

FLEXION SIMPLE E.L.U

I – GENERALITES : Une poutre à plan moyen est sollicitée en FLEXION PLANE SIMPLE lorsque l'ensemble des forces ou couples appliqués à gauche d'une section droite est réductible, au centre de gravité G de (S) à :

- Un couple de moment M (moment fléchissant)
- Une force T située dans le plan de S (effort tranchant)

Les moments fléchissants sont donnés en valeur algébrique ; dans les calculs, nous ne considérons que la valeur absolue sachant que : $M > 0$ compression en haut, traction en bas.

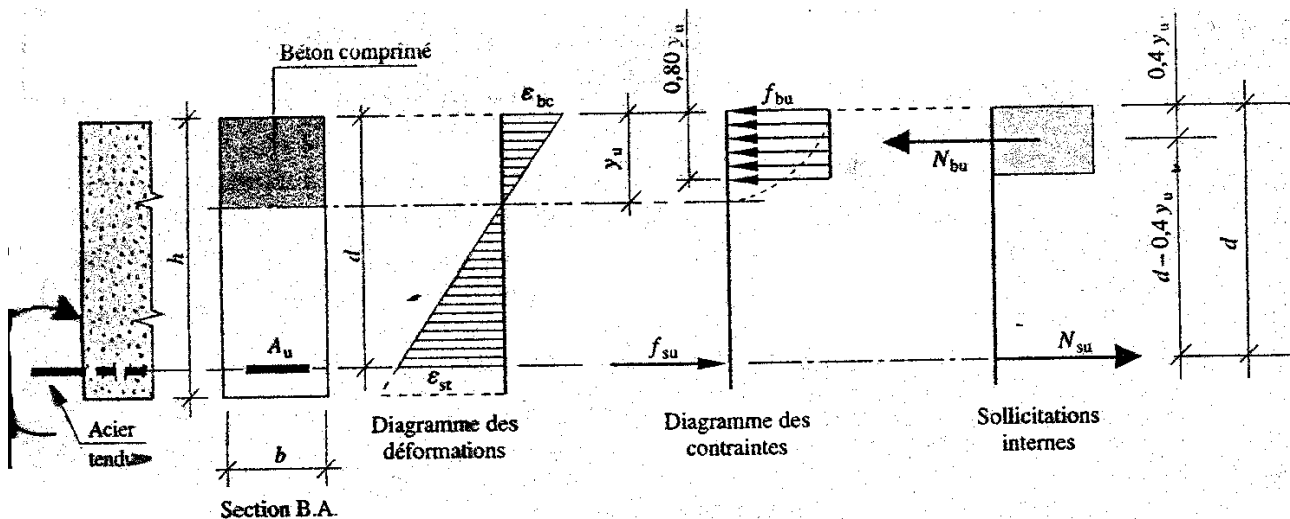
$M < 0$ compression en bas, traction en haut.

Les formules et méthodes de calcul des moments fléchissants et efforts tranchants sont enseignées dans le cours de résistance des matériaux.

II – SECTION RECTANGULAIRE SANS ACIERS COMPRIMES

Considérons la section rectangulaire représentée sur la figure, cette section est soumise à un moment ultime de flexion simple M_u ($M_u > 0$).

Sous l'effet du moment M_u correspond un diagramme des déformations et un diagramme des contraintes.



1. Moment ultime réduit μ_u

Nous appellerons moment ultime réduit μ_u la quantité suivante : $\mu_u = \frac{M_u}{b d^2 f_{bu}}$
Le diagramme idéal pour une poutre en flexion est celui pour lequel les limites mécaniques des matériaux sont atteintes.

- Raccourcissement unitaire maximum de béton de 3.5‰
- Allongement unitaire maximum de l'acier de 10‰

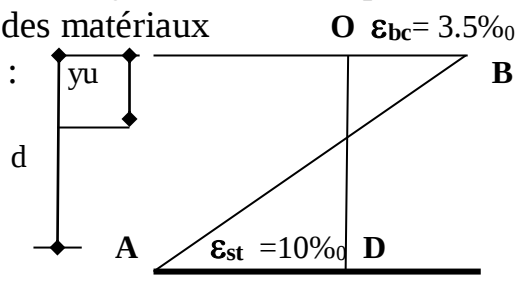
OD l'image de la section avant déformation AB l'image de la section après déformation

