الاقتصاد القياسي لمعطيات البانل

محاضرات مقياس لطلبة الماستر 1 تخصص أقتصاد كمي – قسم الاقتصاد

bouabdallah salah
جامعة محمد بوضياف المسيلة |

فصل 3. نموذجي الأثر الثابت والأثر العشوائي

نموذج الأثر الثابت بالتحويل الداخلي – نموذج الأثر العشوائي

بعد أن تطرقنا لنموذج الأثر الفردي وتقديره بطريقة **دالة الفروق الأولى**، نتطرق لطريقتين لا يقلان شيوعا لتقدير الآثار غير المشاهدة في إطار نماذج بيانات البانل. رغم أن هاتين الطريقتين أصعب للشرح وللتطبيق، إلا أن هناك برمجيات تسمح باستخدامها بسهولة. نتطرق أولا **لمقدر نموذج الأثر الثابت**. على غرار مقدر التفريق، تعتمد طريقة الأثر الثابت على تحويل البيانات وتسمح بإلغاء الأثر غير المشاهد a_i قبل عملية التقدير. كل المتغيرات الثابتة في الزمن تلغى هي الأخرى من النموذج.

نتطرق في المبحث الثاني لتقدير نموذج الأثر العشوائي. هذا النموذج يكون مناسبا عندما يكن افتراض أن الأثر غير المشاهد ليس مرتبطا باي من المفسرات المدرجة في النموذج. إذا تم إدراج عدد كاف من المتغيرات المفسرة المناسبة في الدالة، عندها يمكن قبول بأن أيا كان مصدر تباين متبقي محتمل residual heterogeneity لا يمكنها ان تسبب إلا ارتباطا ذاتيا في مكون الخطأ المركب وليس الارتباط بين الحد الخطأ ومفسرات النموذج. تقدير نماذج الأثر العشوائي بطريقة المربعات الصغرى المعممة (GLS) سهل على حد ما، ويمكن اعتماده بالبرمجيات الشائعة للاقتصاد القياسي.

نتطرق في الفصل أيضا للمقارنة بين النماذج FD و FE وبين FE و RE ولاختبار هاوسمن للمفاضلة بينهما.

1. تقدير نموذج الأثر الثابت *(FE)* بالتحويل الداخلي ***within***

دالة التحويل الداخلي

الانحدار على متغيرات مؤشرة

المفاضلة بين مقدري FD و FE

1-1. دالة التحويل الداخلي ***within***

رأينا من قبل دالة الفروق الأولى كطريقة من بين طرق تقدير نموذج الأثر الفردي غير المشاهد a_i. هناك طريقة أخرى في التقدير تعطي نتائج أفضل في ظل فرضيات معينة تدعى طريقة التحويل الداخلي. نستخدم طريقة الأثر الثابت عندما نرجح وجود فروقات فردية (تأثر عل التابع لكنها غير مدرجة كمفسرات) وهذه الفروقات الفردية مرتبطة بالمفسرات المدرجة.

لنأخذ نموذجا بمفسرة واحدة. من أجل كل مفردة i لدينا[1] (لم ندرج الثابت تسهيلا):

[1] Wooldridge J. M., op. cit. 2015

$$y_{it} = \beta_1 x_{it} + a_i + u_{it},\ t = 1,2,\ \ldots,T \qquad (3.1)$$

لنأخذ لكل مفردة متوسط قيم الدالة في الزمن:

$$\bar{y}_i = \beta_1 \bar{x}_i + a_i + \bar{u}_i$$

حيث:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it};$$
$$\bar{x}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{it};$$
$$\bar{u}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_{it};$$

للتخلص من a_i نطرح المتوسط من الدالة، أي نحول إلى المتغيرة الممركزة، فنجد:

$$y_{it} - \bar{y}_i = \beta_1(x_{it} - \bar{x}_i) + (a_i - a_i) + (u_{it} - \bar{u}_i)$$
$$y_{it} - \bar{y}_i = \beta_1(x_{it} - \bar{x}_i) + (u_{it} - \bar{u}_i); t = 1,2,\ldots,T$$

أحيانا نكتب أيضا (اختصارا)[1]:

$$\ddot{y}_{it} = \beta_1 \ddot{x}_{it} + \ddot{u}_{it}\ ;\ t = 1,2,\ \ldots,T \qquad (3.2)$$

الآن وقد تخلصنا من الأثر الثابت a_i يمكن التقدير بطريقة المربعات الصغرى على البيانات المجمعة الممركزة (time demeaned data). حجم العينة هو NT.

لاحظ:

بعض البرمجيات تضيف المتوسط العام إلى طرفي المعادلة، فتضيف المتوسط العام ل y في الطرف الأيسر، وتضيف متوسط المفسرة في الطرف الأيمن.

$$y_{it} - \bar{y}_i + \bar{y} = \beta_1(x_{it} - \bar{x}_i + \bar{x}) + (u_{it} - \bar{u}_i + \bar{u}); t = 1,2,\ldots,T$$

إذا تم إدراج ثابت في النموذج β_0 فإن قيمته تمثل متوسط الأثر الثابت.

$$y_{it} - \bar{y}_i = \beta_0 + \beta_1(x_{it} - \bar{x}_i) + (u_{it} - \bar{u}_i); t = 1,2,\ldots,T$$

لاحظ أيضا أننالم ندرج الثابت في (3.1) تسهيلا، لكن التحويل يلغيه (متوسط الثابت يساوي الثابت نفسه وبالتالي الفرق بينهما معدوم)، على عكس FD الذي لا يلغي الثابت.

