Calcul differentiel

Dr. Boukhalfa[1]

[1]Faculty of Technology
M'sila University

Définitions

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, et $x_0 \in I$.
f est dite dérivable en x_0 ssi il existe un nombre réel noté $f'(x_0)$ tel que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

f est dite dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I. La fonction

$$f' : I \to \mathbb{R}, x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

est alors la dérivée de f sur I.
Sous réserve d'existence, on définit la dérivée seconde de f : $f'' = (f')'$.
De façon générale, on définit, sous réserve d'existence, la dérivée n-ème de f par :

$$f^{(0)} = f; f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \text{ si } n \in \mathbb{N}^*$$

M'sila Univ

Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de dite de classe C^n sur I, ssi f est au moins n fois dérivable sur I, la dérivée n-ème $f^{(n)}$ étant continue sur I.
f est dite de classe C^∞ sur I ssi f est indéfiniment dérivable sur I.
Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^n (ou : C^n) sur I. En particulier, $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
On définit aussi la dérivée à droite en x_0 :

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0)}$$

sous réserve de limite finie. Définition analogue pour la dérivée à gauche.

Quelques propriétés

- f dérivable en $x_0 \in]a, b[\Leftrightarrow f$ dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f_d{}'(x_0) = f_g{}'(x_0)$.
- f dérivable sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b.

Quelques propriétés

- f est dérivable en x_0 ssi $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$, avec $\lim_0 h = 0$ (développement limité d'ordre 1 de f en x_0).
- Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0. Si f est C^1 sur I, alors f est dérivable sur I. Les réciproques sont fausses.

M'sila Univ

Dérivée première

a) Dérivées des fonctions usuelles

fonction	dérivée	commentaire
$x \mapsto b$	$x \mapsto 0$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $x \mapsto x^r$	$x \mapsto nx^{n-1}$ $x \mapsto rx^{r-1}$	sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}^-$ sur $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}^{*+}$ suivant la valeur de $r \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	sur $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	sur $\mathbb{R}$

b) Somme, produit, quotient : soit u et v dérivables sur $I, a \in \mathbb{R}$. Alors $u+v, au, uv$ sont dérivables sur I, et

$$(u+v)' = u' + v'; (au)' = au'; (uv)' = u'v + uv'$$

Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

c) Composée : soit u dérivable sur I et f dérivable sur $u(I)$. Alors la composée $x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I, de dérivée

$$x \mapsto u'(x)f(u(x)).$$

d) Réciproque : si f est dérivable et f' ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors f est une bijection dont la réciproque est dérivable sur l'intervalle $J = f(I)$, et on a, pour tout $y \in J$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y)}.$$

M'sila Univ

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $I, x_0 \in I$.
On dit que f est convexe sur I ssi la courbe C_f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.
On dit que f est concave ssi la courbe C_f est en-dessous de ses tangentes en tout point de I.
Le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f ssi la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 traverse C_f.
La tangente à C_f au point d'abscisse x ayant pour équation

$$y = f(x) + f'(x)(t - x),$$

f est convexe sur I ssi, quels que soient x, t dans I :

$$f(t) \geq f(x) + f'(x)(t - x).$$

Dérivée seconde

Pour f de classe C^2 sur l'intervalle I:

$$f \quad convexe \Leftrightarrow f'' > 0.$$

$$f \quad concave \Leftrightarrow f'' < 0.$$

Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour C_f.

M'sila Univ

Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M = (x, y)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. La distance euclidienne $d(M_0, M)$ est définie par

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, et soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On cherche à déterminer les extrema locaux, ou relatifs, de f sur D, c'est-à-dire les valeurs $f(M_0)$ de f telles que :

$$\exists\ \alpha > 0, [M \in D \quad et \quad d(M_0, M) \leq \alpha \Rightarrow f(M_0) \geq f(M)]$$

(maximum local), ou

$$\exists\ \alpha > 0, [M \in D \quad et \quad d(M_0, M) \leq \alpha \Rightarrow f(M_0) \leq f(M)]$$

(minimum local).
Si l'inégalité a lieu pour tout $(x, y) \in D$, on parle d'extremum, de maximum, de minimum global, ou absolu. Pour l'aide à la mémorisation, les résultats pour les fonctions d'une variable sont :

- Si f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a; b]$, alors f admet un minimum et un maximum (globaux).
- Si f est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert I, et si $f(x_0)$ est un extremum local, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f est de classe C^2 sur l'intervalle ouvert I, si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), alors $f(x_0)$ est un minimum local (resp. un maximum local). (Attention au sens des inégalités.)

Dérivées partielles d'ordre 1

Par définition, sous réserve de limite finie :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

On note aussi, respectivement : $f_x^{'}(x_0, y_0), f_y^{'}(x_0, y_0)$.

Pratiquement, pour calculer $f_x^{'}(x, y)$, on calcule la dérivée de f considérée comme une fonction de x, la variable y étant considérée comme une constante, et de même pour $f_y^{'}(x, y)$:

M'sila Univ