I.4 Equation de conservation de l'énergie

ان دراسة الحمل الحراري تتطلب معرفة تغير درجة الحرارة داخل المائع , لهذا يجب علينا كتابة معادلة انحفاظ الطاقة والتي نحصل عليها بتطبيق المبدأ الأساسي للترموديناميك للمائع المتحرك .ونص هذا المبدأ هو أن التغير في في الطاقة الكلية (الطاقة الحركية +الطاقة الداخلية) بالنسبة للزمن للمائع بين حالتي توازن يساوي الى الجمع بين عمل القوى الخارجية وكمية الحرارة المكتسبة من قبل كمية المائع .

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{int} + E_{cinétique}) = W(F_{ext}) + Q \qquad (18)$$

لنفرض ان **e** تمثل الطاقة الداخلية في وحدة الكتلة لكمية المائع .
اذن فان المعادلة السابقة الخاصة بالمبدأ الاول للترموديناميك الحرارية تكتب على النحو التالي :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V (e.dm + \frac{1}{2}U^2 dm) = \iiint_V \vec{F}.\vec{U}dm + \iint_s \vec{T}\vec{U}.\vec{ds} + \iint_s k.\overrightarrow{grad}T.\vec{ds}$$

tel que: **dm**= ρdV ; ***k*** est le conductivité thermique du fluide ;
$\vec{U}$ est le vecteur vitesse, $\vec{T}$ est la contrainte de surface (force de pression et des contraintes de cisaillement due au frottement entre les molécules du fluide

$$\iiint_V \rho\frac{de}{dt}dV + \iiint_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right)dV = \iiint_V \rho.\sum_i F_i.u_i.dV + \iint_s \sum_i u_i.\sigma_{i,j}.n_j ds + \iiint_V div(k.\overrightarrow{grad}.T).dV \qquad \textbf{(19)}$$

بعد تحويلات متعددة على المعادلة (19) (**انظر للملحق annexe في أخر هذا الفصل**) ’ فانه يمكننا الحصول على المعادلة العامة للطاقة كالتالي :

$$\textbf{(20)}\ \rho cp\frac{dT}{dt} = div(K.\overrightarrow{grad}T) + \beta.T.\frac{dp}{dt} + \Phi$$

(***équation générale de la conservation de l'énergie***)

coefficient d'expansion volumique à P=cte $\beta = -\frac{1}{\rho}.\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P=cte}$ **tel que:**

Cp : chaleur spécifique (J/Kg)
K: conductivité thermique du fluide
Φ : fonction de dissipation (دالة التبديد)
tel que:

$$\Phi = \mu.\sum_{i,j}^{3}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu\left(div\,\vec{U}\right)^2 \qquad (21)$$

est la fonction de dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur due au frottement visqueuse entre les molécules du fluide.

Par exemple, dans les coordonnées **(x,y)** , Φ s'écrit :

$$\Phi = 2\mu.\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \mu.\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\mu\left(\mathrm{div}\,\vec{U}\right)^2 \qquad (22)$$

avec $\left(div\vec{U}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$

Remarque

1) pour les gaz : $\beta = \frac{1}{T}$

2) dans les cas des liquides: le terme (βT) est test faible , on peut négliger le terme ($\beta T \frac{dp}{dt}$) de l'équation (20).

3) dans le cas où (k=cte) → div(K.grad T)= K.Δ T, l'équation (20) devienne :

$$\rho c p \frac{dT}{dt} = k\Delta T + \beta.T.\frac{dp}{dt} + \Phi \qquad (23)$$

avec:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}T$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

Cas particuliers:

1) cas où le régime est stationnaire :

$$\rho c p.\vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}T = k\Delta T + \beta.T.\vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}P + \Phi$$

2) dans le cas où l'effet de viscosité est très faible , dans ce cas là, la fonction de dissipation est négligeable

3) Si le fluide est au repos (U_i=0)

$$\rho c p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T$$ (le transfert est par conduction dans le fluide)

et si le régime est permanant, donc:

ΔT = 0 équation de Laplace

Annexe A ملــــحق

de L'équation (19)

$$\iiint_V \rho \frac{de}{dt} dV + \iiint_V \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right) dV = \iiint_V \rho.\sum_i F_i.u_i.dV + \iint_s \sum_i u_i.\sigma_{i,j}.n_j ds + \iiint_V div(k.\overrightarrow{grad}.T).dV \quad (19)$$

On intègre cette équation sur tout le volume, on a:

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right) = \rho \sum F_i.u_i. + div(u_i.\sigma_{i,j}) + div(k.\overrightarrow{grad}.T) \quad (A1)$$

L'enthalpie **h** par unité de masse du fluide est définie par :

$$h = e + P/\rho \quad (A2)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(e+p/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(p/\rho) = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \quad (A3)$$

de l'équation de continuité : $\frac{d\rho}{dt} = -\rho div(\vec{u})$

On remplace dans (A3) on trouve: $\frac{dh}{dt} = \frac{d(e+P/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(P/\rho) = \frac{de}{dt} - \frac{P}{\rho} div(\vec{u}) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} + \left(\frac{p}{\rho}\right) div(\vec{u}) - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \quad (A4)$$

L'enthalpie est une fonction de T et P , h= f(T,P) donc:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dt} = Cp\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho}(1-\beta.T)_p \frac{dP}{dt} \quad (A5)$$

remplaçant (A5) dans (A4) on trouve:

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho Cp \frac{dp}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} + P div(\vec{u}) \quad (A6)$$

de l'éq. (A1) on peut écrire aussi:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right) = \rho U_i \frac{dU_i}{dt} \quad (A7)$$

remplaçant maintenait (A6) et (A7) dans l 'eq. (A1)

$$\rho Cp \frac{dp}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} + P div(\vec{u}) + \rho U_i \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i.u_i. + \sum \frac{\partial(u_i.\sigma_{i,j})}{\partial x_j}) + div(k.\overrightarrow{grad}.T) \quad (A8)$$

avec: $$\sigma_{i,j} = -p.\delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{i,j}.div(\vec{U})$$

Rappelant que l' équation du mvt (**13**) est donnée par:

$$\rho.\frac{\mathrm{du_i}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.\mathrm{F_i} + div(\mu.\overrightarrow{grad}\,\mathrm{u_i}) + div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu div(\vec{U})\right)$$

Si on multiple cette équation par U_i , on obtient:

$$\rho.\mathrm{u_i}\frac{\mathrm{du_i}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{u_i}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.\mathrm{F_i u_i} + \mathrm{u_i}\,div(\mu.\overrightarrow{grad}\,\mathrm{u_i}) + \mathrm{u_i}\,div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mathrm{u_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu div(\vec{U})\right) \quad \text{(A9)}$$

remplaçant maintenant l'équation (A9) dans l'équation (A8), on trouve l'équation **(20)** de l'énergie suivante:

$$\rho cp\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{div}(\mathrm{K}.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{T}) + \beta.\mathrm{T}.\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} + \Phi$$