

# COMMANDE À STRUCTURE VARIABLE (MODE GLISSANT CAS CLASSIQUE)

Dr. BOUKHALFA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>FACULTY OF TECHNOLOGY  
M'SILA UNIVERSITY



Le but de ce chapitre est de présenter de manière informelle au lecteur les systèmes de commande par mode glissant à structure variable. Un système à structure variable est un système dynamique dont la structure change en fonction de la valeur actuelle de son état. Un système à structure variable peut être considéré comme un système composé de structures indépendantes avec une logique de commutation entre chacune des structures. Avec une logique de commutation appropriée, un système à structure variable peut exploiter les propriétés souhaitables de chacune des structures dont le système est composé. Plus encore, un système à structure variable peut avoir une propriété qui n'est une propriété d'aucune de ses structures. Nous illustrons les idées ci-dessus avec deux exemples numériques.



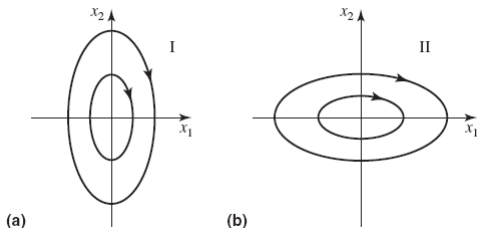
# EXEMPLE 1

On considère un modèle de système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ux_1,\end{aligned}\tag{1}$$

ayant deux structures correspondant à  $u = 1/a$  et  $u = a$ , où  $a$  est une constante positive supérieure à 1, dans nos simulations nous prenons  $a = 5$ . Les portraits dans le plan de phase des structures sont montrés sur les figures 1(a) et (b).

# EXEMPLE 1



**FIGURE 1:** (a) et (b) Portraits dans le plan de phase des structures constituant un système de structure variable.

Les portraits de plan de phase des structures individuelles sont des familles d'ellipses. Aucune des structures n'est asymptotiquement stable-elles sont seulement stables. Cependant, en choisissant une logique de commutation appropriée entre les structures, nous pouvons rendre le système de structure variable résultant asymptotiquement stable.



# EXEMPLE 1

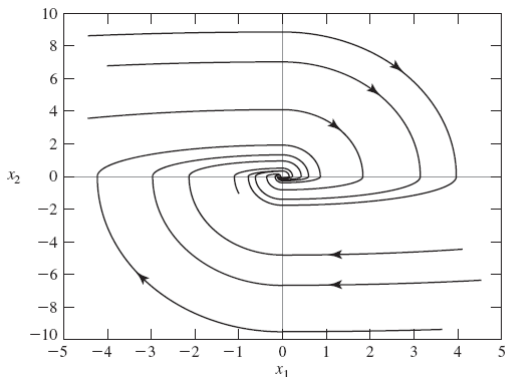
En effet, supposons que la structure du système soit modifiée à chaque fois que la trajectoire du système croise l'un des axes de coordonnées du plan d'état, c'est-à-dire :

$$a = \begin{cases} 1/5 & \text{si } x_1 x_2 < 0, \\ 5 & \text{si } x_1 x_2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Un portrait de plan de phase du système (1) avec la logique de commutation spécifiée par (2) est illustré à la figure 1. On ajoute que les trajectoires spiralent dans le sens des aiguilles d'une montre vers l'origine.



# EXEMPLE 1



**FIGURE 2:** Portrait dans le plan de phase du système à structure variable décrit par (1) et (2).



## EXEMPLE 1

Un portrait de plan de phase du système (1) avec la logique de commutation spécifiée par (2) est illustré à la figure (2). On ajoute que les trajectoires spiralent dans le sens des aiguilles d'une montre vers l'origine.

