Module : **Formulation variationnelle**

Chapitre II : Espaces de Sobolev (1)

1 Notion de dérivée faible et espaces de Sobolev

Soient $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On a les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\int_{\mathbb{R}} v\varphi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} u\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
2. $v(x) = u'(x), \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}$

(Montrer cette équivalence). On peut donc adapter la première formule ci-dessus comme définition de la dérivée de u (dès que u est de classe $\mathcal{C}^1$) et de plus v est la dérivée de la distribution régulière T_u. Maintenant, si u n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, alors l'existence de telle fonction $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est équivalente à dire que la distribution $T'_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. C'est à dire u doit être appartient à l'espace des fonctions $\{w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : T'_w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\}$. Ce type d'espaces est appelé espace de Sobolev. Donc la notion de dérivée donnée par la formule (1) qui s'appelle dérivée faible, est plus générale que la notion classique, car il coïncide avec la dérivée classique lorsque elle existe et de plus elle garde la formule d'intégration par partie valable dans un espace plus vaste que $\mathcal{C}^1$, à savoir l'espace de Sobolev. Ce qui est important dans la résolution des équations aux dérivées partielles. De plus, ces espaces avec leurs normes associées forme des espaces de Banach séparables et réflexifs, contrairement aux espaces $\mathcal{C}^1$, et elle sont commode et serviable pour appliquer les différentes méthodes dans la résolutions des équations aux dérivées partielles comme les méthodes variationnelles (l'objet de chapitre III), la méthode de point fixe ...etc.

On précisera maintenant les définitions dans un cadre plus générale et on a :

Définition 1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $u,\ v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

1. *On dit que v est la dérivée partielle faible de u par rapport à x_i, si*

$$\boxed{\int_\Omega v\ \varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\ \partial_i \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{1.1}$$

   Autrement dit, si $v = \partial_i T_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. S'il n'y a pas de confusion, on écrira $\partial_i u$ au lieu de v ou $\partial_i T_u$.

2. *Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on dit que v est la dérivée faible de u d'ordre α si*

$$\boxed{\int_\Omega v\ \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\ \mathrm{D}^\alpha \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{1.2}$$

   Autrement dit, si $v = \mathrm{D}^\alpha T_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. La même chose, on écrira $\mathrm{D}^\alpha u$ au lieu de $\mathrm{D}^\alpha T_u = v$.

Remarque 1.1. *Rappelons que les distribution $\partial_i T_u$, $\mathrm{D}^\alpha T_u$ sont définies respectivement par*

$$\boxed{\langle \partial_i T_u, \varphi\rangle := -\int_\Omega u\ \partial_i\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).}$$

$$\boxed{\langle \mathrm{D}^\alpha T_u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\ \mathrm{D}^\alpha\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).}$$

Définition 1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

1. *L'espace de Sobolev d'ordre 1 est l'ensemble*

$$\boxed{H^1(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \quad u, \partial_i u \in L^2(\Omega),\ i = 1, ..., N\}.} \tag{1.3}$$

2. *L'espace de Sobolev d'ordre $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, est l'ensemble*

$$\boxed{H^k(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \quad u, \mathrm{D}^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.} \tag{1.4}$$

(Où $\partial_i u, \mathrm{D}^\alpha$ sont dans le sens de la définition 1.1).

Dans un cadre plus générale, on définit les espaces de Sobolev comme suivant

Définition 1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et Soit $1 \leq p \leq +\infty$.*

1. *L'espace de Sobolev d'ordre 1 est l'ensemble*

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \quad u, \partial_i u \in L^p(\Omega),\ i = 1, ..., N\}.} \tag{1.5}$$

2. *L'espace de Sobolev d'ordre $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, est l'ensemble*

$$\boxed{W^{k,p}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \quad u, \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.} \tag{1.6}$$

(Où $\partial_i u, \mathrm{D}^\alpha$ sont dans le sens de la définition 1.1).

Exercice 1.1. *Soit u la fonction définie sur $]-1,1[$ par $u(x) = |x|$. Montrer que $u \in H^1(-1,1)$.*

Solution. Il est claire que $u \in L^2(-1,1)$. Calculons sa dérivée faible v si elle existe. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$:

$$\int_{-1}^{1} v\varphi \mathrm{d}x := -\int_{-1}^{1} |x|\varphi' \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \varphi \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \varphi \mathrm{d}x \quad \text{(après intégration par partie).}$$

d'où

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in (-1, 0[\\ \ \ 1 & \text{si} \quad x \in]0, +1) \end{cases}$$

et on a $u, v \in L^2(-1,1)$ (évident). Donc $u \in H^1(-1,1)$, mais elle n'est pas dans $\mathcal{C}^1(-1,1)$.