المقدر بهذه الطريقة يدعى **مقدر الأثر الثابت** أو **المقدر الداخلي** within estimator. سبب التسمية هو أن طريقة المربعات الصغرى تعتمد في هذه الحالة على التباين الداخلي للمفردة في الزمن. هناك أيضا طريقة التقدير البيني between estimator لكنها منحازة في حالة وجود ارتباط بين a_i و~x_i

إدراج متغيرات مفسرة أخرى سهل، ويكون ذلك بنفس الطريقة، أي التحويل إلى المركزة. نموذج الأثر الثابت في صيغته الأصلية (لكن بدون ثابت) هو:

$$y_{it} = \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \ldots + \beta_k x_{itk} + a_i + u_{it},\ t = 1,2,\ \ldots,T \qquad (3.3)$$

من خلال طرح المتوسط يصبح النموذج كما يلي[2]:

$$\ddot{y}_{it} = \beta_1 \ddot{x}_{it1} + \beta_2 \ddot{x}_{it2} + \ldots + \beta_k \ddot{x}_{itk} + \ddot{u}_{it},\ t = 1,2,\ \ldots,T. \quad (3.4)$$

[1] Wooldridge J. M., 2015
[2] Wooldridge J. M., 2015, op. cit. p. 691.

ويتم تقديره بطريقة المربعات الصغرى على بيانات مجمع. لاحظ غياب الثابت، وذلك لأنه ألغي في عملية التحويل[1].

في ظل فرضية الخارجية التامة stricte exogeneity للمتغيرات المفسرة، يكون مقدر الأثر الثابت غير متحيز: بصيغة تقريبية يعني ذلك أن الخطأ الذاتي u_{it} غير مرتبط بالمتغيرات المفسرة في أي فترة.

كما في طريقة الفروق الأولى، يسمح مقدر الأثر الثابت بارتباط a_i بالمتغيرات المفسرة في أي فترة.

من أجل تطبيق جيد لطريقة المربعات الصغرى يفترض **التجانس** homoscedasticity **وعدم الارتباط الزمني** للخطأ u_{it}.

عيب أساسي في هذه الطريقة أنها تلغي كل متغيرة غير متغيرة في الزمن فلا يعرف معاملها، لأن $\ddot{x}_{it} = 0$ من أجل أي قيمة ل it إذا كانت المتغيرة ثابتة لا تتغير، لذلك لا يمكن إدراج متغيرات ثابتة في الزمن مثل الجنس، مساحة المدينة ...

مثلا: في دراسة لاثر الدخل وعدد الأولاد في العائلة على الادخار لدينا بيانات عينة عشوائية من العائلات مستجوبة في 1990، 1991، 1992. بفرض أن عدد الأولاد $kids_{it}$ لمعظم العائلات لم يتغير في فترة الدراسة. ما المشكلة التي يخلقها هذا على تقدير أثر عدد الأولاد على الادخار؟ سواء استخدمنا مقدر الفروق الأولى أو التحويل الداخلي، سيكون من الصعب تقدير معلمة $kids_{it}$. مثلا في عائلة ما i لم يتغير عدد الأطفال فإن: $\ddot{kids}_{it} = kids_{it} - \tilde{kids}_{it} = 0$ من أجل $t = 1, 2, 3$. طالما هناك عائلات عائلات لها تغير في عدد الأولاد يمكن تقدير المعامل لكن التقدير قد يأتي غير دقيق. هناك نوع من الارتباط المتعدد في التحويل بالأثر الثابت (أو أيضا في الفروق الأولى).

إذا كان الغرض هو تقدير تأثير المتغيرات غير المتغيرة في الزمن فيتعين اختيار طريقة أخرى (POLS أو Between estimators). **المقدر البيني** Between estimator (كما رأينا سابقا) هو مقدر للمربعات الصغرى على دالة مقطعية (غير تجميعية)، هي متوسطات الزمنية للمفسرات والتابع. عيب هذا المقدر أنه منحاز عندما يكون الأثر الثابت ai مرتبط ب متوسط المفسرة، وعندما يكون لنا أسباب للاعتقاد بأن ai غير مرتبط ب xit فإن نموذج الأثر العشوائي يكون أفضل، لأن المقدر البيني يتجاهل جزء مهم من المعلومات متعلقة بكيفية تطور المتغيرات في الزمن (بسبب استخدام المتوسط الزمني).

مثال. أثر التدريب على معدل التالف للمؤسسات. بيانات معدل التالف المعلنة من قبل 54 مؤسسة تم تجميعها على مدى ثلاث سنوات: 1987، 1988، 1989. هذه المؤسسات لم تتلق دعما قبل 1988، في 1988؛ تلقت 19 مؤسسة دعما، في 1989 تلقت 10 مؤسسات أخرى الدعم. نريد التحقق من أن التكوين الذي استفادت منه المؤسسات في 1988 جعل عمالها أكثر إنتاجية في 1989. يمكن القيام بذلك من خلال إدراج المتغيرة المتأخرة grant. ندرج أيضا متغيرات مفسرة أخرى ل 1988 و1989. تقدير نموذج **(3.4)** جاء كالتالي:

Var. dép	Coefficients and SE
d88	-0.08 (0.109)
d89	-0.247 (0.133)
grant	-0.252 (0.151)
$grant_{-1}$	-0.422 (0.210)
NT=162, ddl = 104 = 54(3) – (54+4), R^2 = 0.201	

[1] ddl = NT – N - K

معلمة دعم التكوين سالبة (التكوين يقلل التالف) ودالة في المتغيرة المتأخرى $grant_{-1}$ باختبار ثنائي عند 5 بالمائة، وعند 10 بالمائة في ذات السنة.
قيمتي المعاملين ل grant و$grant_{-1}$ تظهر أن التكوني يأتي ثماره في السنة الموالية أكثر منه بكثير في نفس السنة.
معامل d89 سالب ودال ويعني أن نسبة التالف انخفضت عموما في 89 مقارنة مع 1987 (حتى بالنسبة للمؤسسات غير المستفيدة). على العكس لا يكاد يكون هناك فرق بين 88 و87.
إدراج متغيرات للزمن كان مهما لأنه سمح بالقول بانه حتى مع احتساب التوجه النازل في التالف هناك تأثير مثبت لعملية دعم تكوين العاملين على إنتاجيتهم. كذلك إدراج متغيرة متأخرة كان مهما لأن إهمالها يعني أننا نفترض التأثير يكون فقط في نفس السنة. في الواقع لو قدرنا النموذج بدون إدراج المتغيرة المتأخرة في الدالة نحصل على معامل ل grant يساوي -0.082 وهي قيمة غير دالة.
في ولاية ميشيقان، نص البرنامج على أن المؤسسة المستفيدة في سنة لا يحق لها الاستفادة في السنة الموالية. ماذا يكون تاثير ذلك على الارتباط بين grant و$grant_{-1}$؟
هذا يعني ارتباط سالب بين المتغيرتين، ويمكن التحقق من ذلك بانحدار grant على $grant_{-1}$ بيانات 1989.