## EXEMPLE 2

Considérons le double intégrateur :

$$\ddot{x} = u,$$

dont le modèle d'espace d'état est :

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

## EXEMPLE 2

Soit  $u = \pm 2$ . Les trajectoires typiques du système ci-dessus sont illustrées à la figure 3. Nous avons donc deux structures indépendantes, aucune d'elles n'étant stable. Utilisons maintenant la logique de commutation suivante entre chacune des structures :

$$u = -2\text{sign}(x_1 + x_2). \quad (4)$$

Avec la logique de commutation en (4), le système en boucle fermée change de structure chaque fois que la trajectoire d'état traverse la ligne :

$$x_1 + x_2 = 0.$$





# EXEMPLE 2

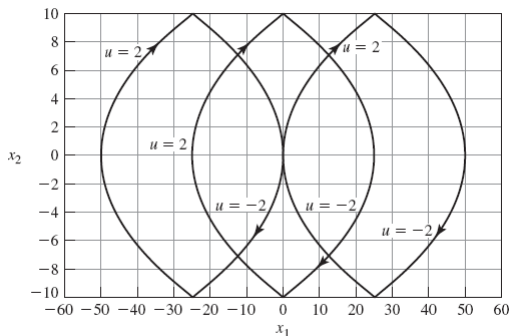


FIGURE 3: Trajectoires typiques du système à double intégrateur.



## EXEMPLE 2

On introduit la notation :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Ensuite, nous pouvons décrire l'action de la logique de commutation comme :

$$u = \begin{cases} -2 & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) < 0, \\ 2 & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) > 0. \end{cases} \quad (5)$$

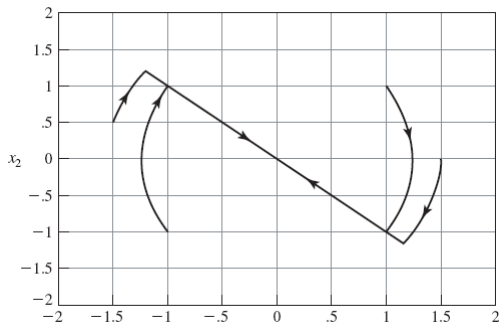


## EXEMPLE 2

Les trajectoires typiques du système en boucle fermée décrites par (3) et (4) pour des conditions initiales situées «près» de l'origine du plan d'état sont illustrées à la figure 4. A proximité de l'origine, une fois que les trajectoires interceptent la ligne de commutation, elles s'y cantonnent par la suite. Si nous augmentons la taille du pas d'intégration, nous pouvons alors observer des oscillations, ou des vibrations, de la trajectoire autour de la surface de commutation, comme cela est expliqué sur la figure 5. Un graphique de deux trajectoires avec un temps d'intégration accru est illustré à la figure 6.



## EXEMPLE 2



**FIGURE 4:** Trajectoires typiques du système-fermé (3), (4) pour des conditions initiales « proches » de l'origine du plan d'état. La loi de commande appliquée est donnée par (4).



# EXEMPLE 2

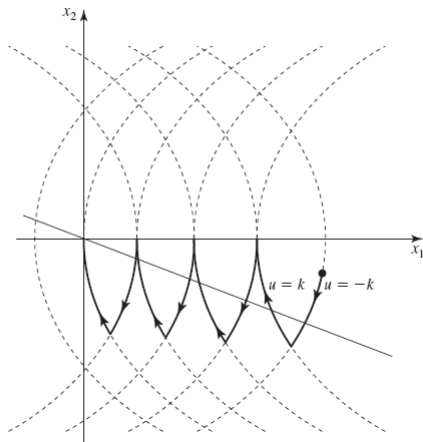
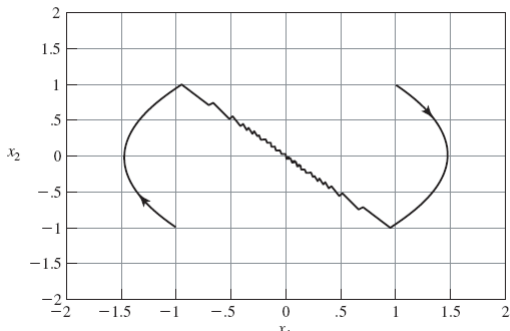


FIGURE 5: Broutement dans un système de mode glissant à structure variable-une vue agrandie.



