المحور الخامس: برمجة الأعداد الصحيحة.

تمهيد:

بعض المتغيرات الاقتصادية خاصة المتعلقة بالكميات الفيزيائية، لا يمكن تجزئتها، وإلا فقدت صفتها. فعندما نكون بصدد تحديد كميات الثلاجات الواجب إنتاجها في مصنع ما، فلا مجال لتقديرها بالأجزاء كأن نقول أن الإنتاج اليومي هو 20.4 جهاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة، فنقول أن الإنتاج اليومي هو 20 جهازا أو 21 جهاز. وفي البرامج الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل متغيرات قيمها بالفاصلة وهو ما أدى إلى البحث في التخلص من هذا المشكل، فنتج ما يسمى ببرمجة الأعداد الصحيحة.

فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد صحيحة، ويتطلب ذلك المرور بعدة مراحل:

– **المرحلة الأولى:** إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذا حصل حل أمثل متغيراته لا تحمل قيما صحيحة ننتقل إلى المرحلة الثانية.

– **المرحلة الثانية:** تسمى بمرحلة التفريع، وفيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي، بهدف الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة، وتستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل إلى حل أمثل متغيراته تأخذ قيما صحيحة، وهناك طريقتين الأولى هي طريقة التفريع والتحديد والثانية هي طريقة القطع، ونظرا لأن الطريقة الأولى هي الأكثر شيوعا وسهولة لذلك فسوف نقتصر عليها.

أولا: الطريقة البيانية لحل نموذج برمجة الأعداد الصحية:

من أجل توضيح طريقة الحل البيانية لهذا النوع من النماذج سوف نستعين بالمثال التالي وهو نموذج برمجة أعداد صحيحة:

مثال: ليكن البرنامج التالي:

Max: $Z=3x_1+4x_2$

$$s\,/c\begin{cases} x_1+3x_2\leq 13 \\ 5x_1+2x_2\leq 20 \\ x_1,x_2\geq 0 \\ x_1,x_2 \text{ صحيحة} \end{cases} \qquad \dots\dots\dots\dots(01)$$

والمطلوب: تحديد الحل الأمثل للبرنامج بالطريقة البيانية.

تعتمد الطريقة البيانية لحل هذا النوع من البرنامج على تحديد الحل الأمثل للبرنامج وفق الطريقة المتبعة لحل نماذج البرمجة الخطية (أي دون الأخذ بعين الاعتبار الشرط الأخير في البرنامج أعلاه)، فإذا كانت قيم المتغيرات الأساسية للنموذج في الحل الأمثل أعداد صحيحة فهو أيضا حل أمثل لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة. بينما في حالة ما كان الحل المتوصل إليه يحتوي على أعداد غير صحيحة، فإنه يجب إدخال تقنيات جديدة لتحسين الحل والبحث عن الحل العددي الصحيح للبرنامج.

– **تحديد الحل الأمثل للبرنامج دون الأخذ بعين الاعتبار شرط الأعداد الصحيحة:** في هذه المرحلة يتم إعداد التمثيل البياني لحل البرنامج كما يلي:

–**قيود البرنامج:** من القيد الأول يتم تحديد نقطتين لتمثيله بيانيا وهي:

$$x_1 + 3x_2 = 13 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 13/3 \\ \qquad \Rightarrow ct_1(13, {}^{13}/_{3}) \\ x_2 = 0, x_1 = 13 \end{cases}$$

إذن القيد الأول للبرنامج يتحدد بالربط بين النقطتين: A(0,13/3) و B(13,0).