قيمة R^2 المحسوبة انطلاقا من **(3.4)** تفسر كما يلي: التباين الزمني ل y_{it} التي يمكن أن تفسر بالتغير الزمني في المتغيرات المفسرة. هناك طرق أخرى لحساب R^2.

لاحظ. رغم أن المتغيرات الثابتة في الزمن لا يمكن أن تدرج في نموذج الأثر الثابت، إلا أنها يمكن ان تحتسب في شكل تفاعلات مع متغيرات أخرى متغيرة في الزمن، وخاصة متغيرات مؤشرة على الزمن نفسه. مثلا في دالة الأجر والمستوى التعليمي، إذا كان هذاالأخير لا يتغير في الزمن لكل المفردات، يمكن إدراج تفاعل المستوى التعليمي مع كل من متغيرات الزمن من أجل تقييم كيفية تطور تأثير أو مردودية المستوى التعليمي عبر السنوات على الأجر. لكن لا يمكن في المقابل استخدام نموذج الأثر الثابت لتقييم مردودية المستوي التعليمي في المدة المرجعية، وبالتالي في أي سنة... (wooldridge, 2015, p694)

لاحظ أيضا: عند إدخال مجموعة من المتغيرات المؤشرة للزمنية –أي متغيرة مؤشرة لكل سنة ما عدا السنة الأولى – لا يمكن تقدير تأثير أي متغيرة تكون تغيراتها في الزمن متطابقة. مثال ذلك الخبرة في بيانات البانل اين يعمل كل فرد كل سنة، بحيث تزداد الخبرة بنفس المقدار (سنة واحدة) لكل المفردات. الأثر الثابت ai يحتسب الاختلاف بين الافراد في السنة الأولى، لكن فيما بعد، تأثير سنة إضافية للخبرة لا يمكن تمييزه عن التأثير الإجمالي...(wooldridge, 2015, p694)

مثال. لدينا بيانات 545 رجل عمل طيلة 1980 إلى 1987. بعض المتغيرات تغيرت في الزمن، منها خاصة الخبرة والحالة الزوجية، والوضع النقابي، بينما بقيت متغيرات أخرى صابتة في الزمن مثل الأصل العرقي والمستوى التعليمي. إذا استخدمنا نموذج الأثار الثابتة، لا يمكن إدراج العرق أو المستوى التعليمي أو الخبرة، لكن يمكن إدراج التفاعل بين educ والمتغيرات المؤشرة للزمن من 1980 إلى 1987 لاختبار ثبات مردودية التعليم خلال الفترة. المتغيرة التابعة هي log(wage) بينما المتغيرات المستقلة تم إدراج مؤشرات على الحالة الزوجية والنقابية، ومتغيرات مؤشرة على السنوات، ومتغيرات تفاعلية d81.educ, d82.educ, …, d87.educ.

معاملات التفاعل جاءت كلها موجبة، وعموما أكبر في السنوات الحديثة، خاصة معامل d87.educ جاء 0.03 مع $t = 2.48$، أي أن مردودية التعليم قدر بحوالي 3 بالمائة في 1987 مقارنة مع 1980، سنة المرجع. معامل

d86.educ أيضا جاء دالا (0.027, t=2.23) في اختبار ثنائي. معاملات السنوات الأخرى جاءت غير دالة. مردود سنة الأساس لا يمكن تقييمه لما ذكرناه من قبل. إذا استخدمنا اختبار فيشر لمجمل السنوات (لكل الحدود السبعة للتفاعل بين السنة والتعليم) يأتي مستوى الدلالة 0.28، وهذا يظهر إمكانية ان تكون بعض المتغيرات دالة فرديا رغم أن مجمل المتغيرات غير دال. عموما النتائج تنسجم مع فرضية أن مردودية المستوى التعليمي زادت في الفترة المدروسة.

1-2. الانحدار على متغيرات مؤشرة

المقاربة الكلاسيكية لنموذج الأثر الثابت **(3.3)** هي افتراض أن الأثر الثابت ai هي معلم يتعين تقديره لكل مفردة i، بالإضافة إلى معاملات المتفسرات وربما المتغيرات المؤشرة للزمن. تسمى هذه الطريقة **الانحدار على المتغيرات المؤشرة**. مشكلة هذه الطريقة هي أنها تتطلب عددا كبيرا من المعالم للتقدير، حتى عندما يكون حجم العينة غير كبير، مثلا 54، كما في دراسة التدريب والتالف آنفا، يكون عدد المعالم كبيرا، بقدر عدد المفردات، وبالتالي لا يمكن تقدير النموذج، لذلك فهي طريقة غير عملية للمقاطع الكبيرة. هذه الطريقة لها مع ذلك بعض الميزات، منها أن R^2 يكون أكبر بفعل العدد الكبير من المتغيرات. في مثال أثر مناطق الأعمال على البطالة (الفصل السابق) نحصل على $R^2 = 0.933$ (الانحدار ممكن ب N=22). أحيانا تكون معرفة قيم المعامل a_i لكل مفردة مهمة، مثلا للمقارنة بين بعض المدن أو المفردات أو مقارنة مفردة مع المتوسط، لكن غالبا لا يتم إظهار هذه المعاملات في البرمجيات، إلا إذا طلبنا ذلك.

