Module : **Formulation variationnelle**

Exercice 1. *Soit $\{T_n\}_n$ une suite des distributions converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que $\{D^\alpha T_n\}_n$ est convergente ver $D^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.*

Solution :

Rappelons que

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\langle \mathrm{D}^\alpha T_n, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \mathrm{D}^\alpha \varphi\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, \mathrm{D}^\alpha \varphi\rangle := \langle \mathrm{D}^\alpha T, \varphi\rangle$$

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ -x+2 & \text{si } x \in [1,4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. *Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$.*
2. *Est ce que $f \in H^1(\mathbb{R})$.*

Solution :

1. On a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_1^4 (-x+2)^2 \mathrm{d}x < \infty.$$
Donc $f \in L^2(\mathbb{R})$.
2. On calcule la dérivée v de f (au sens des distributions). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v\varphi \mathrm{d}x := -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \mathrm{d}x &= -\int_0^1 x\varphi' \mathrm{d}x - \int_1^4 (-x+2)\varphi' \mathrm{d}x \\ &= -[x\varphi]_0^1 + \int_0^1 \varphi \mathrm{d}x - [(-x+2)\varphi]_1^4 - \int_1^4 \varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \varphi \mathrm{d}x - \int_1^4 \varphi \mathrm{d}x + 2\varphi(4) \\ &= \langle w + 2\delta_4, \varphi\rangle \end{aligned}$$
où $w = 1$ sur $(0,1)$, $w = -1$ sur $(1,4)$, et $w = 0$ ailleurs. Donc $v = w - 2\delta_4 \notin L^2(\mathbb{R})$. D'où $f \notin H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. *Soit $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^\alpha$.*

1. *Montrer que $f \in L^1(0,1)$ si et seulement si $\alpha > -1$.*
2. *Montrer que $f \in H^1(0,1)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.*
3. *Montrer que $f \in H^{-1}(0,1)$ si et seulement si $\alpha > -3/2$.*

Solution :

1. On a
$$f \in L^1(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > -1.$$
car
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 x^\alpha v \mathrm{d}x\right| &= \begin{cases} \frac{1}{|\alpha+1|}\left([x^{\alpha+1}]_0^1\right)^{1/2} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ ([\ln x]_0^1)^{1/2} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < -1 \\ \frac{1}{|\alpha+1|} & \text{si } \alpha > -1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

2. On a
$$f \in L^2(0,1) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^{2\alpha} \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow 2\alpha > -1 \Longleftrightarrow \alpha > -1/2$$
Soit v la dérivée faible (si elle existe). Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$:
$$\langle v, \varphi \rangle := -\int_0^1 f\varphi' \mathrm{d}x = -[f\varphi]_0^1 + \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi \mathrm{d}x.$$
D'où $v(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
$$v \in L^2(0,1) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^{2(\alpha-1)} \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow 2(\alpha-1) > -1 \Longleftrightarrow \alpha > 1/2$$
Donc $u \in H^1(0,1) \Longleftrightarrow \alpha > 1/2$.
3. On a d'après le théorème de Riesz
$$\begin{aligned}\boxed{f \in H^{-1}(0,1)} &\Longleftrightarrow \exists! w \in H_0^1(0,1) : \int_0^1 f\varphi \mathrm{d}x = \int_0^1 w'\varphi' \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -w'' = f = x^\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1) \\ w \in H_0^1(0,1) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow w \in H_0^1(0,1),\ w(x) = \begin{cases} -\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\ \forall x \in]0,1[& \text{si } \alpha \neq -1 \\ x\ln x - x,\ \forall x \in]0,1[& \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \alpha + 2 > 1/2 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha > -3/2}.\end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^1 par morceaux et à support borné dans Ω. Montrer que $f \in H^1(\Omega)$.*

Solution : Comme f est continue sur $\overline{\Omega}$, et à support compact, alors elle appartient à $L^2(\Omega)$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à support borné, par définition, il existe une famille finie d'ouverts $\{\Omega_i : i = 1, ..., m\}$ deux à deux disjoints, telle que $\cup_{i=1}^m \overline{\Omega}_i = supp f \subset \Omega$ et $f = f_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $\overline{\Omega_i}$. Pour tout $i \neq j$, on pose $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $n^i(x)$ est le vecteur normale unitaire extérieur en $x \in \partial\Omega_i$. On a

$$\forall x \in \Gamma_{ij} : n^i(x) = -n^j(x).$$

D'où, en posant $v := \partial_k f$ (au sens des distributions), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle v, \varphi\rangle &:= -\int_\Omega f\ \partial_k\varphi \mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f\ \partial_k\varphi \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^m \left(-\int_{\partial\Omega_i} f v n_k^i dS + \int_{\Omega_i} \partial_k f\ \varphi \mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega_i} f v n_k^i dS &= \sum_{i,j=1, i\neq j}^m \int_{\Gamma_{ij}} f v n_k^i dS \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq m} \int_{\Gamma_{ij}} f v (n_k^i + n_k^j) dS = 0\end{aligned}$$

Donc

$$\langle v, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} \partial_k f\ \varphi \mathrm{d}x.$$

Donc $v(x) = \partial_k f_{|\Omega_i}(x)$, $\forall x \in \Omega_i$, $i = 1, ..., m$. D'autre part, on a

$$\int_\Omega v^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} v^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} \partial_k f_{|\Omega_i}^2 \mathrm{d}x < \infty$$

D'où $v \in L^2(\Omega)$. Part conséquent $f \in H^1(\Omega)$.