Dans cette situation idéale : les déformations des matériaux

étant connues, les paramètres α et μ_u sont connus :

$$\frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_{st}} = \frac{3.5}{13.5} = \frac{y_u}{d} = \alpha_u = 0.259$$

μ_u est aussi égal à : $\mu_u = 0.8 \alpha_u (1 - 0.4 \alpha_u)$



En remplaçant α_u par sa valeur : $\mu_u = 0.8 \alpha_u (1 - 0.4 \alpha_u) = 0.186$ $\mu_u = 0.186$

μ_u s'exprime également par une équation du second degré en α , qui une fois résolue nous donne : $\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2 \mu_u})$

2. Vérification de la valeur du moment ultime réduit μ_u

Selon la valeur du moment ultime réduit μ_u , la section sera armée soit uniquement par des armatures tendues, soit par des armatures tendues et comprimées. On a donc 3 cas:

a) **1^{er} cas** $\mu_u \leq 0.186$ (section avec des armatures tendues) $\epsilon_{st} = 10\text{‰}$ $\epsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$

Calculer α : $\alpha = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2 \mu_u})$ Calculer Z : $Z = d (1 - 0.4 \alpha)$

Calculer A_s : $A_s = \frac{M_u \cdot \gamma_s}{Z \cdot f_e}$ A_s en m^2 M_u en MN.m Z en m f_e en Mpa

Vérifier la condition de non fragilité : $A_s \geq 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e} b.d$

b) **2^{ème} cas** $0.186 < \mu_u \leq \mu_l$ (section avec des armatures tendues) $\epsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ $\epsilon_l \leq \epsilon_{st} < 10\text{‰}$

Au point de vue économique ϵ_{st} ne doit pas être inférieur à une certaine valeur limite que nous désignerons par ϵ_l . A cette valeur ϵ_l correspond des valeurs limites α_l et μ_l

$$\alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 1000 \epsilon_{sl}} \quad \mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l)$$

Exemple 1 : calculons les valeurs de ϵ_l , α_l , μ_l pour l'acier FeE400 type 1, 3, 4

$$1000 \epsilon_l = f_e / 200 \quad \gamma_s = 400 / 200 \times 1.15 = 1.739$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 1000 \epsilon_l} = \frac{3.5}{3.5 + 1000 \epsilon_l} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.8 \times 0.668 (1 - 0.4 \times 0.668) = 0.392$$

$$\mu_l = 0.392$$

Exemple 2 : Acier écroui FeE400 de type 2

$$\epsilon_{st} = \sigma_s / E_s + 0.823 (1.15 \sigma_s / f_e - 0.7)^5 \quad \epsilon_l = 3.8 \text{‰}$$

$$\alpha_l = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_l} = 0.48 \quad \mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.31 \quad \mu_l = 0.31$$

Il faut remarquer, que les grandeurs ϵ_l , μ_l , α_l seront définies entièrement par le type et la nuance d'acier choisi. donc si $\mu_u \leq \mu_l$ la section sera armée uniquement par des armatures tendues et la section d'aciers sera déterminée comme précédemment.

- Calculer α : $\alpha = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2 \mu_u})$ Calculer Z : $Z = d(1 - 0.4 \alpha)$

- Calculer A_s :

$$A_s = \frac{M_u \cdot \gamma_s}{Z \cdot f_e}$$

Vérifier la condition de non fragilité: $A_s \geq 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e} b.d$

c) **3^{ème} cas** $\mu_u > \mu_l$ (la section sera armée par des armatures comprimées.)

$$\epsilon_{bc} = 3.5\text{‰} \quad \epsilon_{st} = \epsilon_l$$

II – SECTION RECTANGULAIRE AVEC ACIERS COMPRIMES

Lorsqu'une section rectangulaire, dont les dimensions sont imposées est soumise à un moment M_u , supérieur à celui que peut équilibrer la section ne comportant que des armatures tendues, la partie comprimée de cette section sera renforcée en y disposant des armatures qui seront évidemment comprimées. $\mu_u > \mu_l$ (Armatures doubles) $\epsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ $\epsilon_{st} = \epsilon_l$

$$\alpha = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2 \mu}) \quad Z = d (1 - 0.4\alpha) \quad \epsilon_{sc} = (3.5 \cdot 10^{-3} + \epsilon_l) \left(\frac{d - d'}{d} \right) - \epsilon_l$$