1-3. المفاضلة بين *FD* و *FE*

إلى الآن، إذا وضعنا جانبا POLS، تطرقنا لطريقتين لتقدير الأثر الثابت للنموذج. طريقة الفروق الأولى، وطريقة الفروق عن المتوسط، فكيف نعرف أي الطريقتين أنسب؟

عندما تكون T=2 تعطي الطريقتان نفس النتائج بالنسبة لتقدير المعاملات وإحصائيات الاختبار، وبالتال يلا يهم أي الطريقتين نستخدم إذا كنا نقدر ذات النموذج. من الطبيعي إدراج ثابت في FE وهذه الأخيرة تمثل الفترة الثانية في النموذج الأصلي، عندما يكتب لفترتين. لذلك، يتعين أن ندرج في FE متغيرة مؤشرة للفترة الثانية بحيث نحصل على التطابق التام مع FD التي تتضمن ثابت.

في حالة T=2 تقدير EF أسهل في التطبيق، أيا كان البرنامج المستخدم. من جهة أخرى، من السهل في FD حساب مقدرات مقاومة لوجود عدم التجانس، لأنها في حالة T=2 تكون بمثابة تحلي انحدار على بيانات مقطعية.

عندما T >2 تعطي الطريقتان نتائج مختلفة. كلا الطريقتان غير متحيزتان، ومتقاربتان (عند T ثابت و N→∞) في ظل افتراضات معينة (الأربع الأولى). في حالة البيانات القصيرة (T صغير و N كبير) يكون الاختيار بين الطريقتين على أساس الفعالية النسبية، والتي تحددها الارتباط الذاتي لحد الخطأ البسيط u_{it} (في ظل افتراض تجانس u_{it} للتمكن من المقارنة).

في حالة u_{it} غير مرتبطة خلال الزمن، مقدر FE أكثر فعالية من FD. بما ان نموذج الأثر الفردي محدد بخطأ غير مرتبط خلال الزمن، فإن طريقة FE هي الأكثر استخداما من FD. يجب مع ذلك الانتباه إلى أن ذلك يكون خاطئا أحيانا، فالاثر غير المشاهد يمكن ان يكون تتغير خلال الزمن وفي الوقت نفسه تكون مرتبطة ذاتيا. في حالة وجود ارتباط **قوي جدا وموجب**

في u_{it} كما في المسار العشوائي (radom walk)، تكون FD أولى لأن Δu_{it} تكون غير مرتبطة. في حالات كثيرة يكون هناك ارتباط في u_{it} ولكن ليس لدرجة المسار العشوائي، في هذه الحالة يصعب المفاضلة بين الطريقتين.

من الصعب اختبار ما إذا كانت u_{it} غير مرتبطة في تقدير FE، يمكن تقدير $\ddot{u}_{it}$ لكن ليس u_{it}. هناك طرق لمعالجة ذلك، **وفي حالة وجود ارتباط ذاتي سلبي في Δu_{it} عندها تكون** FE ربما تعطي مقدرات أفضل. كثيرا ما يكون من الأفضل تجريب الطريقتين FE وFD، وإذا جاءت النتائج متقاربة يكون ذلك مؤشرا جيدا. غالبا يكون من المناسب إظهار نتائج الطريقتين إذا جاءتا متقاربتين وتفسير الفروق بينهما.

1-4. الأثر الثابت في حالة البيانات غير المتوازنة

نقول عن بيانات البانل أنها غير متوازنة أو غير اسطوانية إذا وجدت بعض القيم المفقودة في فترات ما لبعض الأفراد. في تقدير نموذج الأثر الثابت، إذا كانت T_i عدد فترات المفردة i نستخدم ببساطة T_i مشاهدة. العدد الإجمالي للمشاهدات سيكون مجموع أعداد المشاهدات المتاحة للمجمل المفردات. البرمجيات تقوم بهذا عن المستخدم. المفردات التي لها مشاهدة واحدة لا يكون لها دور في التقدير، لأن التحويل بطرح المتوسط يعطي 0.

من المهم معرفة سبب القيم المفقودة. إذا أمكن افتراض أن القيم المفقودة ليس لها علاقة بحد الخطأ البسيط u_{it}، فإن استخدام الأثر الثابت مع البيانات المنقوصة لا يطرح مشكلة. إذا كان سبب فقدان (attrition) مفردات ما في الفترات اللاحقة مرتبط بحد الخطأ البسيط u_{it}، عندها نكون أمام مشكل في تحديد العينة العشوائية يمكن أن يأدي إلى تحيز مقدرات المعاملات. لكن من إيجابيات طريقة الأثر الثابت أنه يسمح بتأثر فقدان القيم (attrition) بالارتباط ب a_i. فكرة أن بعض المفردات لها احتمال أكبر للاختفاء من الدراسة من مفردات أخرى يعتبر أثرا ثابتا تلتقطه a_i.

> مثال. في مثال أثر التكوين على التالف، نقوم بإضافة متغيرتين اثنتين للنموذج لقياس أثر رقم الاعمال وعدد العمال: $\log(sales_{it})$ و $\log(employ_{it})$. هذا جعل 3 مؤسسات من 54 تختفي نهائيا من التحليل لأن بياناتها لرقم الاعمال وعدد العمال غير متوفرة، من جهة أخرى، فقدت 5 مشاهدات بسبب قيم مفقودة في أحد المتغيرتين الإضافيتين. كم يكون n في هذه الحالة علما أن المؤسسات تم تتبعها لثلاث سنوات؟
>
> الجواب: $(54 - 3) \times 3 - 5 = 148$

مسألة القيم المفقودة قد يكون أمرا معقدا، أنظر مثلا (Wooldridge, 2010, chapter 19).

