Chapitre 3 : Stabilité des Systèmes Asservis Linéaires

III.1. Conditions de stabilité des Systèmes linéaires

III. 1.1. Domaine temporel

Un système est stable si lorsqu'il est excité par une impulsion de Dirac, sa sortie revient à sa position initiale au bout d'un certain temps.

Un système est stable et seulement si une entrée finie (bornée) implique une sortie finie.

1II.1.2. Domaine fréquentiel

Un système asservi linéaire est stable si les parties réelles des pôles (solution de D(p) = 0) sont négatives. c.à.d. tous les **pôles de sa fonction de transfert** sont strictement à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe dédié à *p*.

$$H(p)=\frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+.....+b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}+.....+a_1 p + a_0}=\frac{N(p)}{D(p)} \quad avec \quad n \geq m$$

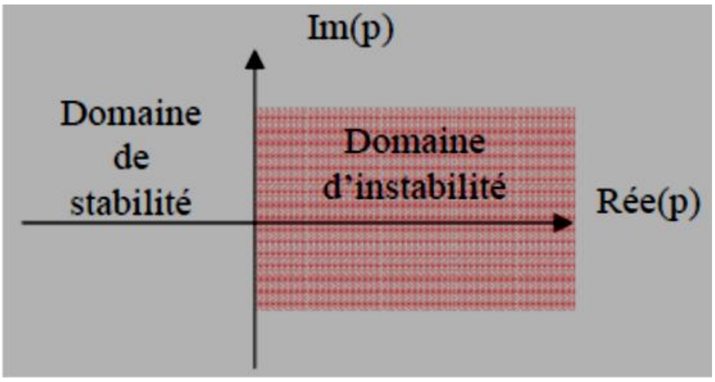
L'équation caractéristique est donnée par :

$$D(p)=0$$

d'où

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}+.....+a_1 p + a_0 = 0$$

Le schéma ci-contre montre les domaines de stabilité et de non stabilité



Exemples 1 :

$$H(p)=\frac{p-2}{(p+1)(p+2)}$$

$zéro : z1 = 2$ le système est stable

$poles : p1 = -1$

$p2 = -2$

Exemples 2 :

$$H(p)=\frac{p-2}{(p+1)(p^2+2)}$$

$zéro : z1 = 2$

$poles : p1 = -1$ le système est juste oscillant (marginalement stable)

$p2 = j\sqrt{2}$

$p2 = -j\sqrt{2}$

Exemple 3 :

$$H(p)=\frac{p+2}{(p-1)(p+2)}$$

$zéro : z1 = -2$ le système est instable

$poles : p1 = 1$

$p2 = -2$

Note : Cette condition nécessaire et suffisante nécessite un calcul des racines ce qui rend les calculs plus lourds lorsque l'ordre du système est élevé.

III. 2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Soit une fonction de transfert

$$\mathrm{H(p)}=\frac{\mathrm{N(p)}}{\mathrm{D(p)}}$$

On peut écrire D(p) sous forme :

$$D(p)=a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

Les pôles de $H(p)$ sont les racines de l'équation $D(p) = 0$.

Réalisation de la table de Routh

Les deux premières lignes du tableau sont écrites à l'aide des coefficients de $D(p)$. Les autres lignes sont formées de termes calculés à partir de ces coefficients.

Ligne1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	……………	a_0
Ligne2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	……………	a_1
Ligne3	b_1	b_2	b_3	……………	b_n
Ligne3	c_1	c_2	c_3		c_1
…					
Ligne(n+1)	q_1	q_2	q_3	……………	q_n

Les coefficients b_1 , b_2 , b_3, c_1,c_2 sont donnés

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1}b_2}{b_1}$$

La condition nécessaire de stabilité exprimée par le tableau de Routh est la suivante :

- Tous les termes « a_i » existent et sont de même signe (>0).
- Tous les éléments de la 1ère colonne du tableau de Routh doivent être strictement positifs.