1. **Moment résistant du béton** : Le moment résistant du béton, est le moment ultime qui peut équilibrer la section sans lui adjoindre des armatures comprimées. $M_R = \mu l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$

2. **Moment résiduel** Le moment résiduel, est la différence entre le moment ultime sollicitant la section et le moment résistant du béton. $M_{rés} = M_u - M_R$

Ce moment de flexion équilibré par les armatures comprimées doit être inférieur à 40% du moment total :

$$\begin{array}{c} \text{Si } M_{rés} \leq 0.4 M_u \\ \text{Si } M_{rés} > 0.4 M_u \text{ (redimensionner la poutre)} \end{array}$$

$$M_u = M_R + M_{rés}$$

Pour équilibrer M_R $Z = d(1 - 0.4\alpha)$ $\sigma_{st} = f_e / 1.15$

La section d'acier tendu:

$$A_{St 1} = \frac{M_R}{Z \cdot \sigma_{st}}$$

Pour équilibrer $M_{rés}$

- Bras de levier du couple interne ($d - d'$)
- La contrainte de travail des armatures tendues $\sigma_{st} = f_e / 1.15$
- La contrainte de travail des armatures comprimées σ_{sc} est celle correspondant au raccourcissement unitaire ϵ_{sc}

$$A_{St 2} = \frac{M_{rés}}{(d - d') \cdot \sigma_{st}}$$

Section d'acier tendu

$$A_{SC} = \frac{M_{rés}}{(d - d') \cdot \sigma_{sc}}$$

Section d'acier comprimé

La section totale d'acier tendu sera : $A_{st} = A_{st 1} + A_{st 2}$

Vérifier la condition de non fragilité : $A_{st} \geq A_{min} = 0.23 f_{t 28} \frac{b \cdot d}{f_e}$

FLEXION SIMPLE E.L.S

Les éléments de structure en béton armé, soumis à un moment de flexion simple sont généralement calculés à l'état limite de service dans les cas suivants :

- 1- Fissuration préjudiciable . 2 -Fissuration très préjudiciable.

Les vérifications à effectuer concernant les états limites de service vis à vis de la durabilité de la structure conduit à s'assurer du non-dépassement des contraintes limites de calcul à l'E.L.S :

- Compression du béton
- Traction des aciers suivant le cas de fissuration envisagé

1. Contraintes de calcul (à l'E.L.S)

- Contrainte de compression du béton limitée à : $\sigma_{bc} = 0.6 f_{cj}$
- Contrainte de traction des aciers limitée suivant les cas de fissuration :

fissuration préjudiciable : $\overline{\sigma_{st}} = \inf (2/3 f_e ; 110 \sqrt{\eta.ftj})$

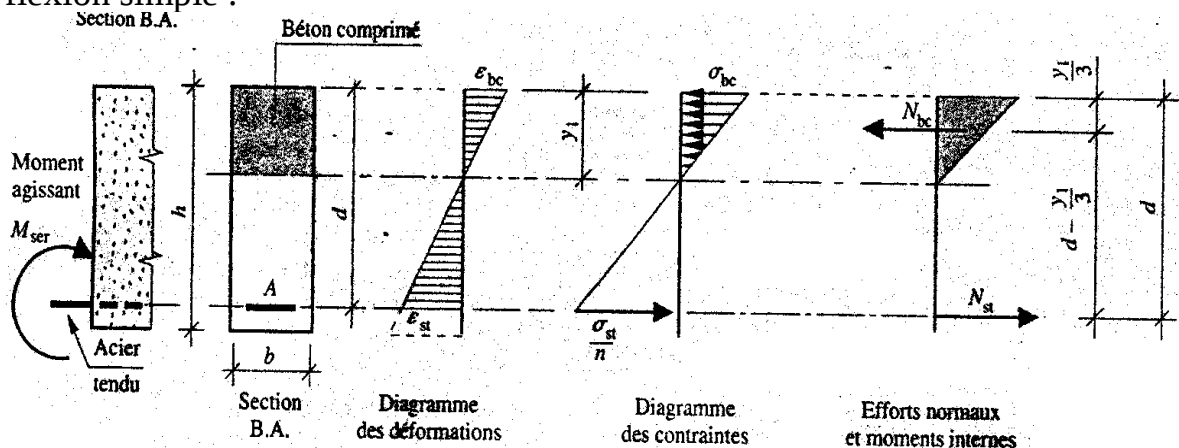
fissuration très préjudiciable : $\overline{\sigma_{st}} = \inf (1/2 f_e ; 90 \sqrt{\eta.ftj})$

$\eta = 1$ pour aciers ronds lisses $\eta = 1.6$ pour aciers haute-adhérence ≥ 6 mm.