## EXEMPLE 2



**FIGURE 6:** Une illustration du broutement dans un système de mode glissant à structure variable composé du double intégrateur et de la loi de commande,  $u = -\text{sign}(x_1 + x_2)$ . Deux trajectoires partant de deux conditions initiales différentes sont tracées.



# DÉFINITION DU MODE DE GLISSEMENT

Le mouvement du système alors qu'il est confiné à la ligne de commutation ou à une surface est appelé glissement. Un mode de glissement existera si au voisinage de la surface de commutation les vecteurs vitesse d'état sont dirigés vers la surface. Dans un tel cas, la surface de commutation attire des trajectoires lorsqu'elles se trouvent à son voisinage, et une fois qu'une trajectoire croise la surface de commutation, elle y restera par la suite.

Une surface  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  est attractive si :

- 1 toute trajectoire partant de la surface y reste, et
- 2 toute trajectoire partant de l'extérieur de la surface y tend au moins asymptotiquement.



Ainsi, pour qu'un mouvement de glissement se produise, nous avons besoin

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \dot{\sigma} < 0 \text{ et } \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \dot{\sigma} > 0.$$

Les conditions ci-dessus sont illustrées sur la figure 7. Ils assurent que le mouvement de la trajectoire d'état  $x$  de part et d'autre de la surface de commutation  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  est vers la surface de commutation. Les deux conditions peuvent être combinées pour donner :





# DÉFINITION DU MODE DE GLISSEMENT

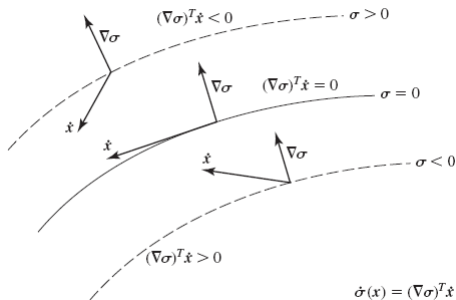


FIGURE 7: Une illustration de la condition suffisante de l'attractivité de la surface de commutation.



$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \quad (6)$$

au voisinage de la surface de commutation. Notons cependant que le système en boucle fermée est maintenant modélisé par des équations différentielles à membres droits discontinus. Les équations différentielles de modélisation sont discontinues sur la surface de commutation  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ . C'est la raison pour laquelle nous appelons souvent la surface de commutation la surface de discontinuité. Une analyse rigoureuse de tels systèmes ne peut être effectuée en utilisant les méthodes de la théorie classique des équations différentielles. Une solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$  avec un second membre continu est une fonction  $x(t)$  qui a une dérivée et satisfait l'équation différentielle partout sur un intervalle donné.



## EXAMPLE 3

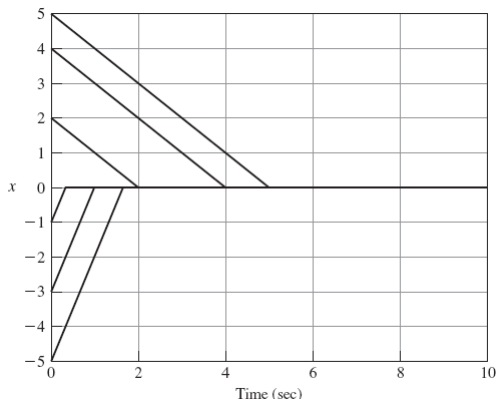
Considérons l'équation différentielle suivante avec le membre de droite discontinu :

$$\dot{x} = 1 - 2\text{sign}(x) \quad (7)$$

Pour  $x < 0$ , nous avons  $\dot{x} = 3$ , tandis que pour  $x > 0$ ,  $\dot{x} = -1$ . Dans la figure 8, des tracés de  $x$  en fonction du temps pour différentes conditions initiales sont donnés. Lorsque  $t$  augmente, la solution  $x$  de (7) atteint la ligne  $x = 0$  et y reste. La fonction  $x(t)$ , cependant, ne satisfait pas (7) au sens habituel car si  $\dot{x}(t) = 0$  et  $x(t) = 0$ , le membre de droite de (7) devient :



# EXAMPLE 3



**FIGURE 8:** Tracés de  $x$  en fonction du temps pour différentes conditions initiales pour l'équation différentielle (7).