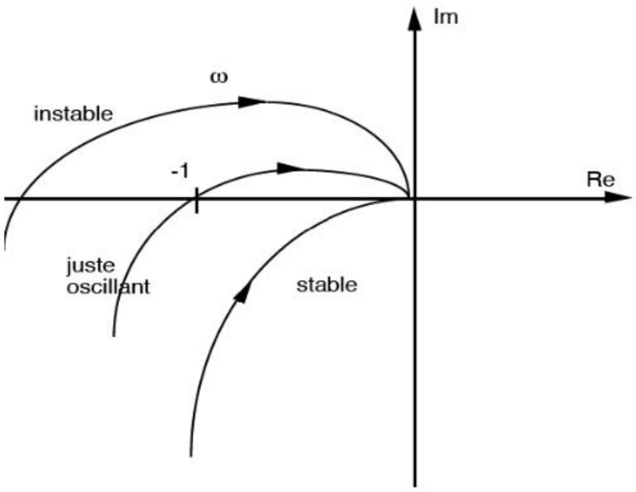
Remarques

1- Le nombre de changement de signe dans la 1ère colonne du tableau de Routh est égal au nombre des racines (des pôles) de D (p) à partie réelle positive.
2- Si le système est d'ordre n, on a (n+1) coefficients sur la 1ère colonne du tableau de Routh.
3- Si l'un des éléments de la 1ère colonne est égale à zéro, le système est asymptotiquement ou marginalement stable.

III.3. Critère géométrique de Nyquist (simplifié)- Critère de Rivers

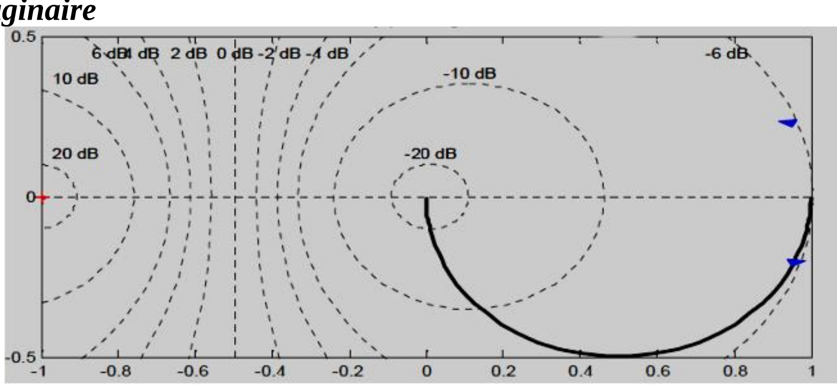
III.3.1.Critère de Rivers

Si en se déplaçant sur le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte dans **le sens des ω croissants** on laisse le ***point critique (-1, 0) à gauche*** le système en boucle fermée est stable.



<u>Exemples 1 :</u>

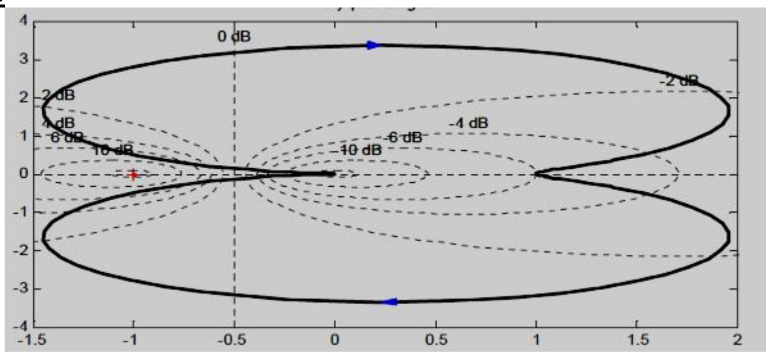
Axe immaginaire



<u>Axe réel</u>

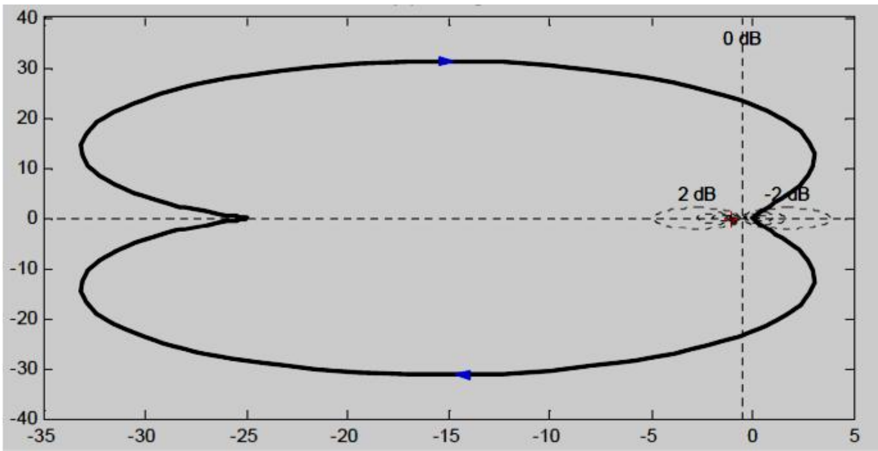
Le système est stable en boucle fermée.