Remarque 1.2. *On peut montrer facilement que les fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux appartiennent aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.*

Exercice 1.2. *Trouver les valeurs de α de sorte que la fonction $u(x) = x^\alpha$ soit dans $H^1(0,1)$.*

Solution. On a

$$u \in L^2(0,1) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^{2\alpha}\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > -1/2$$

Soit v la dérivée faible (si elle existe). Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$:

$$\int_0^1 v\varphi\mathrm{d}x = -\int_0^1 u\varphi'\mathrm{d}x = \int_a^1 v\varphi\mathrm{d}x = \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi\mathrm{d}x.$$

D'où $v(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$v \in L^2(0,1) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^{2(\alpha-1)}\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1/2$$

Donc $u \in H^1(0,1) \Longleftrightarrow \alpha > 1/2$.

Exercice 1.3. *Soit $\Omega = B_1(0)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Considérons la fonction suivante*

$$\begin{aligned} u : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto u(x) = |x|^\alpha. \end{aligned}$$

Trouver les valeurs de α telles que $u \in H^1(B_1(0))$.

Solution. On utilise le changement de variable polaire $x = rw$ où $0 < r < 1$ et $|w| = 1$. On a $\mathrm{d}x = r^{N-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}w$. D'où

$$\int_\Omega |u(x)|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^{2\alpha}\mathrm{d}x = \int_{|w|=1}\mathrm{d}w\int_0^1 r^{2\alpha+N-1}\mathrm{d}r.$$

On a $\int_{|w|=1}\mathrm{d}w < \infty$ (car c'est le volume de la boule unité). Et on a

$$\int_0^1 r^{2\alpha+N-1}\mathrm{d}r < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > -N/2.$$

Donc $u \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > -N/2$. D'autre part, on a $\partial_i u(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x_i$ $\forall x \in \Omega \setminus \{0\}$. Donc

$$\begin{aligned} \big(\forall i : \partial_i u \in L^2(\Omega)\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^2\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha\int_\Omega |x|^{2\alpha-2}\mathrm{d}x < \infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha\int_{|w|=1}\mathrm{d}w\int_0^1 r^{2\alpha+N-3}\mathrm{d}r \Longleftrightarrow \alpha > -\frac{N}{2}+1. \end{aligned}$$

D'où $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1 - N/2$.

Quant à la structure de ces espaces, on a les résultats suivants :

Théorème 1.1. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach avec la norme suivante*

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}.} \tag{1.7}$$

Remarque 1.3. *1. La norme définie ci-dessus est équivalente aux normes suivantee*

$$\|u\| = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\|u\| = \max\{\|u\|_{L^p(\Omega)}, \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}, i = 1, ..., N\}.$$

2. Si la suite $\{u_n\}_n$ est convergente vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. alors

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u_n - \partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \longrightarrow 0.$$

Ce qui implique que

$$\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \ \|\partial_i u_n - \partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Par conséquent

$$\boxed{(u_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega)) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_n \longrightarrow u \\ \partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u, \quad \forall i \end{cases} \text{ dans } L^p(\Omega).}$$

Théorème 1.1. 1. Montrons que $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ définit une norme sur $W^{1,p}(\Omega)$. La propriété de la séparation et de l'homogénéité sont évidentes. Pour l'inégalité triangulaire, appliquer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

2. Montrons que $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace complet, c'est à dire toute suite de Cauchy est convergente. Soit $\{u_n\}_n$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0$:

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u_n - u_m\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u_n - \partial_i u_m\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

D'où $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0$:

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \text{ et } \|\partial_i u_n - \partial_i u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., N.$$

Donc les suites $\{u_n\}_n$ et $\{\partial_i u_n\}_n$ sont de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ qui est complet, elles sont convergente respectivement vers u, $v_i \in L^p(\Omega)$ pour $i = 1, ..., N$. D'autre part, l'espace $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. On a donc

$$\begin{aligned}\left(u_n \xrightarrow{n} u \text{ dans } L^p(\Omega)\right) &\Longrightarrow \left(u_n \xrightarrow{n} u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)\\ &\Longrightarrow \left(\partial_i u_n \xrightarrow{n} \partial_i u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)\end{aligned}$$

et on a pour $i = 1, ..., N$.

$$\left(\partial_i u_n \xrightarrow{n} v_i \text{ dans } L^p(\Omega)\right) \Longrightarrow \left(\partial_i u_n \xrightarrow{n} v_i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right).$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\partial_i u = v_i$, pour tout $i = 1, ..., N$. Donc $\{u_n\}$ est convergente vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

□

Théorème 1.2. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivant*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega (uv + \nabla u.\nabla v)\,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

La preuve est immédiate.