Dans cette partie, nous discutons du problème de la conception de contrôleurs par mode glissant pour les installations à entrée unique. La conception d'un contrôleur par mode glissant à structure variable se compose de deux phases :

- 1 Conception de surface de glissement (commutation) afin d'obtenir le comportement souhaité du système, comme la stabilité à l'origine, lorsqu'elle est limitée à la surface.
- 2 Sélection des gains de rétroaction du contrôleur de sorte que le système fermé soit stable sur la surface de glissement.



Il y a un certain nombre d'avantages lorsque le système est en glissement.  
En particulier :

- ① En glissement, le système n'est pas affecté par les incertitudes.
- ② En glissement, le comportement du système est régi par un ensemble réduit d'équations différentielles.

C'est ce que nous appelons la réduction de commande. Il est très utile dans la conception de contrôleurs par mode glissant à structure variable.



Nous discutons maintenant une phase de conception de surface de glissement pour les systèmes linéaires à entrée unique. Sans perte de généralité, nous supposons que le modèle du système est déjà sous sa forme compagne :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$



Soit la surface de glissement :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{s}\mathbf{x}$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_{n-1} \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$





Notez que, sans perte de généralité, nous avons supposé que  $s_n = 1$ . Si ce n'était pas le cas, nous pourrions diviser les deux côtés de  $\mathbf{s}\mathbf{x} = 0$  par  $s_n \neq 0$  pour s'assurer que  $s_n = 1$ . En utilisant l'équation ci-dessus de la surface de glissement, nous pouvons écrire :

$$x_n = -s_1x_1 - s_2x_2 - \cdots - s_{n-1}x_{n-1}$$

Nous combinons maintenant les équations du modèle du système et celle de la surface de glissement. Notez d'abord que :



$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= -s_1 x_1 - s_2 x_2 - \cdots - s_{n-1} x_{n-1},\end{aligned}\tag{8}$$



ou, de manière équivalente sous forme matricielle,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & \dots & -s_{n-1} \end{bmatrix} z, \quad (9)$$

où  $z = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1}]^T$ . L'équation ci-dessus décrit la dynamique du système en glissement. Observons la réduction d'ordre de la dynamique du système en glissement. Nous avons maintenant  $n - m = n - 1$  équations différentielles du premier ordre. Les pôles du système d'ordre réduit sont les racines de l'équation :



$$\lambda^{n-1} + s_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + s_2\lambda + s_1 = 0.$$

La réponse du système en glissement est parfaitement précisée par un choix approprié des composantes  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  de la surface de commutation. Considérons à nouveau l'exemple 2. La surface de glissement pour cet exemple peut être représentée comme :

$$\sigma \mathbf{x} = [s_1 \quad 1] \mathbf{x} = 0,$$

ou de manière équivalente,

$$s_1 x_1 + x_2 = 0.$$



La dynamique du système en glissement est décrite par :

$$\dot{z} = -s_1 z,$$

qui n'est qu'un système de premier ordre. Notez que pour assurer la stabilité du système réduit, nous sélectionnons  $s_1 > 0$ .