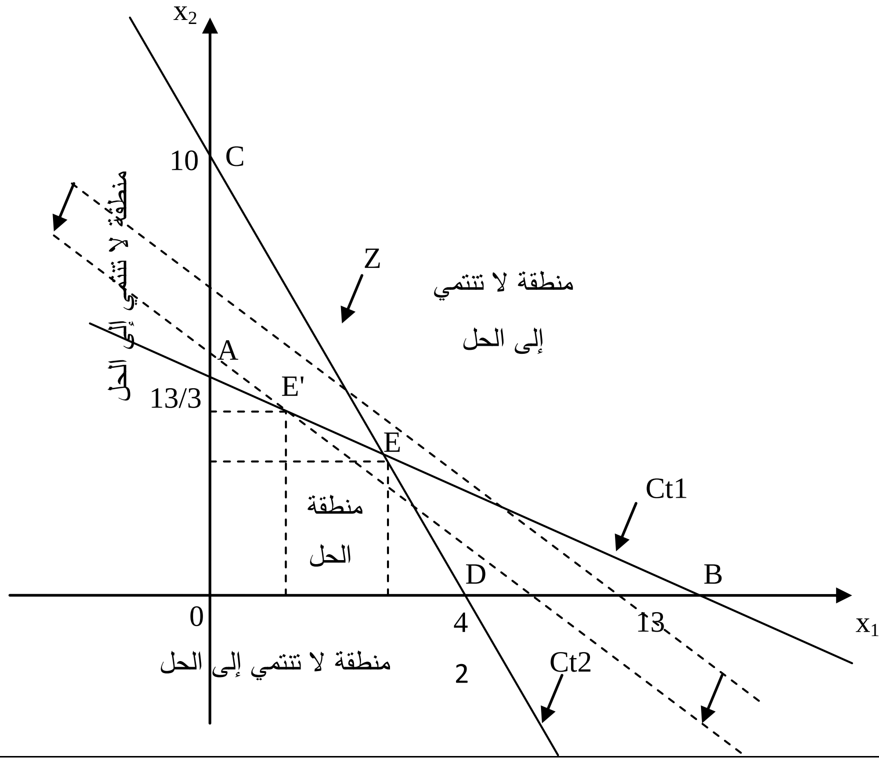
وكذلك الأمر بالنسبة للقيد الثاني:

$$5x_1 + 2x_2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 20/2 = 10 \\ \qquad \Rightarrow ct_1(4,10) \\ x_2 = 0, x_1 = 20/5 = 4 \end{cases}$$

إذن القيد الثاني للبرنامج يتحدد بين النقطتين: C(0,10) و D(4,0).

ويمثل القيدين في معلم متعامد ومتجانس نحصل على الشكل التالي:

الشكل رقم (01): التمثيل البياني لحل البرنامج (01).



من خلال الشكل يظهر أن المساحة OAED هي مساحة الحلول الممكنة غير المشروطة بأن تكون أعداد صحيحة، ونقطة الحل الأمثل هي النقطة E وهي نقطة تقاطع مستقيمي قيود البرنامج ct1 وct2، والتي تقدر فيها القيم التالية: $x_1^*=34/13,\ x_2^*=45/13,\ Z^*=282/13$.

قد يعمد البعض إلى تقريب 21.69 هذه القيم إلى عدد صحيح ليتحصل على حل أمثل ذو أعداد صحيحة مقبول وهو: $x_1=2,\ x_2=3,\ Z=18$، لكن هذا ليس مجديا لأن هذا الحل ليس أمثل ويوجد حل أحسن منه، ويتم تحديد من خلال عملية إزاحة مستقيم (خط) دالة الهدف نحو الأسفل كون الهدف هو منطقة الحل ويكون الحل الأمثل عند أول نقطة ذات إحداثيات صحيحة لـ x_1 وx_2، وفي هذه الحالة تكون عند النقطة E'(1,4)، فيكون الحل الأمثل للبرنامج هو: $x_1=1,\ x_2=4,\ Z=19$ ونسمي عندئذ النقطة بالحل الأمثل العددي الصحيح للبرنامج.

ملاحظة: نلاحظ أن قيمة دالة الهدف لنموذج برمجة أعداد صحيحة دائما أقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية المقابل له.

باستخدام طريقة Simplex نحصل على الحل الأمثل بعد ثلاث خطوات (ثلاث جداول)، والحل الأمثل للبرنامج يكون في الجدول الموالي:

الجدول رقم (01): جدول الحل الأمثل للبرنامج.