<u>Exemples 2 :</u>



Le système est stable en boucle fermée

Exemples 3 :

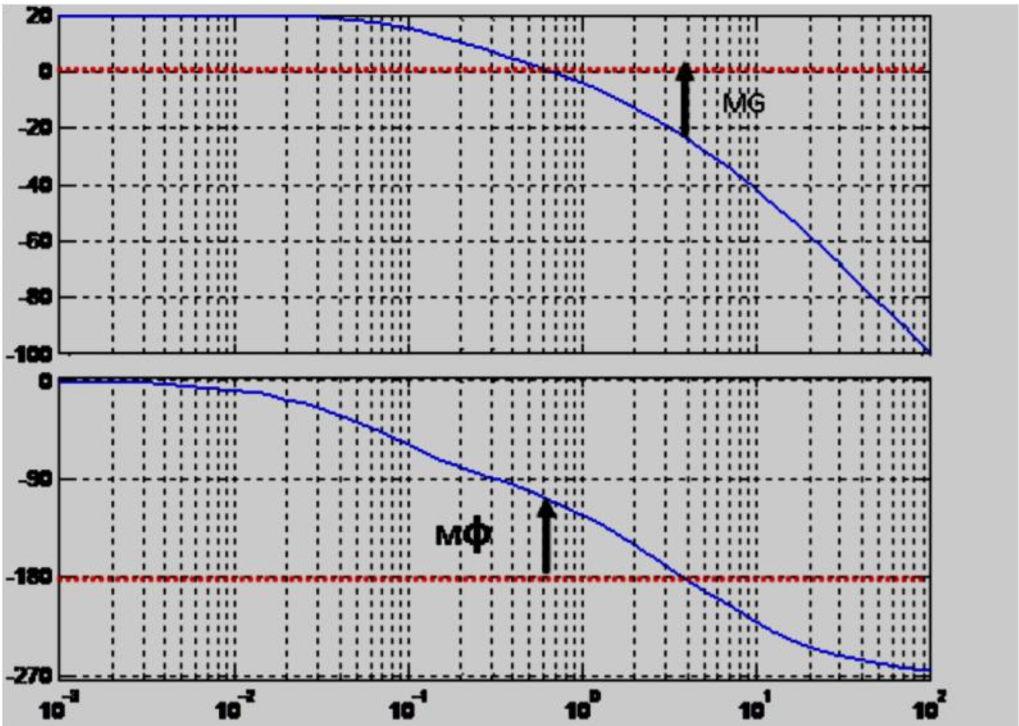


Le système n'est pas stable en boucle fermée
Si le lieu passe par le point critique, le système est juste oscillant.

III.2. Critère de Rivers dans le plan de Bode

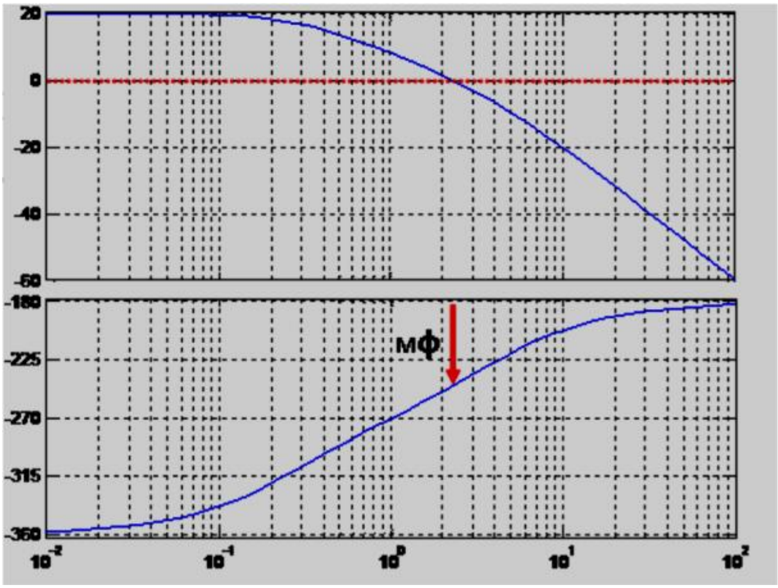
Un système stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée di et seulement si la courbe de gain de $|T(j\omega)|_{dB} = f(\omega)$ coupe l'axe des abscisses pour une phase $\varphi(\omega)$ >-180