2. نموذج الأثر العشوائي

دالة الأثر العشوائي

اختبار هاوسمن

الأثر الثابت أم الأثر العشوائي؟

2-1. دالة الأثر العشوائي

ننطلق من نموذج الأثر غير المشاهد أو الأثر الفردي[1]:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it1} + \ldots + \beta_k x_{itk} + \alpha_i + u_{it}, \quad (3.5)$$

مع إدراج بوضوح ثابت في النموذج[2]. اللجوء إلى تحويل FE أو FD يهدف لإلغاء a_i المفترض أنها مرتبطة بأحد المفسرات أو أكثر . في نموذج الأثر العشوائي نفترض أن المعامل α_i **غير مرتبط بالمفسرات**، فلا نحتاج للتخلص منه، وبالتالي ينظم إلى الخطأ ولا نحتاج لتقديره[3].

$$\mathrm{Cov}(a_i, x_{itj}) = 0, \; t = 1, \ldots, T, \; j = 1, \ldots, k,$$

بتعريف الخطأ المركب: $v_{it} = \alpha_i + u_{it}$ تحت افتراض عدم ارتباط a_i باي من المفسرات يصبح النموذج (3.5) هي نموذج الأثر العشوائي وتكتب كما يلي:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it1} + \ldots + \beta_k x_{itk} + v_{it},$$

فرضيات الأثر العشوائي (مثاليا) هي ذات فرضيات الأثر الثابت مضافا إليها فرضية أن a_i ليست مرتبطة بأي من المتغيرات المفسرة في أي من الفترات. إذا كان لدينا أسباب جيدة للاعتقاد بأن الآثار a_i مرتبطة بأحد المفسرات أو أكثر يتعين اللجوء إلى تحويل الفروق الأولى أو إلى نموذج الأثر الثابت.

لاحظ. بما أن a_i متضمن في v_{it} في كل فترة فإن v_{it} مرتبطة ذاتيا خلال الزمن (خطأ مفردة في فترة غير مستقل عنه في فترة سابقة: إن كانت قيمة الخطأ لمفردة ما أعلى في فترة فهي غالبا أعلى في الفترة الموالية، والعكس ...). من أجل ذلك، وتحت افتراض الخطأ العشوائي:

$$\mathrm{Corr}(v_{it}, v_{is}) = \mathrm{Var}(a_i)/(\mathrm{Var}(a_i) + \mathrm{Var}(u_{it})), \; t \neq s$$

---

[1] Wooldridge J. M., op. cit. 2015

[2] ما يعني أننا نفترض أن متوسط الأثر الثابت a_i له متوسط يساوي 0. عادة يتم إدراج أيضا متغيرات مؤشرة على الزمن. بفرض أن a_i ليست مرتبطة بأي من المتغيرات المفسرة في أي من الفترات؛ فإن اللجوء إلى هذا التحويل FE أو FD لإلغاء a_i يعطي مقدرات غير فعالة.

[3] النقاش حول هل يتم اعتبار a_i أثرا ثابتا أم عشوائيا هو في الأصل هل هذا الحد هو فعلا متغيرة عشوائية أم معلمة يتعين تقديرها، لكن ما يهم حسب وولدرج 2010، هو هل هذا الحد مرتبط بالمفسرات أم لا. طريقة الأثر العشوائي RE تفترض عدم وجود ارتباط $\mathrm{Cov}(x_{it}, a_i) = 0$ وفي الواقع فإن صيغة أشد للفرضية .stronger hyp، بمعنى الاستقلال، هي المطلوبة لتبرير الاستدلال تبريرا كاملا، وهي $E(a_i/x_{it}) = E(a_i)$.

هذا الارتباط الموجب بالضرورة يمكن أن يكون معتبرا (substential) وبما أن الخطأ المعياري المقدر بالمربعات الصغرى يتجاهل هذا الارتباط فإنها ستكون متحيزة وأيضا إحصائيات الاختبار المعتادة. في هذه الحالة (وجود ارتباط ذاتي) يتم اللجوء إلى المربعات الصغرى المعممة (GLM). للتأكد من صحة الاجراء يتعين التأكد من أن بيانات البانل القصير (T صغيرة و N كبيرة). خصائص مقدرات نموذج RE في حالة البيانات الطويلة غير معروف جيدا رغم أنه مستخدم، وتجدر الإشارة إلى أن تقديرات النموذجان RE و FE تكون قريبة من بعضها في البيانات الطويلة.

لنفترض هنا أن البيانات متوازنة (رغم أن الطريقة تصلح أيضا في حالة البيانات غير المتوازنة)، حساب تحويل GLM الذي يسمح بإلغاء الارتباط الذاتي في حد الخطأ يتطلب مفاهيم معقدة للجبر الخطي، لكن التحويل في حد ذاته يعد سهلا. عبارة النموذج المحول تكون كالآتي:

$$y_{it} - \gamma m y_i = \beta_0 (1 - \gamma) + \beta_1(x_{it1} - \gamma m x_1) + \dots + \beta_k(x_{itk} - m x_{ik}) + (v_{it} - \gamma m v_i) ,$$

حيث:

$$\gamma = 1 - [\sigma^2_u/(\sigma^2_u + T\sigma^2_a)]^{1/2},$$

و γ معلمة موجبة محصورة بين 0 و 1 تمثل الجزء من المتوسط الزمني المطروح من المتغيرة في التحويل (في FE يطرح المتوسط كاملا). اقتراب المعلمة γ من 0 أو 1 يقرب المعادلة من نموذج POLS أو FE على التوالي. قرب γ من 0 يعني ترك نسبة كبيرة من الأثر الفردي في حد الخطأ وبالتالي تحيز أكبر لمقدر RE، والعكس قربه من 1 يعني التحيز يقترب من الصفر وبالتالي يقترب النموذجان RE و FE.

الخطأ في المعادلة أعلاه ليس مرتبطا ذاتيا.

هذه المعادلة تسمح أيضا بوجود متغيرات ثابتة في الزمن وهذه ميزة أساسية لنموذج الأثر العشوائي مقارنة مع FE و FD. مثلا، في دراسة على الأجور يمكن إدراج متغيرة مثل المستوى التعليمي التي لا تتغير في الزمن بالنسبة للكبار، لكن هذا يقتضي أن المتغيرة الثابتة هذه (المستوى التعليمي) غير مرتبطة ب a_i، هنا المستوى التعليمي يجب أن يكون غير مرتبط بالذكاء والخلفية الأسرية للفرد مثلا، وهذا قد لا يكون محققا.