Après avoir conçu une surface de glissement, nous construisons un contrôleur de rétroaction. Dans cette section, nous discutons une conception de contrôleur pour les systèmes linéaires à entrée unique. L'objectif du contrôleur est de conduire l'état du système à la surface de glissement et de le maintenir sur la surface pour tout le temps ultérieur. Nous utilisons une approche Lyapunov généralisée dans la construction du contrôleur. Plus précisément, nous utilisons une distance,  $V = 0.5\sigma^2$ , de la surface de glissement  $\sigma$  comme fonction candidate de Lyapunov. Ensuite, nous sélectionnons les gains des contrôleurs de sorte que la dérivée temporelle de la fonction candidate de Lyapunov choisie évaluée sur la solution du système contrôlé soit définie négative par rapport à la



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \right) = \sigma \dot{\sigma} < 0.$$

On considère la structure du contrôleur de la forme

$$u = k_1^\pm x_1 + k_2^\pm x_2 + \cdots + k_n^\pm x_n, \quad (10)$$



where  $k_i^\pm$  sont les gains de rétroaction à déterminer pour que la condition  $\sigma\dot{\sigma} < 0$  soit satisfaite. Pour déterminer les gains de rétroaction, nous substituons  $u$ , donné par (10), dans l'expression et utilisons (8) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \sigma\dot{\sigma} &= \sigma[s_1 \quad s_2 \dots 1]\dot{\mathbf{x}} \\
 &= \sigma(s_1\dot{x}_1 + \dots + s_{n-1}\dot{x}_{n-1} + \dot{x}_n) \\
 &= \sigma(s_1x_2 + \dots + s_{n-1}x_n + \dot{x}_n) \\
 &= \sigma(s_1x_2 + \dots + s_{n-1}x_n - a_0x_1 - \dots - a_{n-1}x_n + u) \\
 &= \sigma(s_1x_2 + \dots + s_{n-1}x_n - a_0x_1 - \dots - a_{n-1}x_n + k_1^\pm x_1 + \dots + k_n^\pm x_n).
 \end{aligned}$$

Réorganiser les termes donne :

$$\sigma\dot{\sigma} = \sigma x_1(-a_0 + k_1^\pm) + \sigma x_2(-a_1 + s_1 + k_2^\pm) + \dots + \sigma x_n(-a_{n-1} + s_{n-1} + k_n^\pm).$$



Un moyen possible de s'assurer que  $\sigma \dot{\sigma} < 0$  est de sélectionner les gains pour forcer chaque terme dans  $\sigma \dot{\sigma}$  à être négatif, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sigma x_1(-a_0 + k_1^\pm) &< 0, \\ \sigma x_2(-a_1 + s_1 + k_2^\pm) &< 0, \\ &\vdots \\ \sigma x_n(-a_{n-1} + s_{n-1} + k_n^\pm) &< 0.\end{aligned}$$





Un choix possible de gains qui conduit à la satisfaction de l'attractivité à l'état de surface,  $\sigma \dot{\sigma} < 0$ , est :

$$\begin{aligned} k_1^+ &< -|a_0|, & \text{si } \sigma x_1 > 0, \\ k_1^- &> |a_0|, & \text{si } \sigma x_1 < 0, \\ &\vdots \\ k_n^+ &< -(|a_{n-1}| + |s_{n-1}|) & \text{si } \sigma x_n > 0, \\ k_n^- &> |a_{n-1}| + |s_{n-1}| & \text{si } \sigma x_n < 0, \end{aligned} \tag{11}$$



Nous pouvons également utiliser les gains de contrôleur suivants :

$$\begin{aligned}k_1^\pm &= -(|a_0| + \epsilon)\text{sign}(x_1\sigma), \\ &\vdots \\ k_n^\pm &= -(|a_{n-1}| + |s_{n-1}| + \epsilon)\text{sign}(x_n\sigma),\end{aligned}\tag{12}$$

où  $\epsilon > 0$  est un paramètre de conception. Notez que les gains des contrôleurs donnés par (12) satisfont les conditions (11). Plus la valeur de  $\epsilon$  est grande, plus la trajectoire converge rapidement vers la surface de glissement.