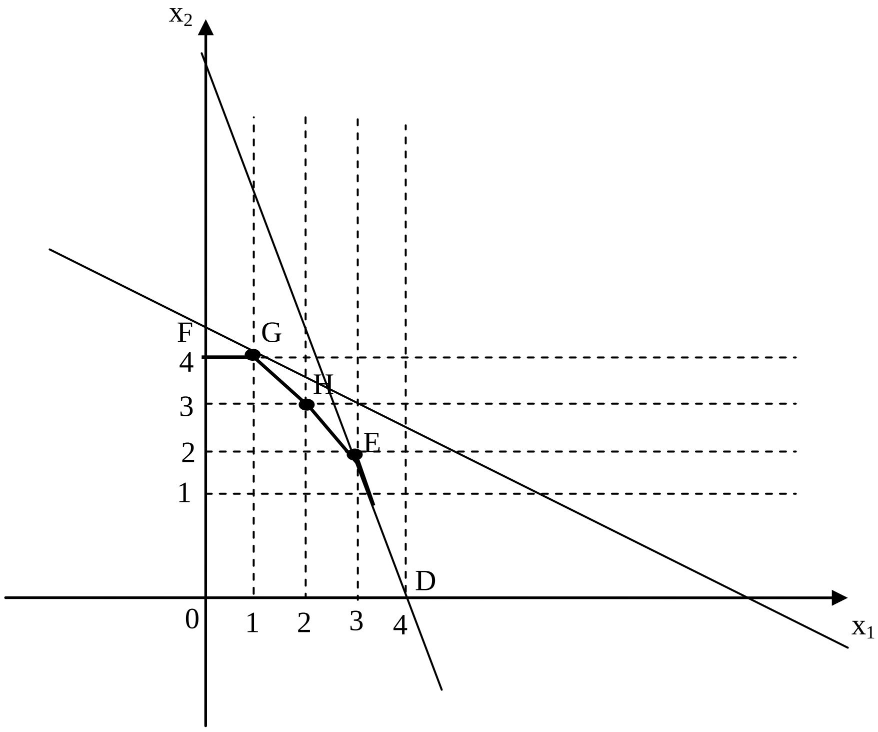
		X_1	X_2	S_1	S_2	
Vb	Cj	3	4	0	0	B_1
X_2	4	0	1	15/39	-1/13	45/13
X_1	3	1	0	-2/13	3/13	34/13
Zj		3	4	42/39	5/13	Z*=282/13
Cj-Zj		0	0	-42/39	-5/13	

في الحقيقة إن الحل بالطريقة البيانية لهذا النوع من النماذج يعتبر أفضل وأسهل الحلول، ولكن بمجرد أن يتجاوز عدد متغيرات النموذج متغيرين تصبح غير قابلة للتطبيق ونضطر إلى اللجوء إلى طرق أخرى للحل وهي تتمثل في استعمال الطريقة الرياضية وفق قواعد السمبلكس بالاستعانة ببعض التقنيات والتي نتطرق إليها في الطرق اللاحقة.

ثانيا: طريقة المستوى القاطع لجوموري (GOMORY):

سنحاول أولا فهم مبدأ هذه الطريقة هندسيا من خلال الشكل (02)، بينما كانت مساحة الحل في الشكل (01) تتمثل في المنطقة OAED وهي منطقة الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق (دون شرط العدد الصحيح)، والحل الأمثل هو أحد الحلول التي تقع على قمم هذا المضلع، ومن بين هذه القمم نلاحظ أن النقطتين O و d فقط تمثل حل ذو أعداد صحيحة.

الشكل رقم (02): التمثيل البياني لحل البرنامج (01).