2. Détermination des armatures

a) Section rectangulaire sans armatures comprimées

On considère une section rectangulaire courante d'une poutre soumise à un moment de flexion simple .



a.1) **Moment résistant du béton : M_{rsb}** C'est le moment de service maximum que peut équilibrer une section sans lui adjoindre des armatures comprimées. Les matériaux ont alors atteint leurs contraintes admissibles.

$$\alpha = y_1 / d$$

$$\frac{\sigma_{bc}}{\frac{\sigma_{st}}{n}} = \frac{y_1}{d - y_1} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{n\sigma_{bc}}{n\sigma_{bc} + \sigma_{st}}$$

Remarque : Lorsque l'E.L.S est atteint. Les contraintes sont alors égales à leurs valeurs admissibles. $\overline{\sigma_{bc}} = \sigma_{bc}$ et $\overline{\sigma_{st}} = \sigma_{st}$

Dans ce cas nous pouvons calculer :

$$\alpha = \frac{n \overline{\sigma_{bc}}}{n \overline{\sigma_{bc}} + \overline{\sigma_{st}}}$$

- La position de la fibre neutre $y = \bar{\alpha} \cdot d$
- Le bras de levier $Z = d - y_1 / 3 = d (1 - \bar{\alpha} / 3)$

$$D'où \quad M_{rsb} = \frac{1}{2} b y_1 \bar{\sigma}_{bc} Z$$

La comparaison de ce moment résistant avec le moment de service doit nous permettre de choisir entre un système d'armature simple, ou d'armatures doubles.

a.2) $M_{ser} \leq M_{rsb}$: armature simple Dans ce cas nous pouvons nous fixer : $\alpha = \bar{\alpha}$

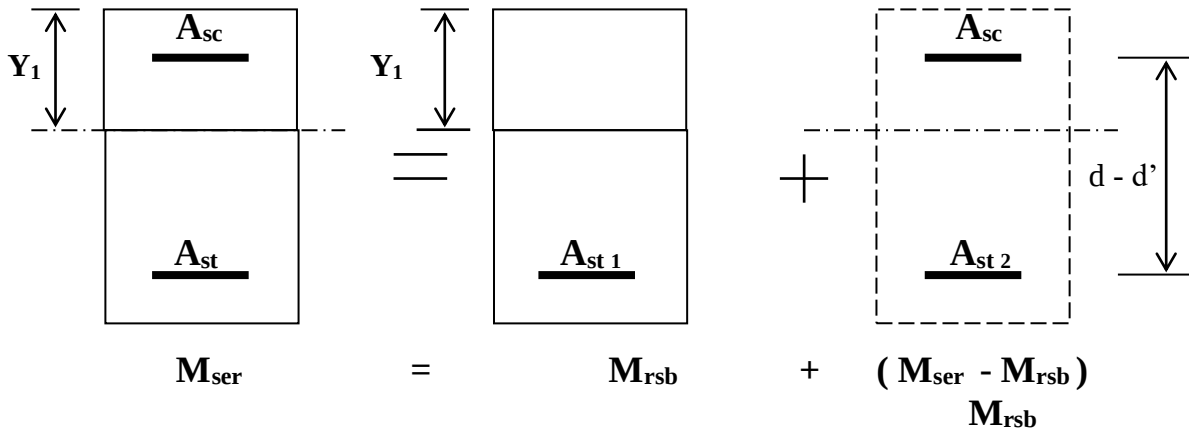
$$Z = d (1 - \bar{\alpha} / 3) \quad D'où \quad A_{ser} = \frac{M_{ser}}{Z \cdot \bar{\sigma}_{st}}$$

N.B: S'assurer du respect de la condition de non fragilité : $A_{ser} \geq A_{min}$

b) Section rectangulaire avec armatures comprimées

b.1) $M_{ser} > M_{rsb}$: armature double

Dans ce cas nous déterminons une section d'acier tendu A_{st1} capable d'équilibrer le moment résistant du béton, puis une section d'acier tendu A_{st2} et une section d'acier comprimé A_{sc} capables d'équilibrer le complément de moment pour atteindre M_{ser} .



