CHAPITRE I : LA CONVECTION THERMIQUE

(Thermal convection, الحمل الحراري)

I.1 Introduction

La convection est le mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide gazeux ou liquide (écoulement) et échange avec une surface qui est à une température différente.

Exemple : C'est ce qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact du radiateur, se dilate et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il est alors remplacé par de l'air froid et ainsi de suite ; il y a existence de courants de fluide dans l'air ambiant.

On distinguera la convection forcée (due à l'action d'une pompe, d'un ventilateur, etc., …) de la convection naturelle (ou libre) dans laquelle le mouvement du fluide est créé par des différences de densité, elles mêmes provoquées par des différences de température.

I.2 Définition

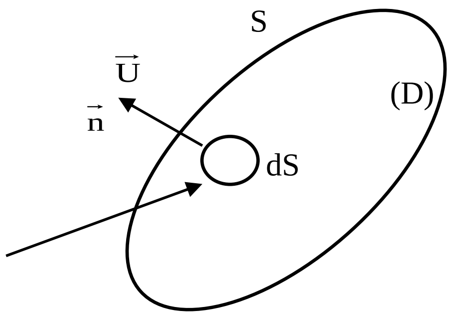
Différence totale d'une fonction:

Soit f une fonction scalaire dérivable par rapport aux variables (t,x,yz).

La différence totale de cette équation est donnée par:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U}.\overrightarrow{grad}\, f \qquad (1)$$

I.3 Equation de continuité (ou de la conservation de la masse)



Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface par une surface **S** fermée de volume V.

- la partie de fluide à une masse $m=\iiint \rho.dV$ **(2)**
  si **ρ= Cte** → **m= ρ.V**

- selon l'équation (1), la variation de la masse (**m**) pendant dt s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \vec{U}.\overrightarrow{grad}(m) \qquad (3)$$

- le terme ($\vec{U}.\overrightarrow{grad}(m)$) représente le débit massique en (kg/s)

on peut écrire donc : $\vec{U}.\overrightarrow{grad}(m) = \iint_S -\rho.\vec{U}.\vec{n}.ds$ (4)

le signe (-) est introduit afin que le flux entrant soit compté positive

- et le terme ($\frac{\partial m}{\partial t}$) représente la création de la masse instantané
- Remplaçant les équations (2) et (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho.\vec{U}.\vec{n}.ds \qquad (5)$$

en utilisant le théorème d'Ostrogorski

$$\iint_S \rho.\vec{U}.\vec{n}.ds = \iiint_V div(\rho i\vec{U}).dV \qquad (6)$$

En remplaçant l'équation (6) dans l 'équation (5) :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V div(\rho.\vec{U}).dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) \right].dV \qquad (7)$$

- Le principe de la conservation de la masse nous permet d'écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) \right].dV = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) = 0} \qquad (8)$$

Cette équation est appelé l'équation de continuité

I.3.1 Cas particuliers:

a) Ecoulement stationnaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \boxed{div(\rho\vec{U}) = 0}$$

b) Ecoulement incompressible (ρ=cte)

la masse volumique est constante dans tout le fluide est indépendante du temps :

$$\boxed{div(\vec{U}) = 0}$$

I.3 Equation du mouvement (ou de la conservation du quantité du mvt)

ان المائع الموجود في المجال (D) والمحدد بالمساحة (S) سيكون تحت تأثير قوى مؤثرة عليه هي القوة الكتلية في وحدة الحجم وأخرى قوى إجهاد مماسية ناتجة عن لزوجة المائع وهي بمثابة قوى احتكاك بين جزيئاته (contraintes de cisaillement) وضغط ناظمي (قوى الضغط) تؤثران

على المساحة ونرمز لها بالرمز $\vec{T}$.
بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على الكتلة الموجودة داخل المجال نحصل على:

$$m.\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\rightarrow \iiint \rho.dV.\frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho.\vec{F}.dV + \iint \vec{T}.\vec{ds} \qquad (10)$$

avec $\vec{T} = \vec{\sigma}.\vec{n}$

$\vec{n}$: vecteur unitaire normale à la surface

$\vec{\sigma}$: tenseur des contraintes ;

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

les composantes des tenseur des contraintes ($\sigma_{i,j}$) dépendent en générale par les variables essentielles comme la pression et la vitesse.

تكون مركبات تنسور الإجهاد ($\sigma_{i,j}$) على العموم متعلقة بالمتغيرات الأساسية منها الضغط والسرعة

Remarque : $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ c'est-à-dire $\sigma_{x,y} = \sigma_{y,x}$, $\sigma_{x,z} = \sigma_{z,x}$, $\sigma_{z,y} = \sigma_{y,z}$

$$\rightarrow \iiint \rho.dV.\frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho.\vec{F}.dV + \iint \vec{\sigma}.\vec{n}.ds \qquad (10)$$

et $\iint \vec{\sigma}.\vec{n}.ds = \iiint div(\vec{\sigma}).dV$ Théorème d'Ostrogorski

L'équation (9) devienne alors: $\iiint \rho.dV.\frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho.\vec{F}.dV + \iiint div(\vec{\sigma}).dV$

Comme le volume est arbitraire, on peut écrire:

$$\rho.\frac{d\vec{U}}{dt} = \rho.\vec{F} + div(\vec{\sigma}) \qquad (11)$$

$$div(\vec{\sigma}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}$$

في حالة الموائع اللزجة التي تخضع لعلاقة نيوتن فان :

$$\sigma_{i,j} = -p.\delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{i,j}.div(\vec{U}) \qquad (12)$$

ou **p** est la pression et $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

λ et μ sont les coefficients de Lami (viscosité)

- **Stocks** a trouvé une relation entre λ et μ tel que: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

La partie suivante de l'équation **(12)**

$\tau_{i,j} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{i,j}.div(\vec{U})$ est appelée tenseur des contraintes de la viscosité du fluide

D'après ces données, l'équations (11) devienne :

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + div(\mu.\overrightarrow{grad}u_i) + div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(div(\vec{U})\right) \quad \textbf{(13)}$$

ou i =(x ou y ou z)

C'est l'équation générale du mouvement

I.3.1 Quelques cas particuliers

1) Fluide incompressible (ρ=cte)

Dans ce cas là, et d'après l'équation de continuité→ $div(\vec{U}) = 0$

L'équation **(13)** →
$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + div(\mu.\overrightarrow{grad}u_i) + div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) \quad (14)$$

2) Fluide incompressible avec une viscosité constante (μ=cte)

L'équation **(12)** →
$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + \mu.\Delta.u_i \quad \textbf{(15)}$$

Avec $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{U}.\overrightarrow{grad}u_i$

3) Fluide parfait (μ=0)

l'équation du mouvement pour un fluide parfait (μ=0) dite aussi équation **d'Euler** s'écrit donc sous la forme :

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i$$

Si l'écoulement est dimensionnelle suivant ox et oy , l'équation (15) peut s'écrire :

Suivant (ox) : $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho.F_x+\mu.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (16)$$

Suivant (oy) : $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho.F_y+\mu.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (17)$$

Remarque: Dans la convection thermique **(**$\rho.F_i=\rho.g_i$**)**