فرضا لو قمنا بإنشاء مضلع آخر داخل المضلع السابق (OAED) بحيث يحتوي على كل الحلول ذات الأعداد الصحيحة وليكن المضلع (OFGED)، هذا يعني أنه يمكن إيجاد حل أمثل لنموذج برمجة أعداد صحيحة باستخدام طريقة Simplex فقط بإضافة القيود الضرورية التي تعبر عن حدود المضلع الجديد، وهي القيود ذات المستقيمات الجديدة: FG, GE, ED والنموذج المتحصل عليه يتمتع بالخاصيتين التاليتين:

– كل حل ممكن ذو أعداد صحيحة للنموذج الخطي الموافق هو أيضا حل ممكن لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة.

– كل قمم مضلع الحلول لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة هي حلول ذات أعداد صحيحة ممكنة.

نستنتج من هاتين الخاصيتين أن الحل الأمثل لنموذج برمجة أعداد صحيحة هو حل أمثل ذو أعداد صحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

عمليا ليس من السهل إنشاء المضلع الذي يحتوي على كل الحلول العددية الصحيحة في نماذج تحتوي على عدد كبير من المتغيرات، فالطريقة السابقة تعمل على إنشاء قيد جديد (أو مستوى قاطع) انطلاقا من الحل الأمثل الأساسي (الذي لا يحتوي على أعداد صحيحة)، ثم حل النموذج المتحصل عليه بطريقة Simplex، وهكذا نكرر العملية إلى حين الحصول في الحل الأمثل على كل القيم العددية الصحيحة التي نحتاجها، وهذا يعني أننا بحاجة إلى عدة مستويات قاطعة تتمتع بالخصائص التالية:

– تخفض عدد الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق؛

– مستقيمات القيود الإضافية تمر عبر حلول عددية صحيحة ممكنة؛

– منطقة الحلول الممكنة تشمل جميع الحلول العددية الصحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق؛

– بعد عدة مراحل متدرجة من تطبيق المستويات القاطعة نحصل في الأخير على نموذج يحتوي على حل أمثل عددي صحيح.

بقي لنا الآن معرفة كيفية التوصل إلى العبارة الرياضية للقيود الإضافية، وللقيام بذلك سوف نستعين بالمثال السابق ولنأخذ الحل الأمثل في الجدول (01)، ثم نقوم بإنشاء أول قيد إضافي من خلال شكل أحد القيود في الحل الأمثل وذلك كما يلي:

– نقوم باختيار المتغير القاعدي الذي قيمته في الحل الأمثل تحتوي على أكبر جزء كسري وليكن x_1، والقيد المتعلق بهذا المتغير في الحل الأمثل هو:

$x_1+0x_2-(2/13)s_1+(3/13)s_2=34/13$

نسمي الجزء الصحيح لعدد حقيقي أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي هذا العدد، فمثلا الجزء الصحيح للعدد 3.8 هو 3، 7.3− هو 8− وهكذا مع كل عدد حقيقي، ونسمي الجزء الكسري لعدد حقيقي الفرق بين هذا العدد وجزئه الصحيح، فمثلا الجزء الكسري للعدد 3.8 هو 0.8= 3−3.8 وللعدد 7.3− هو 0.7=(8−)−7.3−، وهذا يعني أن الجزء الكسري يكون دائما موجب.

نقوم بفصل كل معامل من معاملات هذا القيد إلى جزء صحيح وجزء كسري كما يلي:

$x_1+(-1+11/13)s_1+(0+3/13)s_2=(2+3/13)$

$\Rightarrow x_1= - (-1+11/13)s_1-(0+3/13)s_2+(2+3/13)$

الآن نقوم بفصل الأجزاء الصحيحة عن الأجزاء الكسرية كما يلي:

$x_1=(S_1-0S_2+2)+(-11/13s_1-3/13s_2+8/13)$

إذن من أجل حل عددي صحيح الحد $(S_1-0\ S_2+2)$ سوف يكون عدد صحيح، ومنه إذا أردنا أن يكون x_1 عدد صحيح يجب أن يكون الحد الثاني $(-11/13\ S_1-\ 3/13\ S_2+8/13)$ عبارة عن عدد صحيح، هنا نلاحظ أن العدد (8/13) هو عدد موجب أقل من الواحد والعبارة $(-11/13\ S_1-3/13\ S_2)$ هي عدد سالب، فإذا كانت العبارة $(-11/13\ S_1-3/13\ S_2+8/13)$ هي عدد موجب فحتما سوف تكون