لاحظ. يمكن إدراج متغيرة مؤشرة للزمن في النموذج. لنكتب النموذج مرة أخرى، وللتبسيط نفترض فترتين فقط ومفسرة واحدة (مع إدراج متغيرة ثنائية للزمن).

$$\boxed{y_{it} = \beta_0 + \delta_0 d2_t + \beta_1 x_{it} + (\alpha_i + u_{it}), \quad t = 1,2.}$$

2-2. اختبار هاوسمن

اختبار هاوسمن Hausman 1978 للاستقلال بين الفروقات الفردية والمفسرات، إذا جاء الاختبار دالا فهذا يعني الذهاب إلى طريقة الأثر الثابت وليس الأثر العشوائي لأن هناك ارتباطا ما بين الفروقات الفردية والمفسرات. كيف ذلك؟

الفرضية الصفرية لاختبار هاوسمن هي استقلال الأثر الثابت عن المفسرات[1]:

$$H_0 : Cov(\alpha_i ; x_{it}) = 0$$

في هذه الحالة كلا النموذجين RE وFE يعطيان مقدرات متقاربة consistent لكن مقدرات RE أكثر دقة:

$$SE(B\hat{}_{RE}) < SE(B\hat{}_{FE})$$

في حالة عدم تحقق هذه الفرضية، طريقة RE تكون غير متقاربة بينما تبقى طريقة FE متقاربة.

في ظل الفرضية الصفرية، تتبع إحصائية اختبار هاوسمن توزيع ك2 بدرجة حرية يساوي عدد المفسرات المتغيرة في الزمن، وتحسب الإحصائية كما يلي:

$$W = (B\hat{}_{FE} - B\hat{}_{RE})^2/(var(B\hat{}_{FE}) - var(B\hat{}_{RE}))^2 \sim X^2_v$$

تحت H_0 : البسط وهو الفرق بين المقدرين، يفترض أن يكون صغيرا (حيث كلا المقدرين متقاربان وبالتالي غير مختلفين كثيرا) والمقام كبيرا (لأنه تحت H_0 تباين مقدر RE يكون أقل من تبيان مقدر FE)، وبالتالي يأتي الكسر قريبا من الصفر. فكرة الاختبار هي استخدام RE إلا إذا رفض الاختبار شرط الاستقلال. في الواقع عدم رفض الفرضية الصفرية يعني أن مقدري النموذجين قريبين من بعضهما بحيث يمكن استخدام أي من النموذجين. في الواقع عدم على العكس في حالة عدم تحقق H_0 نعلم أن البسط يكون كبيرا لأن مقدر نموذج الأثر الثابت فقط يكون متقاربا بينما الآخر غير متقارب، بينما المقام يكون صغيرا لأن ميزة صغر تباين مقدر نموذج الأثر العشوائي تزول. في المحصلة يستبعد أن تأتي الإحصائية بعيدة عن الصفر في حالة تحقق H_0 لذلك نرفض هذه الاخيرة إذا زادت قيمة الإحصائية عن القيمة الجدولية.

لتحقيق فرضية عدم الارتباط في RE نحتاج عادة لإدراج عدة متغيرات مفسرة في النموذج بحيث تستوعب مجمل التباين في التابع بما لا يدع مجالا تقريبا للفروقات الفردية.

لاحظ. في الواقع الافتراض المطلوب هو الخارجية التامة والاستقلالية strict exogeneity and orthogonality between x_{it} and α_i . التعبير عن الخارجية التامة يمكن أن يكون كما يلي:

$$E(y_{it} \mid x_{i1}; x_{i2}; \ldots ; x_{iT}; \alpha_i) = E(y_{it} \mid x_{it}; \alpha_i) = \beta x_{it} + \alpha_i$$

ويعني (المساواة الأولى إلى اليسار هي المهمة) عدم ارتباط y_i في فترة t بالمدخلات x_i في فترات سابقة. مثلا: إذا كانت y_{it} هي محصول الصويا لمزرعة ما i، والمدخلات هي راسالمال، كمية السماد، كمية العمل، كمية الأمطار، ومتغيرات أخرى مشاهدة، فإن α_i يمكن أن يلتقط فروقات فردية غير مشاهدة وغير متغيرة مع الزمن مثل خصوبة الأرض، مهارة التسيير، وغيرها. الافتراض الطبيعي هو أنه طالما تم احتساب المتغيرات المشاهدة مع الأثر غير المشاهد فإن مدخلات سنوات أخرى ليس له تأثير على المحصول لهذه السنة، وهذا لأننا احتسبنا الفروقات الفردية[2].

---

[1] يمكن أيضا كتابة افتراض الخارجية التامة بدلالة الخطأ البسيط (رغم أن الكتابة أعلاه أوضح) وكتابة افتراض العمودية كما يلي:
assumption RE.1: (a) $E(u_{it} \mid x_i; \alpha_i) = 0$, t : 1; ... ; T.
(b) $E(\alpha_i \mid x_i) = E(\alpha_i) = 0$

[2] Wooldridge J. M., 2010, p 253.

ملاحظات

- غالبا تقوم البرمجيات بالتصحيح تلقائيا من الارتباط الذاتي وعدم التجانس[1] الذي ينشأ من ترك الفروق الفردية في حد الخطأ، فمفردات الخطأ u_{it}، بسبب ترك الفروق الفردية ضمنها، ليست (كما نريدها) مستقلة عن بعضها وبنفس التوزيع ومتوسطها الصفر، أحد الفرضيات الأساسية في OLS. مثلا في برنامج R تقوم الدالة ()plm بهذا التصحيح تلقائيا، لكن يجب القيام باختبار هاوسمن بالدالة ()phtest
- يمكن تصور نماذج حيث يوجد الأثر الثابت حتى بدون هيكل بيانات البانل التقليدي، مثلا بيانات التوائم.

مثال 3-1. عن المفاضلة بين طريقة الأثر الثابت والأثر العشوائي[2].

