Les matrices de transformation

Dans le plan cartésien, une matrice de transformation est une matrice qui permet, à partir des coordonnées d'un point initial, de trouver celles de son image par une transformation géométrique donnée.

FORMULE

Soit un point initial (x, y) et soit la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice de transformation.

On obtient le point image (x', y') résultant de la transformation géométrique.

Ce point image se calcule ainsi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Il est possible d'effectuer diverses transformations géométriques grâce aux matrices:

- Changement d'échelle horizontal
- Changement d'échelle vertical
- La translation dans le plan cartésien
- Réflexion par rapport à l'axe des abscisses
- Réflexion par rapport l'axe des ordonnées
- La rotation de 90 degrés centrée à l'origine
- La rotation de 180 degrés centrée à l'origine
- La rotation de 270 degrés centrée à l'origine
- L'homothétie de rapport k centrée à l'origine
- Les compositions de transformations géométriques

CHANGEMENT D'ÉCHELLE HORIZONTAL

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer un changement d'échelle horizontal de facteur k, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-1,3)$,$B=(2,2)$ et $C=(4,4)$.
On veut effectuer un changement d'échelle horizontal de facteur 2.

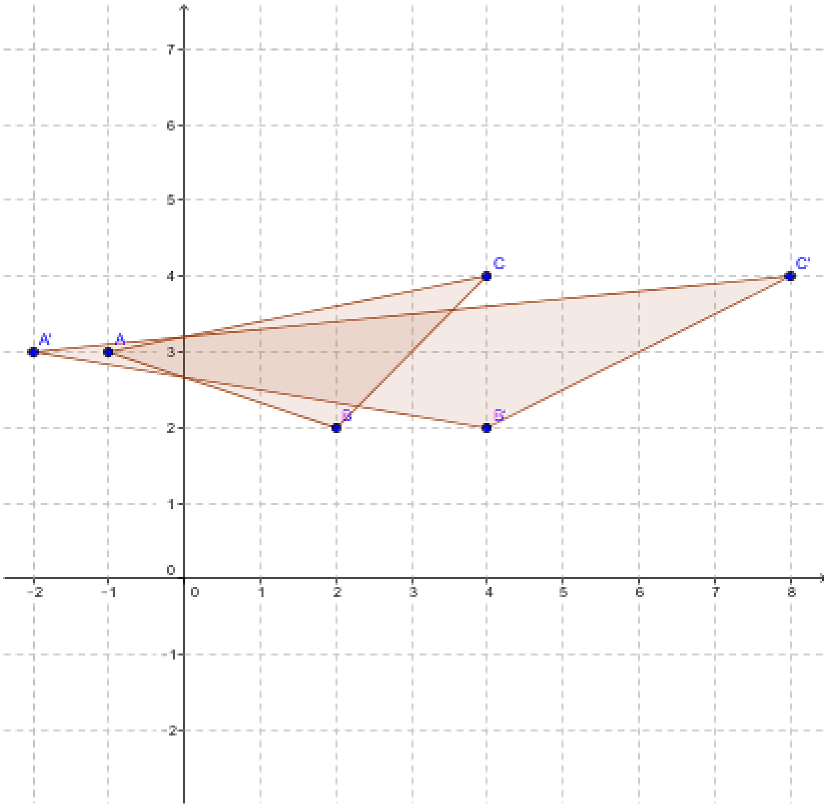
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



Changement d'échelle vertical

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer un changement d'échelle vertical de facteur k, on applique la transformation suivante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-1,3)$,$B=(2,2)$ et $C=(4,4)$.
On veut effectuer un changement d'échelle vertical de facteur 3.