عدد كسري أقل من الواحد وبالتالي يستحيل أن تكون عدد صحيح، لذلك فإذا أردنا أن تكون هذه العبارة عدد صحيح فلدينا حظ أوفر لو جعلناها سالبة أي:

$-11/13\ S_1-3/13\ S_2+8/13\leq 0$

بهذه الطريقة نكون قد حددنا أول مستوى قاطع وقبل إدخالها كقيد في النموذج الجديد يجب تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج، لدينا من النموذج الأساسي:

$x_1+3x_2+S_1= 13 \Rightarrow S_1=13-x_1-3x_2$

$5x_1+2x_2+S_2= 20 \Rightarrow S_2= 20-5x_1-2x_2$

وبالتعويض في العبارة السابقة نحصل على القيد الجديد التالي:

$-11/13(13-x_1-3x_2)-3/13(20-5x_1-2x_2)+8/13\leq 0$

$2x_1+3x_2\leq 15$ ....(03)

نلاحظ في الشكل (03) كيف أن هذا القيد الجديد استطاع أن يخفض منطقة الحلول الممكنة وذلك بحذف جزء كبير من الحلول ذات الأعداد الغير صحيحة.

الآن نقوم بحل النموذج الجديد (مع القيد الإضافي) بطريقة Simplex دائما:

Max: $Z=3x_1+4x_2$

$$s/c\begin{cases} x_1+3x_2\leq 13 \\ 5x_1+2x_2\leq 20 \\ 2x_1+3x_2\leq 15 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ (03)$$

بعد تطبيق طريقة Simplex نحصل على الحل الأمثل:

الجدول رقم (02): الحل الأمثل للبرنامج (03).

		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
Vb	Cj	3	4	0	0	0	B_1
X_2	4	0	1	0	−2/11	5/11	35/11
S_1	0	0	0	1	3/11	−13/11	8/11
X_1	3	1	0	0	3/11	−2/11	30/11
Zj		3	4	0	11/1	14/11	Z*=230/11
Cj-Zj		0	0	0	−1/11		

نختار من جديد مستوى قاطع آخر وذلك باختيار x_1 من جديد لأن له أكبر جزء كسري وكما فعلنا سابقا نختار القيد:

$x_1+(3/11)\ S_2-(2/11)S_3=30/11$

$x_1+(0+3/11)S_2+(-1+9/11)s_3=2+8/11$

$x_1=(S_3+2)+(-3/11s_2-9/11\ s_3+8/11)$

ومنه نحصل على القيد الجديد:

$-3/11S_2-9/11S_1+8/11\leq 0$

وبالتعويض بالقيم الحقيقية للنموذج نحصل على القيد:

$3x_1+3x_2\leq 17$……. (04)

وبعد إضافته إلى النموذج السابق نحصل على النموذج الجديد:

Max: $Z=3x_1+4x_2$

$$S/c\begin{cases} x_1+3x_2\leq 13 \\ 5x_1+2x_2\leq 20 \\ 2x_1+3x_2\leq 15 \\ 3x_1+3x_2\leq 17 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots.\ (05)$$

وبحل البرنامج بطريقة السمبلكس، نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

الجدول رقم (03): الحل الأمثل للبرنامج (05).

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
Vb	Cj	3	4	0	0	0	0	b_1
X_2	4	0	1	0	0	1	−2/3	3/11
S_2	0	0	0	0	1	3	11/3	8/3
X_1	3	1	0	0	0	−1	1	2
S_1	0	0	0	1	0	−2	1	0
Zj		3	4	0	0	1	1/3	Z*=62/3
Cj-Zj		0	0	0	0	−1	−1/3	

نلاحظ هنا أننا حصلنا على حل أمثل فيه قيمة X1 عدد صحيح، نواصل من جديد ونأخذ المتغير القاعدي x_2 والقيد المتعلق به، وبإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على القيد الجديد:

