Annexe Médecine

Biostatistique

1.0

DR. MEHENNI ABDELKRIM

08-03-2024

Table des matières

Objectifs

L'objectif assigné à ce cours est l'initiation des étudiants des troncs communs des Sciences de la nature et de la vie aux traitements des données liées à leurs thématiques de travail via les biostatistiques. La biostatistique, qui est aussi connue sous le nom biométrie, est l'application des statistiques en biologie ; sachant que la statistique est la science dont l'objet est de recueillir, de traiter et d'analyser des données issues de l'observation de phénomènes aléatoires, c'est-à-dire dans lesquels le hasard intervient. La biostatistique nous permet d'écrire une population donnée, selon ses attributs et ses qualités, de mesurer la précision d'une estimation ou de définir le degré d'association entre une série de caractères et d'événements. Elle englobe :

- la conception d'expériences biologiques ;
- la collecte d'informations ;
- l'analyse des données chiffrées ;
- L'interprétation des résultats et des conclusions.

Ce document permet à l'étudiant de voir différents exemples d'application de la biostatistique dans les sciences expérimentales et lui permet de passer du stade d'observation vers le stade de description et de calculs statistiques.

La polycopie est structurée en cinq chapitres, dont le premier aborde la statistique descriptive, qui est un ensemble d'outils permettant d'écrire et d'analyser des phénomènes susceptibles d'être dénombrés et classés. Elle a pour but d'écrire et non d'expliquer. Le deuxième chapitre est consacré à l'introduction des méthodes de dénombrement d'objets statistiques (analyse combinatoire) utiles en théorie des probabilités.

Chapitre 02: Analyse combinatoire

I

L'analyse combinatoire a pour but de compter les dispositions qui peuvent être formées à partir des éléments d'un ensemble fini d'objets. Un objet est caractérisé par :

- la place qu'il occupe dans la disposition;
- le nombre de fois où il peut apparaître.

A. Notions de base

1. Notion d'ordre

Une disposition est dite ordonnée, si lorsqu'à chaque fois qu'un élément change de place (ou de position) la disposition change.

Exemple

On considère un ensemble E ayant trois éléments $E = \{a, b, c\}$. Choisir deux éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs façons différentes.

Le tableau suivant, nous donne tous les cas possibles:

disposition	avec répétition	sans répétition
avec ordre (ordonnée)	aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc	ab, ac, ba, bc, ca, cb
sans ordre (non ordonnée)	aa, ab, ac, bb, bc, cc	ab, ac, bc

2. Factoriel d'un entier n

Étant donné un entier n, le factoriel de n, noté n ! est :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Par convention, on a: $0! = 1$.

Exemple

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

B. Arrangements

Définition

Étant donné un ensemble E de n objets, un arrangement de p de ces objets est une suite **ordonnée** de p objets pris parmi ces n objets.

On distingue deux types d'arrangements : avec et sans répétition.

1. Arrangement sans répétition

On appelle arrangement sans répétition de n objets p à p, toute disposition **ordonnée** de p objets choisis parmi les n objets **sans répétitions**.
Le nombre d'arrangements sans répétition, noté A_n^p, est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots\ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!},$$

avec $1 \leq p \leq n$.
Dans un arrangement sans répétition, les p objets de la liste sont tous distincts. Cela correspond à un tirage **sans remise** et **avec ordre.**

Exemple

Combien de mots de trois lettres ne contenant pas plus d'une fois la même lettre peut-on former avec les lettres de l'alphabet?

$$A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \times 25 \times 24 = 15600 \text{ mots.}$$

2. Arrangement avec répétition

On appelle arrangement avec répétition de n objets p à p, toute disposition **ordonnée** de p objets choisis parmi les n objets **avec répétitions**.

Le nombre d'arrangements avec répétition est :

$$n^p = \underbrace{n \times n \times n \ldots \times n}_{p \text{ fois}}$$

avec $1 \leq p \leq n$.

Dans un arrangement sans répétition, les p objets de la liste ne sont pas nécessairement tous distincts. Cela correspond à un tirage **avec remise** et **avec ordre**.

Exemple

Combien de mots de deux lettres peut-on former avec les lettres de l'alphabet?

$$26^2 = 26 \times 26 = 676 \text{ mots.}$$

C. Permutations

Définition

Étant donné un ensemble E de n objets. On appelle permutation de n objets distincts **toute suite ordonnée** de n objets ou **tout arrangement** n à n de ces objets.