لدينا نتائج 4 طلبة في 3 سنوات، ونريد اختبار تأثر العلامات (Grade) بعدد ساعات المذاكرة أسبوعيا (StudyTime). نتوقع أن الطلبة مختلفين (هناك فروقات فردية تأثر على التابع: العلامات)، وهذه الفروقات الفردية نرجح أنها مرتبطة بالمتغيرة المفسرة وهي عدد ساعات المذاكرة، حيث قد يكون الطلبة الأكثر ذكاء يميلون إلى أن يكونوا مثابرين (عدد ساعات مذاكرة أكبر من غيرهم)، أو العكس لا يحتاجون إلى المذاكرة لساعات طويلة، أيا كانت العلاقة طردية أم عكسية. في هذه الحالة نحتاج إلى إدخال هذه الفروقات الفردية في النموذج (من خلال متغيرات وهمية) ولا نهملها، لأنه حيثما وجدت متغيرات مهملة لها علاقة بالمتغيرات المفسرة، يكون لدينا تحيز في المعاملات المقدرة (تحيز المتغيرات المهملة omitted variables bias).

في الواقع يمكن أن نتصور أن الفروقات الفردية في السنوات أيضا لها علاقة بالعلامات وبالمفسرة عدد ساعات الدراسة، بحيث أن بعض السنوات أصعب من الأخرى، وهذا يؤثر على التابع (العلامة) وعلى المفسرة: عدد ساعات الدراسة التي يخصصها الطالب في هذه السنة أو تلك.

في هذه الحالة (وجود متغيرات وهمية مرتبطة بالمفسرات) لا يجدر استخدام طريقة الأثر العشوائي، لأن هذه الأخيرة تفترض استقلال الفروقات الفردية عن المفسرات (وتعتبرها عشوائية وبالتالي تتركها مع حد الخطأ أي بدون تقدير أي أنها تهملها) ولا طريقة التقدير البيني للسبب نفسه وهو فرضية الاستقلال عن المفسرات. الطريقة التي تسمح بالارتباط بين الفروق الفردية والمفسرات هي طريقة الفروق الأولى FD أو طريقة الأثر الثابت FE.

إذا أردنا إدراج هذه الفروقات الفردية في الدالة ولا نهملها (نموذج الفروق الفردية) سنجد أننا نحتاج إلى الكثير من المتغيرات الوهمية (3 متغيرات ل 4 طلبة ومتغيرتين ل 3 سنوات). هذا يستهلك الكثير من درجات الحرية وبالتالي يضخم الخطأ المعياري للمقدر (الخطأ المعياري للمقدر يتأثر بحجم العينة مقارنة مع عدد المتغيرات المفسرة). طريقة الأثر الثابت تحل هذه المشكلة فهي تسحبها من الدالة لأنها تستخدم الفرق عن المتوسط في كل فترة وبما أن المتغيرات الوهمية ثنائية فهي في كل فترة إما أن تأخذ 0 أو 1 أي نفس القيمة خلال الفترة وبالتالي فالفروق تعطي أصفارا (0=1−1 ,0=0−0)

Student	Year	StudyTime	Grade	Jamel	Sali	Mabrouk	Year2	Year3
Ali	1	8	66.5	0	0	0	0	0
Ali	2	5	50.4	0	0	0	1	0
Ali	3	9	69.0	0	0	0	0	1

[1] Non-spherical Error variance
[2] Mark L. Burkey, BurkeyAcademy, 2014, (02-04-2010), https://www.youtube.com/channel/UCVjJYEZwPr-Q1yqyQsELC3g

Jamel	1	4	54.7	1	0	0	0	0
Jamel	2	6	60.3	1	0	0	1	0
Jamel	3	2	38.3	1	0	0	0	1
Sara	1	11	86.1	0	1	0	0	0
Sara	2	3	45.3	0	1	0	1	0
Sara	3	7	64.3	0	1	0	0	1
Mabrouk	1	2	48.9	0	0	1	0	0
Mabrouk	2	1	39.1	0	0	1	1	0
Mabrouk	3	2.5	46.8	0	0	1	0	1

لكن إذا افترضنا أن الفروق الفردية بين الطلبة ليست مرتبطة بالمفسرات المدرجة، عندها يمكن استخدام طريقة الأثر العشوائي، أي يمكنك إهمال المتغيرات الوهمية التي تمثل الفروقات الفردية بدون أن يأدي ذلك لتحيز المقدرات.

مثال 3-2. دالة للأجر عند الرجال. استخدمت فيها 3 طرق POLS، FE، وRE. في الطريقتين الأليين ندرج educ ومتغيرتين مؤشرتين للعرق Black وhispan، لكن في FE نسحب المتغيرتين الأخيرتين الثابتتين في الزمن. المتغيرات المتحركة في الزمن هي exper, exper², union, married. المتغيرة الأخيرة سحبت من FE (لكن أبقيت exper²). كل من الدوال تتضمن متغيرات مؤشرة للزمن.

	POLS	RE	FE
Educ	0.091 (0.005)	0.092 (0.011)	−
Black	−0.139 (0.024)	−0.139 (0.048)	−
Hispan	0.016 (0.021)	0.022 (0.043)	−
Exper	0.067 (0.014)	0.106 (0.015)	−
Exper²	−0.0024 (0.0008)	−0.0047 (0.0007)	−0.0052 (0.0007)
Married	0.108 (0.016)	0.064 (0.017)	0.047 (0.018)
Uninon	0.182 (0.017)	0.106 (0.018)	0.08 (0.019)
Dep. Var.: log(wage)	$\hat{\gamma} = 0.643$		

Cengage learning, 2013.