$x_1+x_2\leq 5$ ....(06)

نضيف هذا القيد لنحصل على النموذج الجديد:

Max: $Z=3x_1+4x_2$

$$S/c\begin{cases} x_1+3x_2\leq 13\\ 5x_1+2x_2\leq 20\\ 2x_1+3x_2\leq 15\\ 3x_1+3x_2\leq 17\\ x_1+x_2\leq 5\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases} \quad \text{..........} \ (07)$$

وفي الأخير نحصل على جدول الحل الأمثل الموالي:

الجدول رقم (04): الحل الأمثل للبرنامج (07).

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
Vb	Cj	3	4	0	0	0	0	0	b_1
X_2	4	0	1	1/2	0	0	0	−1/2	4
S_2	0	0	0	3/2	1	0	0	−13/2	7
S_3	0	0	0	−1/2	0	1	0	−3/2	1
S_4	0	0	0	0	0	0	1	−3	2
X_1	3	1	0	−1/2	0	0	0	3/2	1
	Zj	3	4	1/2	0	0	0	5/2	Z*=19
	Cj-Zj	0	0	−1/2	0	0	0	−5/2	

من خلال الجدول، نكون قد توصلنا إلى حل أمثل عددي صحيح بحيث أن قيم كل متغيرات القرار عبارة عن أعداد صحيحة (بما في ذلك متغيرات الفجوة، بالرغم من أنه لا يشترط أن تكون قيم هذه الأخيرة أعداد صحيحة، بحيث أن يمكن أن نكتفي لو حصلنا فقط على أعداد صحيحة للمتغيرات الأساسية للنموذج فقط x_1 و x_2 والحل الأمثل هو:

$.x_1=1,\ x_2=4,\ Z=19$

ثالثا: طريقة التفريع والتحديد:

يتم إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفريع والتحديد للبرنامج الأولي كما ورد أصلا دون اعتبار لشرط المتغيرات أعداد صحيحة. إذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل صحيحة، نتوقف

ويكون ذلك هو الحل المراد الوصول إليه، وإذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل للبرنامج الأصلي ليست قيما صحيحة فحينئذ نقوم بتوليد برنامج جديد، حيث يضاف إلى البرنامج الأصلي قيد آخر وفق ما يلي:

– إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو x_j حيث يأخذ قيمة غير صحيحة ولتكن b_i، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كما يلي:

$b_{i1}<x_j<b_{i2}$

حيث b_{i1} وb_{i2} أعداد صحيحة غير سالبة، فلتجنيب المتغير قيمة ضمن هذا المجال فإنه يتم اشتقاق قيدين جديدين هما $x_j \leq b_{i1}$ و$x_j \geq b_{i2}$، ونضيف كل قيد منهما إلى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، نقوم بحل كل واحد منهما حلا مستقلا، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة نتوقف، ونأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة للدالة الاقتصادية من بين الحلين في حالة التعظيم وأقل قيمة للدالة الاقتصادية في حالة التدنئة، وإلا نستمر في تفريع البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة للدالة الاقتصادية وهذا لغاية الوصول إلى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة، وهذا ما يسمى بالتفريع.

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

Max: $Z=20x_1+2x_2$

$$s/c\begin{cases}4x_1+10x_2\leq 22\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0\end{cases} \quad ....(08)$$

وهي صحيحة.

الجدول رقم(05):الحل الأمثل للبرنامج (08)

	X_1	X_2	X_3^e	b
X_1	1	5/2	1/4	11/2
Z	0	48	5	110

$X_1=11/2=5.5$ و $x_2=0$ و $Z=110$

يلاحظ أن x_1 هو قيمة غير صحيحة، ويمكن كتابتها كما يلي:

$5<x_1<6$

أي يمكن استنتاج قيدين الأول هو: $x_1\leq 5$ والثاني هو: $x_1\geq 6$.

