Module : **Formulation variationnelle**

Chapitre II : Espaces de Sobolev (2)

Exercice 1 (Primitive d'une fonction de L^1_{loc}). *Soit u une fonction de $L^1_{loc}(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $c \in I$ et v la fonction définie par*

$$v(x) = \int_c^x u(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in I.$$

1. *Montrer que la dérivée faible de v est égale à u, et que $v \in \mathcal{C}(I)$ (v s'appelle primitive de u).*
2. *Déduire que si I est borné et $u \in L^1(I)$, alors $v \in W^{1,1}(I)$.*
3. *Déduire que si $u \in W^{1,1}(I)$, il existe une fonction $\overline{u}$ continue sur $\overline{I}$ telle que $u = \overline{u}$ p.p. sur I.*

Solution :

1. On pose $I =]a, b[$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle v', \varphi\rangle := -\langle v, \varphi'\rangle &= -\int_a^b v(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b \left[\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^c \left[\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_c^b \left[\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^c \left[\int_t^a \varphi'(x)\mathrm{d}t\right]u(t)\mathrm{d}x - \int_c^b \left[\int_t^b \varphi'(x)\mathrm{d}t\right]u(t)\mathrm{d}x \text{ (par Fubini)} \\
&= -\int_a^c [\varphi(a) - \varphi(t)]\,u(t)\mathrm{d}x - \int_c^b [\varphi(b) - \varphi(t)]\,u(t)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t := \langle u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $v' = u$.
Pour la continuité, on a pour tout $x \in I$, $h \in \mathbb{R}$ assez petit :

$$|v(x+h) - v(x)| = \int_x^{x+h} u(t)\mathrm{d}t = \int_I \chi_{[x,x+h]}(t)\; u(t)\mathrm{d}t$$

(où χ est la fonction caractéristique). On a

$$\forall h : |\chi_{[x,x+h]}(t)u(t)| \le u(t), \quad |\chi_{[x,x+h]}(t)\; u(t)| \to 0 \;\text{ p.p.} t \in I, \text{ quand } h \to 0.$$

D'où, d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue

$$|v(x+h)-v(x)| = \int_I \chi_{[x,x+h]}(t)\ u(t)\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Donc v est continue sur I.

2. On a $v' = u \in L^1(I)$. Il reste à montrer que $v \in L^1(I)$. On a

$$\int_I |v|\mathrm{d}x = \int_I \left| \int_c^x u(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \leq \int_I \int_I |u(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^1(I)} \times |I| < \infty.$$

D'où $v \in L^1(I)$.

Par conséquent, la primitive d'une fonction de $L^1(I)$ est dans $W^{1,1}(I)$.

3. Comme $u \in W^{1,1}(I)$, alors $u' \in L^1(I)$. D'après la question 1), la fonction v définie sue $\overline{I}$ par

$$v(x) = \int_c^x u'(t)\mathrm{d}t,\ \forall x \in \overline{I}.$$

est dans $\mathcal{C}(\overline{I})$, et $v' = u'$ dans $\mathcal{D}'(I)$. (Notons que l'on peut prendre $x \in \overline{I}$ car $u' \in inL^1(I)$, contrairement à la réponse de question 1), où u est seulement dans L^1_{loc})). Donc $u = v + C$ p.p. sur I. Il suffit donc de choisir $\overline{u} = v + C \in \mathcal{C}(\overline{I})$. Ce qui donne

$$u(x) = \overline{u}(x) = \int_c^x u'(t)\mathrm{d}t + C \text{ p.p. } x \in I.$$

Exercice 2 (Prolongation dans $W^{1,1}$). *Soient $p \geq 1$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)$ et Pu la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x > 0 \\ u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $P : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ est linéaire et continue.*

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |Pu|^p\mathrm{d}x = \int_0^\infty |u(x)|^p\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 |u(-x)|^p\mathrm{d}x &= \int_0^\infty |u(x)|^p\mathrm{d}x + \int_0^\infty |u(x)|^p\mathrm{d}x \\ &= 2\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)} < +\infty.\end{aligned}$$

Donc $Pu \in L^p(\mathbb{R})$. Montrons que la dérivée au sens des distributions de Pu appartient à $L^p(\mathbb{R})$. D'après la question 4) de l'exercice précédent, on a

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t + c_0,\ \textit{p.p. } x > 0,$$

et

$$u(-x) = \int_0^{-x} u'(t)\mathrm{d}t + c_0 = \int_0^x -u'(-t)\mathrm{d}t + c_0,\ \textit{p.p. } x < 0.$$

Donc $Pu(x) = \int_0^x v(x)\mathrm{d}x + c_0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$, où

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $(Pu)' = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On peut vérifie aisément que $v \in L^p(\mathbb{R})$. D'où $(Pu)' = v \in L^p(\mathbb{R})$. Par conséquent $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

2. On a d'après la question 1), $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = 2\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}^p$ et de la même façon on montre que

$$\|(Pu)'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = 2\|u'\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}^p.$$

Par conséquent

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \left(\|(Pu)'\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right)^{1/p} = 2^{1/p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+)}.$$

Ce qui donne la continuité de P.