Exemple 1 :

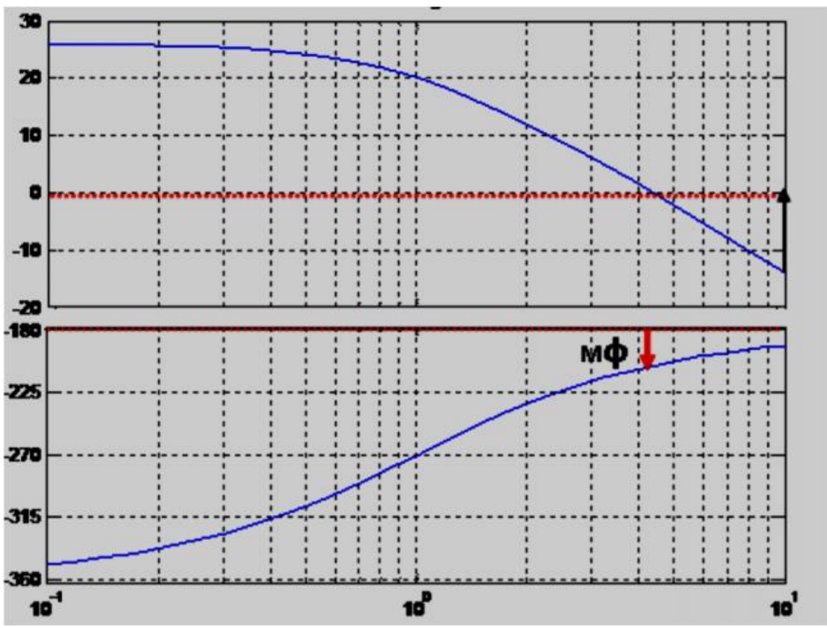


fréquences

Diagramme de Bode



$$T(p) = \frac{20}{p^2 - 2p + 1}$$



*

Le système est instable en BF car MG>0 et Mφ <0

III. 3. Marges de stabilités

III.3.1. Marge de Gain : MG

Première définition

La marge du gain est le facteur par lequel il faut multiplier le gain de la fonction de transfert en Boucle ouverte pour amener son module à la valeur unitaire.

$$MG = \frac{1}{\|OA\|} \qquad MG_{dB} = 20\log\frac{1}{\|OA\|} = -20\log\|OA\|$$

Deuxième définition

C'est l'écart en gain par rapport à 0 dB lorsque le déphasage est de -180°.

$MG_{dB} = -20\log|T(j\omega_A)|$ **Avec** $Arg(T(j\omega_A)) = -\pi$

Remarques

- Si la *MG* *dB* >0, le système est stable en BF.
- Si la *MG* *dB* <0, le système est instable en BF.
- Si la *MG* *dB* =0, le système est juste oscillant en BF
- En pratique, la *MG* *dB* >8dB ou la *MG* *dB* >15dB

III.3.2. Marge de Phase : Mφ

Définition:

C'est l'écart en phase par rapport à -180° lorsque le gain du système en boucle ouverte est égal à 1 (0dB)

$M\varphi = Arg(T(j\omega_B)) + \pi$ **Avec** $|T(j\omega_B)|_{dB} = 0$

Remarques

- Si la *Mφ* >0, le système est stable en BF.
- Si la *Mφ* <0, le système est instable en BF.
- Si la *Mφ* =0, le système est juste oscillant en BF
- En pratique, la *Mφ* >45°