وعليه فإن البرنامج الأصلي يفرع إلى برنامجين الأول يتكون من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد الأول المستنتج وهو $x_1\leq 5$ والثاني أيضا يتكون من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد $x_1\geq 6$، وهما:

البرنامج الأول

Max: $Z=20x_1+2x_2$

$$s/c\begin{cases}4x_1+10x_2\le 22\\ x_1\le 5\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}\quad (09)$$

وهي صحيحة.

البرنامج الثاني

Max: $Z=20x_1+2x_2$

$$s/c\begin{cases}4x_1+10x_2\le 22\\ x_1\ge 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}\quad (10)$$

وهي صحيحة

نوجد الحل الأمثل لكل برنامج من البرنامجين:

الجدول رقم (06): الحل الأمثل للبرنامج (09)

	X_1	X_2	X_3^e	X_3^e	b
X_2	0	1	1/10	-4/10	1/5
X_1	1	0	0	1	5
Z	0	0	1/5	96/5	502/5

$x_1=5$ و $x_2=1/5=0.2$ و $Z=502/5$.

بينما البرنامج (10) متناقض وليس له حل، لذلك يتم الاستغناء عنه.

من خلال حل البرنامج (09) وجدنا أن المتغيرة x_2 لا تأخذ قيمة صحيحة ويمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$0<x_2<1$

ومنه نستنتج القيدين الأول هو $x_2\ge 1$ والثاني $x_2\le 0$ وهو مرفوض لتناقضه مع شرط عدم السالبية.

لذلك فالبرنامجين الجديدين المتفرعين عن البرنامج (09)هما:

Max: $Z=20x_1+2x_2$

$$S/c\begin{cases}4x_1+10x_2\le 22\\ x_1\le 5\\ x_2\ge 1\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}\quad (11)$$

وهي صحيحة

Max: $Z=20x_1+2x_2$

$$S/c\begin{cases}4x_1+10x_2\le 22\\ x_1\le 5\\ x_2\le 0\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}\quad (12)$$

وهي صحيحة

غير أن البرنامج (12)يلاحظ أنه متناقض لأن القيد $x_2\le 0$ مرفوض ويتناقض مع شرط عدم السالبية.

الجدول رقم(07): الحل الأمثل للبرنامج (11)

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	b
X_1	1	0	1/4	0	10/4	/	3
X_4^e	0	0	−1/4	1	−10/4	/	2
X_2	0	1	0	0	−1	/	1
Z	0	0	5	0	48	/	62

$x_1=3$ و $x_2=1$ و $Z=62$.

يلاحظ أن المتغيرات كلها أصبحت صحيحة، وبالتالي فإن هذا الحل يسمى بحل الحد الأسفل للمسألة، وتكون كل الحلول الأخرى التي لم تعطي قيما صحيحة للمتغيرات ملغاة. ويكون حل الحد الأسفل هذا هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي أي البرنامج (08)، وهو يحققه بالكامل ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في البرنامج الأصلي.

والشكل رقم (03) يوضع التفرعات المستنتجة من البرنامج الأصلي حتى الحصول على الحل الأمثل.

الخلاصة هي أنه إذا كان الحل الأمثل للبرنامج الأصلي –حالة التعظيم– متغيراته ليست أعدادا صحيحة، فإنه يستمر التفريع حسب منهجية المثال السابق، حتى نحصل على حل أمثل متغيراته كلها أعدادا صحيحة، ويكون هذا الحل هو الحل الأسفل للمسألة، وكل البرامج المتفرعة الأخرى تصبح ملغاة، بما فيها البرامج التي أدت إلى حلول تتضمن أعدادا صحيحة لكن قيمة دالة هدفها المحصلة أقل من قيمة دالة الهدف لحل الحد الأسفل. وفي حالة التدنئة فإن الطريقة هي نفسها، تتبع ما عدا أن حل البرنامج الأصلي يكون هو حل الحد الأسفل وحل البرنامج النهائي الذي يتضمن أعدادا صحيحة يكون هو حل الحد الأعلى للمسألة.

الشكل رقم (03): تفرعات البرنامج الاصلي