b.2) Section d'acier tendu

$$A_{st1} = \frac{M_{rsb}}{Z \cdot \bar{\sigma}_{st}} \quad \text{Nous connaissons : } \alpha = \frac{n \bar{\sigma}_{bc}}{n \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_{st}} ; \quad y_1 = \bar{\alpha} \cdot d \quad Z = d (1 - \alpha / 3)$$

A_{st2} doit équilibrer un moment ($M_{ser} - M_{rsb}$) dans cette section le bras de levier est ($d - d'$)

$$A_{st2} = \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d') \cdot \bar{\sigma}_{st}} \quad d'où \quad A_{st} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{st}} \left[\frac{M_{rsb}}{Z} + \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d')} \right]$$

b.3) Section d'acier comprimé

A_{sc} doit équilibrer un moment ($M_{ser} - M_{rsb}$) le bras de levier est ($d - d'$)

$$D'où \quad A_{sc} = \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d') \cdot \bar{\sigma}_{sc}} \quad \bar{\sigma}_{sc} = \frac{n \bar{\sigma}_{bc} (y_1 - d')}{y_1}$$

$\bar{\sigma}_{sc}$ est la contrainte de travail de la section d'acier comprimé. Elle dépend de la position des armatures dans la section.

d' : enrobage supérieur avec $y_1 = \alpha \cdot d$

EFFORT TRANCHANT

II. Sollicitation de calcul

La sollicitation d'effort tranchant V_u est toujours déterminée à l'état limite ultime

La combinaison de base dans les cas courants pour calculer V_u est : $1.35G + 1.5Q$

III. Contrainte tangentielle conventionnelle

Pour calculer la contrainte de cisaillement ou contrainte tangente, on applique

l'expression suivante : $\tau_u = V_u / b.d$

V_u : effort tranchant en MN τ_u : contrainte tangentielle en Mpa b, d : en m

La contrainte tangentielle conventionnelle doit satisfaire aux états limites suivants :

Armatures droites ($\alpha = \pi/2$) fissuration PP $\tau_u \leq \overline{\tau_u} = \min (0.20f_{c28} / \gamma_b ; 5 \text{ Mpa})$

fissuration P ou TP $\tau_u \leq \overline{\tau_u} = \min (0.15f_{c28} / \gamma_b ; 4 \text{ Mpa})$

Armatures inclinées à ($\alpha = \pi/4$) $\tau_u \leq \tau_u = \min (0.27f_{c28} / \gamma_b ; 7 \text{ Mpa})$

Si cette condition n'est pas vérifiée, il convient de revoir les dimensions de la poutre et notamment sa largeur.

IV. Dimension des armatures transversales

Choisir le diamètre de l'armature transversale $\phi_t \leq \min (h/35 ; \phi_{l \min} ; b/10)$

ϕ_t : diamètre des armatures transversales h : hauteur totale de la poutre.

$\phi_{l \min}$: diamètre minimal des armatures longitudinales b : largeur de la poutre.

V. Espacement maximum des cours d'armatures

$$St_{\max} \leq \min \left(0.9d ; 0.40m ; \frac{A_t \cdot f_e}{0.4 b} \right)$$

A_t : section d'un cours d'armatures transversale en m^2 f_e : en MPa b, d : en m

VI. Espacement des armatures transversales

$$St \leq \frac{0.9 \cdot A_t \cdot f_e}{\gamma_s \cdot b (\tau_u - 0.3 f_{t28} k)}$$

$$A_t = n A_i \begin{cases} A_i : \text{section d'une branche verticale en cm}^2 \\ n : \text{nombre de branches verticales} \\ A_t : \text{section totale d'un cours d'armatures transversales en m}^2 \end{cases}$$

$f_e ; f_{c28} ; \tau_u$ en MPa avec f_{t28} plafonnée à **3.3 MPa**. $b ; St$ en m.