ماذا تلاحظ؟ معاملات متغيرات المؤشرات Educ، Black، Hispan متطابقة بين Pols و RE. الخطأ المعياري في POLS أقل لأن هذه الطريقة تقلل (underestimate) من قيمة الخطأ المعياري لأنها تتجاهل الارتباط الذاتي الموجب. إيرادها هنا هو فقط للمقارنة. معاملات Exper² لها خصوصية. معاملي Married وUnion أقل بكثير في نموذج RE وتنزل أكثر عند عند احتساب الأثر الفردي بنموذج FE. هذا يعني أن هناك آثار فردية تتجه في نفس اتجاه المتغيرتين المذكورتين: الرجال الذين هو أكثر احتمال لأن يحصلوا على أجور أعلى هم أميل لأن يكونوا متزوجين، وهذا عرفناه من خلال المقارنة مع نتائج POLS. في النهاية لا نعلم إن كان الرجال المتزوجون يحصلون على أجور أعلى كمكافأة على إنتاجيتهم، أم أن المؤسسات تكافئ المتزوجين لأنهم أكثر استقرارا في وظائفهم. الأمر نفسه ينطبق على الانتماء للنقابة Union: انخفاض المعامل مقارنة مع POLS يوحي بأن الأثر الفردي غير المشاهد ai مرتبط طرديا ب Union، تذكر أن POLS تترك ai في حد الخطأ، بينما FE تحذفه. حسب التحليل المعياري لأثر المتغيرات المهملة فإن مقدرات POLS منحازة للأعلى عندما

يكون الارتباط طرديا بين ai وUnion. الانتماء للنقابة يبدو أنه مرتبط طرديا بالاثر الفردي الثابت في الزمن الذي يؤثر على الأجر.

في نموذج RE تقدير γ أعطى 0.643 = ^γ هذه القيمة أقرب إلى 1 منها إلى 0 مما يعني أنه - بالنسبة للمتغيرات المتغيرة في الزمن – مقدرات نموذج RE أقرب لـFE منها إلى POLS.

3-2. الأثر الثابت أم الأثر العشوائي؟

ميزة RE: في حالة كون من المعقول افتراض عدم ارتباط α_i بالمفسرات، فإن نموذج الأثر العشوائي يعطي إيجابيتين أساسيتين: أن مقدراته متقاربة وأدق (consistent) ، أي يعطي خطأ معياري أقل من مقدرات نموذج الأثر الثابت. والميزة الثانية لنموذج الأثر العشوائي هي أنه يحتسب المتغيرات الثابتة في الزمن (بما أنه لا يستخدم الفروق عن المتوسط).

سلبية RE: عيب نموذج الأثر العشوائي هو عدم تحقق فرضيته في الغالب.

على عكس نموذج الأثر العشوائي فإن نموذج الأثر الثابت يسمح بالارتباط بين الأثر الفردي ai و xitj. من هذه الناحية، يعتبر FE هو "إطار التحليل الأكثر كفاءة" لقياس أثر متغيرات مفسرة. مع ذلك يمكن أن يكون نموذج RE أنسب في بعض الحالات، خاصة عندما تكون مفسرات مهمة غير متغيرة في الزمن، إذ لا يسعنا عندها استخدام FE لتقدير أثرها على y. في مثل هذه الحالة يتعين افتراض أن الأثر الفردي غير مرتبط بالمفسرات، ولتحقيق ذلك قد يتعين إدراج أكبر عدد ممكن من متغيرات التحكم الثابتة في الزمن (بينما في FE هذا ليس ضروريا). مقدر RE يفضل على POLS لأنه عموما أكثر فعالية.

لكن ماذا عن المفسرات المتغيرة في الزمن، هل هناك حالات يكون فيها اللجوء إلى RE بدل FE مبررا؟ الجواب نعم، عندما يكون ارتباط الأثر الفردي بالمفسرات معدوما، لكن هذه الحالة هي استثناء وليست القاعدة. بفؤض ان أطفالا يتم توجيههم كل سنة إلى اقسام ذات أحجام مختلفة لاختبار تأثير حجم القسم (عدد التلاميذ في القسم) على أدائهم. إذا كان توجيه الأطفال إلى الأقسام المختلفة يتم بشكل عشوائي فإن نموذج الأثر العشوائي هو المناسب (ليس هناك علاقة بين الفروقات الفردية بين التلاميد وبين الأقسام التي يوجهون إليها)، لكن الدراسات التي تأتي بهذا الشكل التجريبي المخطط له ليست هي القاعدة، الغالب أن الباحث يأخذ الواقع كما هو بشكل بعدي، وفي هذه الحالة هناك غالبا تأثير للفروق الفردية بين التلاميذ على نوعية الأقسام أو المدارس التي يتواجدون فيها.

أحيانا، يكون من الصعب افتراض أن المفردات تمثل عينة عشوائية تماما من مجتمع أكبر، خاصة عندما تكون وحدة المشاهدة هي وحدات كبيرة جغرافيا (دول او مقاطعات). في مثل هذه الحالة من المنطقي أن يستخدم نموذج الأثر الثابت FE، باعتبار ai ثوابت مختلفة للتقدير لكل من الوحدات الفردية، فنموذج FE يقتضي تلقائيا اعتبار ثابت خاص لكل مفردة. عموما، في حقل الدراسات على السياسات الاقتصادية ببيانات البانل استخدام FE في الغالب هو الأكثر إقناعا من RE.

3. خلاصة عامة

- يسمح استخدام البيانات المقطعية المجمعة باختبار وجود تغيرات هيكلية
- طريقة بسيطة في البيانات المقطعية المجمعة لتقييم أثر الأحداث والسياسات الاقتصادية هي فرق الفروق
- بيانات البانل تسمح بمعالجة مشكلة التحيز الناجم عن المتغيرات غير المشاهدة
- طريقة الأثر الثابت FE وFD تعطي مقدرات متقاربة بصرف النظر عن ارتباط الفروقات الفردية غير المشاهدة بالمفسرات
- طريقة الأثر العشوائي RE هي أكثر فعالية في حالة غياب الارتباط بين الفروقات الفردية والمفسرات، لكن هذا الافتراض قل ما يتحقق.
- على عكس FE تسمح طريقة الأثر العشوائي RE بإدراج مفسرات ثابتة في الزمن.
- إذا كان النموذج الحقيقي هو نموذج الأثر الحقيقي FE فإن طريقة RE وكذلك POLS وBetween تعطي مقدرات غير متقاربة.