1. Permutation sans répétition

C'est le cas particulier de l'arrangement sans répétition de p objets parmi n objets, lorsque $p = n$.

Le nombre de permutations de n objets est :

$$P_n = n!.$$

Remarque

$$P_n = A_n^n == \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Exemple

Le nombre de manières de placer huit convives (invités) autour d'une table est

$$P_8 = 8! = 40320.$$

2. Permutation avec répétition

Dans le cas où il existe k objets identiques parmi les n objets, alors

$$P_n = \frac{n!}{k!}$$

Exemple

Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut formé en permutant les 8 lettres du mot "**Quantité**", est

$$P_8 = \frac{8!}{2!} = 20160 \text{ mots, car on a le } t \text{ 2 fois.}$$

Et en considérant le mot "**Natation**", le nombre de mots possibles est

$$P_8 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040 \text{ mots, car on a le n 2 fois, le a 2 fois et le } t \text{ 2 fois.}$$

D. Combinaisons

1. Combinaison sans répétitions (sans remises)

Définition

Étant donné un ensemble E de n objets. On appelle combinaisons de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise.
Le nombre de combinaisons de p objets parmi p et sans remise, est :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

avec $1 \leq p \leq n$.

Remarque

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Exemple

Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (main de poker) est une combinaison avec $p = 5\$$ et $n = 32$. Le nombre de tirages possibles est

$$C_{32}^5 = \frac{32!}{(32-5)!5!} = 409696$$

Exemple

La formation d'une délégation de 2 étudiants parmi un groupe de 20 constitue une combinaison avec $p = 2$ et $n = 20$. Le nombre de délégations possibles est

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!2!} = 190$$

2. Combinaison avec répétitions (avec remises)

Le nombre de combinaisons de p objets parmi n et avec remise, est :

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Exemple

Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise.
Le nombre de mots est

$$C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = 35.$$

On distingue 3 cas possibles :

- C_5^3 nombre de mots de 3 lettres différentes et sans ordre;

- $2C_5^2$ nombre de mots de 2 lettres différentes et une lettre redondante;
- C_5^1 nombre de mots de 3 lettres identiques;

au total, on a $C_5^3 + 2C_5^2 + C_5^1 = C_7^3 = 35$ mots possibles.

3. Propriétés des combinaisons et binôme de Newton

a) 1)

$$C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{n!} = 1$$

$\forall n \geq 1$, on a

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$\forall n \geq 2$, on a

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

i 2)

Par récurrence, on déduit:
Si $0 \leq p \leq n$, on a

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Combinaisons composées ou formule de Pascal

Si $0 \leq p \leq n-1$, on a

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p.$$

1 3) Binôme de Newton

Le théorème du binôme de Newton donne l'expression générale du développement de $(a+b)^n$.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \\ &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n \\ &= a^n + na^{n-1}b + \ldots + b^n.\end{aligned}$$

Exemple

Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \sum_{p=0}^{4} C_4^p a^{4-p} b^p \\ &= C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + \ldots + C_4^4 a^0 b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Pour $n = 5$,

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Remarque

Lorsque $a = b = 1$, on a $(1+1)^n = 2^n$ et $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$. Alors

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$$

Bibliographie

[1] A. Ayache and J. Hamonier. Cours : statistique descriptive et calcul de probabilités. Université de Lille. France, 2014.

[10] B. Scherrer. Biostatistique, volume 1. Gaetan Morin, 2e édition, novembre 2008.

[11] B. Scherrer. Biostatistique, volume 2. Gaëtan Morin, 2e édition, mai 2009.

[2] R. Balan and G. Lamothe. Une introduction à la biostatistique. Presses de l'université du Québec, 2012.

[3] F. Carrat and A. Mallet. Biostatistique. Faculté de médecine - Université Pierre et Marie Curie, 2013

[4] M. Colin et G. Payette. Biostatistiques pour les techniques biologiques Montréal, Québec, 3e édition, 2004.

[5] P. Lecoutre Statistique et probabilités : cours et exercices corrigés. Dunod, 2012.

[6] D. Meghlaoui. Introduction à la statistique descriptive École préparatoire en sciences économiques commerciales et des sciences de gestion de Constantine, 2010.

[7] M. MERCIER. Biostatistique et probabilités. Ellipses, 2011.

[8] V. Morice and A. Mallet. QCM corrigée et commentée de biostatistique. Ellipses, 2012.

[9] H. Mzali. Cours : statistiques et calcul de probabilité. École nationale de l'administration. Tunis, 2013.