Avec $k = 0$ si

- Reprise de bétonnage
- fissuration très préjudiciable

$k = 1$ si

- cas de flexion simple
- sans reprise de bétonnage

VII. Répartition des armatures transversales

Deux cas peuvent se présenter :

1) $St > St_{\max}$

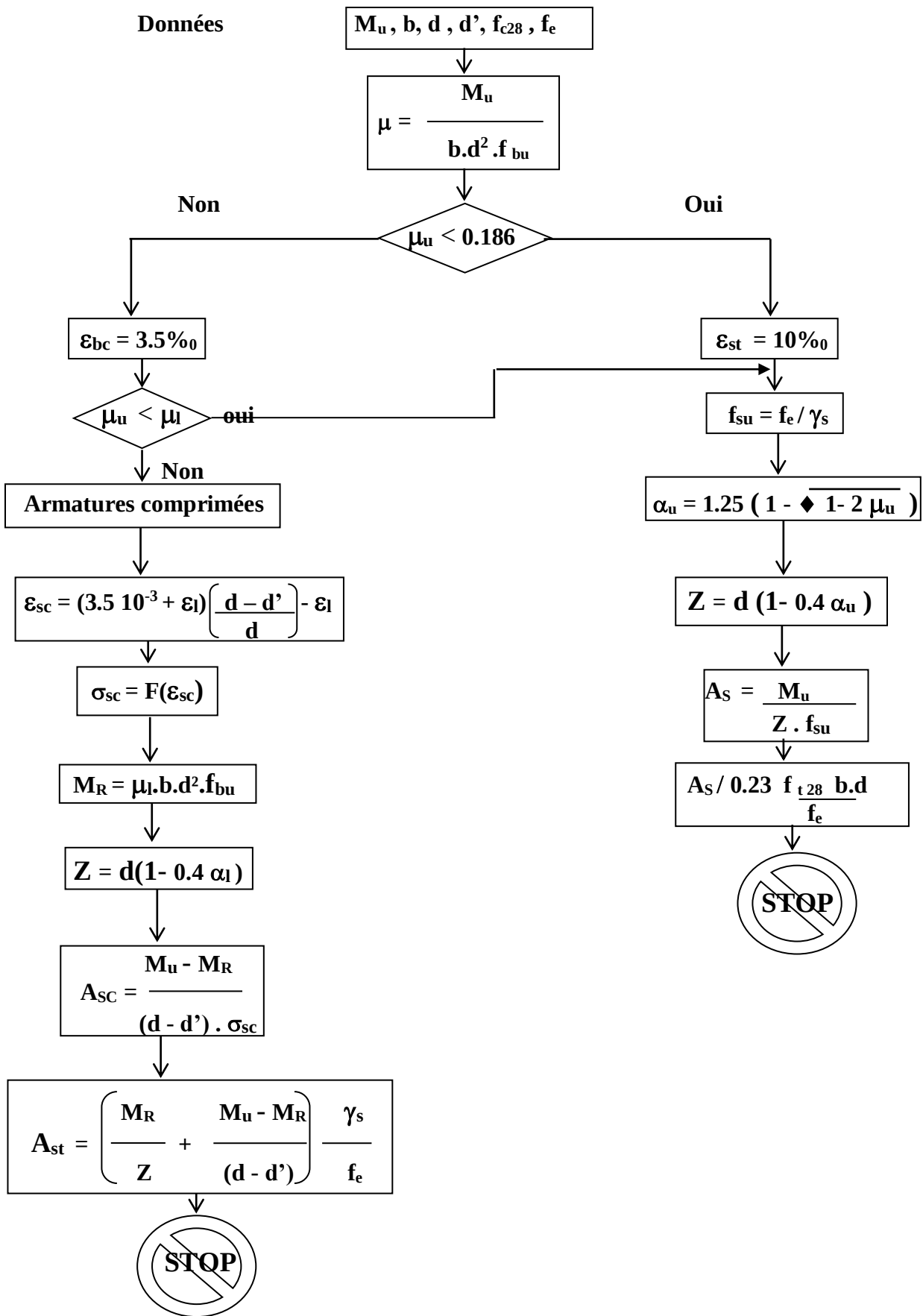
- placer le 1^{er} cours d'armature transversale à une distance du nu de l'appui égale à $St_{\max}/2$.
- disposer les autres cours d'armature à une distance constante égale à $St_{\max}$.

2) $St < St_{\max}$

- placer le 1^{er} cours d'armature transversale à une distance du nu de l'appui égale à $St/2$.
- effectuer la répartition des cours en appliquant la progression de **CAQUOT** définie par les valeurs : 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 13 – 16 – 20 – 25 – 30 – 35 – 40 .

Répéter chacune des valeurs de la progression autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi-portée.

FLEXION SIMPLE (E . L . U) SECTION RECTANGULAIRE



FLEXION SIMPLE (E . L . S)
SECTION RECTANGULAIRE

