Linéarisation entrée-sortie

Dr. Boukhalfa[1]

[1]Faculty of Technology
M'sila University

M'sila Univ

Introduction

En Automatique, la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système. Des dynamiques sont négligées, comme celles qui se trouvent en dehors de la bande passante du système asservi; les valeurs des paramètres du modèle sont considérés égales à leurs valeurs nominales. Du fait de ces approximations, il est généralement nécessaire de recourir à une étape de validation a posteriori de la loi de commande. On parle d'analyse de la robustesse, il s'agit en effet d'analyser la robustesse du comportement du système asservi face aux perturbations externes (variation des conditions de fonctionnement, comme la température) ou internes (variation des paramètres) du système.

M'sila Univ

Opérateurs de Lie (dérivée et crochet de Lie)

Dérivées de Lie

Soit h une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée de Lie de h dans la direction f, notée $L_f h$, la dérivée de h le long de la courbe intégrale de f en $x = 0$, donc on note :

$$L_f h(x) = \frac{d}{dt} h(X_t(x))\Big|_{x=0} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$$

Par cette formule, un champ de vecteurs f quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre comme suit :

$$L_f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Exemple 1 : Dans un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées(x,t), considérons le champ $f(x,t) = \binom{v}{1}$ où v est une constante arbitraire, et la fonction $h(t,x) = x - vt$ de U dans $\mathbb{R}$. La dérivée de Lie de la fonction h le long du champ f est donnée par :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^{n} f \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} v + \frac{\partial h}{\partial t}.1 = v - v = 0$$

La définition précédente, peut être réécrite comme suit : Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ champs de vecteurs et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire. On introduit la dérivée de Lie comme étant une nouvelle fonction scalaire, notée $L_f h$, donnant la dérivée $h(x)$ dans la direction de $f(x)$, tel que :

M'sila Univ

Linéarisation entrée-sortie

La linéarisation entrée-sortie permet d'utiliser des lois de commande linéaires sur des systèmes non linéaires. Le principe est d'utiliser un changement de variable afin de trouver une variable d'état linéaire décrivant la dynamique du systèmee. On se propose une linéarisation entrée-sortie en utilisant les crochets de Lie pour contrôler ce type de systèmes. Il est possible, à partir de la théorie de Lypunov, d'utiliser une commande adaptative afin de contrôler un drone ayant des paramètres inconnus ainsi que des perturbations extérieures. Une fois la variable d'état linéarisée, il devient simple d'implémenter n'importe quelles lois linéaires. Cette méthode, étant facile à réaliser et facilement modifiable.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$
$$y = h(x) \tag{2}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du système $y \in \mathbb{R}$ la sortie du système, $u \in \mathbb{R}$.

On considère f, g, h des fonctions non linéaires continues différentiables dans $D \subset \mathbb{R}^n$.

La linéarisation entrée sortie consiste à la détermination d'une équation différentielle linéaire liant la sortie du système à une nouvelle entrée à définir.

Pour aboutir à ce résulat, on dérive la sortie y juqu'a ce que la commande apparaît. On aboutit à :

Cas mono entrée mono sortie (SISO)

La dérivée par rapport au temps de $y = h(x)$ est donnée par :

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial h}(x)f(x) + \frac{\partial h}{\partial h}(x)g(x)u$$

Si $\frac{\partial h}{\partial h}(x)g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D_0$ alors le système non linéaire est dit de degré relatif égal à un sur D0. Intuitivement, cela implique que la variable de commande u apparaît explicitement dans l'équation différentielle pour la dérivée première de la sortie y, c'est-à-dire que l'entrée et la sortie sont séparées par un seul intégrateur.
Si $\frac{\partial h}{\partial h}(x)g(x) = 0$ (c'est-à-dire que u n'affecte pas directement), alors nous continuons à différencier la sortie jusqu'à ce que u apparaisse explicitement.

Afin de définir les dérivées deuxième, troisième (et ainsi de suite), il est commode de définir le concept de dérivée de Lie, qui est utilisé en calcul avancé.
La notation pour la dérivée de Lie de h par rapport à f est définie comme :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x).$$

Cette notation est pratique pour traiter les dérivées répétées, comme indiqué ci-dessous :

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^{k-1} h(x)\right) f(x)$$
$$L_g^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^k h(x)\right) g(x).$$

Cas mono entrée mono sortie (SISO)

Sur la base de la définition du dérivé de Lie, si

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) g(x) = 0$$

nous continuons à prendre des dérivées jusqu'à $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$, ce qui implique que u apparaît d'abord explicitement dans l'équation pour $y^{(r)}$, la dérivée $r^{ième}$ de la sortie.
Le système non linéaire (1)-(2) est dit avoir un degré relatif r dans une région $D_0 \subset D$ si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $x \in D_0$:

M'sila Univ

Cas mono entrée mono sortie (SISO)

$$
\begin{aligned}
L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots r - 2 \\
L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0.
\end{aligned}
$$

Si un système a un degré relatif r, alors

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u.$$

Par conséquent, le système est entrée-sortie linéarisable, puisque la commande de retour d'état est

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left[-L_f^r h(x) + v \right]$$

M'sila Univ

donne la correspondance entrée-sortie linéaire suivante :

$$y^{(r)} = v$$

Il s'agit simplement d'une chaîne de r intégrateurs, qui peuvent être facilement contrôlés par une sélection appropriée de v. Cependant, à moins que $r = n$, il y a plus d'états dans le système qui ne sont pas affectés par l'entrée de commande u.

Considérons le modèle de bras manipulateur flexible dont la représentation d'état est donnée par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{j_1}\sin(x_1) - \frac{k}{j_1}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{j_2}(x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{j_2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dh}{dx} f(x) + \frac{dh}{dx} g(x) u$$
$$\dot{y}(t) = L_f h(x) + L_g h(x) u$$

Avec:
$L_f h(x) = \frac{dh}{dx} f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dérivée de lie de la fonction $h(x)$ selon $f(x)$.
$L_g h(x) = \frac{dh}{dx} g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dérivée de lie de la fonction $h(x)$ selon $g(x)$.
La commande par retour d'état de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

Le degré relatif r d'un système est défini comme le nombre d'intégrateurs entre l'entrée et la sortie (le nombre de fois y doit être différencié pour que l'entrée u apparaisse).

1. Pour un système linéaire

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

   a un degré relatif $r = n - m$

2. Un système non linéaire a un degré relatif r si

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1, \ldots, r-1; \quad L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$$

M'sila Univ

Exemple 1

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$
$$y = x_1$$

En différenciant la sortie

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$
$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$
$$y = x_1$$

Ainsi, le système a un degré relatif $r = 2$.

Exemple 2

Calculer le degré relatif du système suivant au point $[1,1]^T$.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= 2\omega\zeta(1-\mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + u \\
y = h(x) &= x_1
\end{aligned}
$$

où ω, ζ et μ sont des constantes non nulles. Si possible, trouvez deux points dans l'espace d'état où le degré relatif du système est différent.

Exemple 2

Nous calculons les dérivées de Lie nécessaires comme suit :

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = (1, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g(x) = (0, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

où ω, ζ et μ sont des constantes non nulles. Si possible, trouvez deux points dans l'espace d'état où le degré relatif du système est différent. Cela signifie que le degré relatif du système est 2 en tout point de l'espace d'état (y compris $[1, 1]^T$). Il n'y a donc pas de tel points dans l'espace d'état où le degré relatif du système est différent.