_\gamma (x - y)dx + (x + y)dy$
3- Soit la courbe T un triangle ABC de sommets $A(a, 0), B(a, a), C(0, a)$
(a)$\oint_T y^2dx + (x + y)^2dy$
Exercice 07 :
Vérifier le théorème de Stokes avec.
- Le champ de vecteurs $F(x, y) = (x^2y, 2xy)$
- La surface $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Chapitre 5

Annexe

Université Mohamed Boudiaf - M'sila — Durée :1h et 30 m
Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2015/2016
Département de Mathématiques — Module : Géométrie différentielle

Examen final

==

Exercice 01(Question de cours) :(07pts)

1- Donner la définition de :

1. Immersion, submersion et étale.
2. Variété topologique et variété différentielle.
3. D'une forme différentielle de degré p, d'une 1-forme différentielle fermée.
4. Enoncer le théorème : d'iversion local, de Poincaré et de Green-Riemann.

2- Justifier la réponce : (Oui avec un exemple, Non avec un contre exemple)

1. Toute sous-variété est une variété différentielle.
2. Toute variété différentielle est une sous-variété.
3. Toute sous-variété est un ouvert.

==

Exercice 02 : (05pts)

Soit l'ensemble M_c défini par :

$$M_c = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = c\right\}$$

- Si $c = 1$, M_1 est une sous-variété ?, si la réponce oui qu'elle est sa dimension.
- Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,1)}M_1$.

==

Exercice 03 :(05pts)

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que l'ensemble

$$\{(x, y) \in U^2 ; \; x^3 + y^3 + 3xy - 1 = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}$, vérifiant $g(0) = 1$.

2- Donner un developpement limité l'ordre 1 de g en point 0.

==

Exercice 04 :(03pts)

Soient ω_1 *et* ω_2 deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy, \quad \omega_2 = 2xzdx - 2yzdy + (x^2 - y^2)dz$$

1. Calculer $d\omega_1,\ d\omega_2\ et\ \omega_1 \wedge \omega_2$
2. Montrer que ω_1 est fermée, calculer sa primitive $f = d\omega_1$

Barème :$(0.5 \times 13)+(\mathbf{3}+\mathbf{2})+(\mathbf{3}+\mathbf{2})+(0.5 \times 4+\mathbf{1})$ Bon courage

==
==

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Département de Mathématiques Module : Géométrie différentielle
Durée :1h et 30 m

Examen de rattrapage

==

Exercice 01 :(06pts)

1- Donner la définition de :

1. Homéomorphisme, difféomorphisme et $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme .
2. Carte, Atlas et deux atlas équivalents.
3. Champ de vecteurs, divergence et rotationnelle.

2- Soit l'application φ telle que

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (\sin(\frac{y}{2}) - x, \sin(\frac{x}{2}) - y) \end{array}$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1$
2. Calculer sa différentielle, $d\varphi$ est inversible ?
3. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
4. Déduire que φ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ sur son image et que cette image est ouverte.

==

Exercice 02 : (05pts)

- Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$.

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - z < 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

- Calculer $T_m M_i,\ i = 1, 2\ et\ m \in M_i$ dans les cas affirmatif.
Soit M le cylindre : $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$.
- Montrer que M est produit de deux variétés $M_1 \times M_2$.
- Expliciter M_1 et M_2, Qu'elle est la dimension de M $\dim(M)$.

==

Exercice 03 :(05pts)

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble

$$\{(x,y,z) \in U^3;\ x^2 + y^2 + z^2 - \cos(xyz) = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction g définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.
2- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
3- Calculer ses dérvées partielles en point $(0,0)$.

==

Exercice 04 :(04pts)
Soit ω_1 une 1-forme différentielle telle que :

$$\omega_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

1. Donner le domaine de définition de ω_1
2. Calculer $d\omega_1$ et préciser son degré
3. Est-ce que ω_1 est fermée. ?
4. Est-ce que ω_1 est exacte. ?

Bon courage

Bibliographie

[1] P. Aver, *Calcul différentiel*, Hermann. 19.

[2] M.A. Bahayou, *Introduction la géométrie différentielle*, Université de Ouargla, 2004.

[3] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Armand colin, Paris, 1972.

[4] H. Carton, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, 2008.

[5] J. Cresson, *Premonade vers la géométrie différentielle*, http :// www.math.jussieu.fr/cresson/.

[6] R. Danchin, *Note de cours d'analyse pour la préparation au CAPES*, Téléchargeable sur, http :// perso-math.univ.fr/users/printems.jacques/.

[7] J. Dieudonné, *Elémént d'analyse 1*, Gauthier-Villars.

[8] J. Dixmier, *Cours de topolodie générale*, Press universitaires de France.

[9] F. Malliavin, *Géométrie différentielle intrinsèque*, Harmann,Paris, 1972.

[10] J.M. Monier, *Analyse 2, cours et 600 exercices corrigés*, Dunod, 19.

[11] F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire, cours de première année master*, Ecole normale supérieur, 2006-2007.

[12] F. Pham, *Les différentielles, enseignement des mathématiques*, Masson, 1973.

[13] F. Pham, *Géométrie et calcule différentielle sur les sous-variétés*, Dunod, Paris, 1999.

[14] D. Renard, *Introduction la géométrie différentielle*, 2014.

[15] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Westview press, 200.

[16] A. Teleman, *Géométrie différentielle, cours L3 MG*, Université de Aix-Marseille,Paris, 1972.

[17] C. Viterbo, *Note de cours deGéométrie différentielle*, 2013.

[18] J.C. Yoccoz, *Calcul différentiel*, Publications de l'université Paris sud, 200.