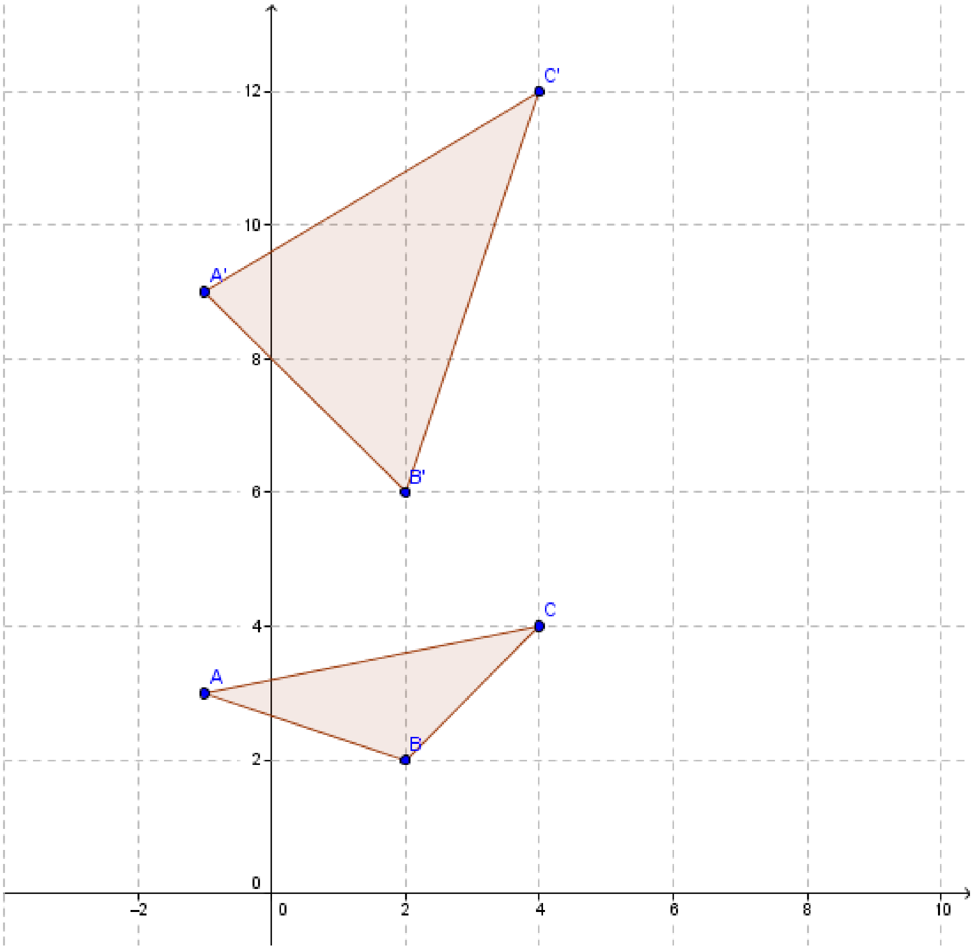
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



La translation dans le plan cartésien

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une translation t selon un vecteur $\vec{t}\,(a, b)$, on applique la transformation suivante:

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

On peut aussi utiliser la matrice de transformation $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$. Toutefois pour utiliser cette matrice, il faut former une autre matrice où chaque ligne correspond aux coordonnées d'un point et dont la dernière colonne est composée de seulement des 1.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1'} & y_{1'} \\ x_{2'} & y_{2'} \\ x_{3'} & y_{3'} \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont les points $A=(-2,1)$, $B=(1,2)$ et $C=(-1,4)$. On veut effectuer une translation définie par le vecteur $t\rightarrow(-2,-2)$.

Ainsi, on obtient la transformation suivante:

$$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et où (x', y') est le point image.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} -2-2 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = A'$$

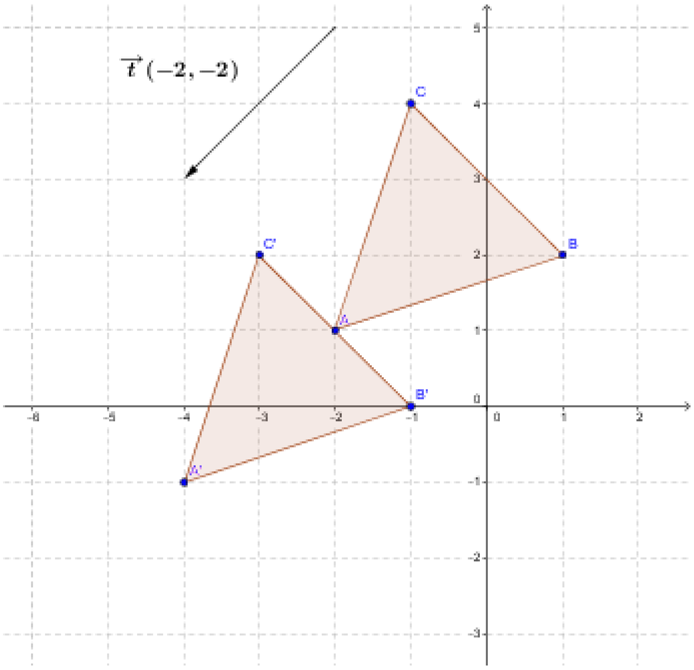
$$\begin{bmatrix} 1-2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} -1-2 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient les mêmes coordonnées si on utilise la matrice de transformation de 3 lignes et 2 colonnes.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

On obtient le schéma suivant:



Réflexion par rapport à l'axe des abscisses

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une réflexion s par rapport à l'axe des abscisses notée s_x, on applique la transformation suivante:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont les points $A=(1,1)$,$B=(-2,3)$ et $C=(2,4)$. On veut effectuer une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

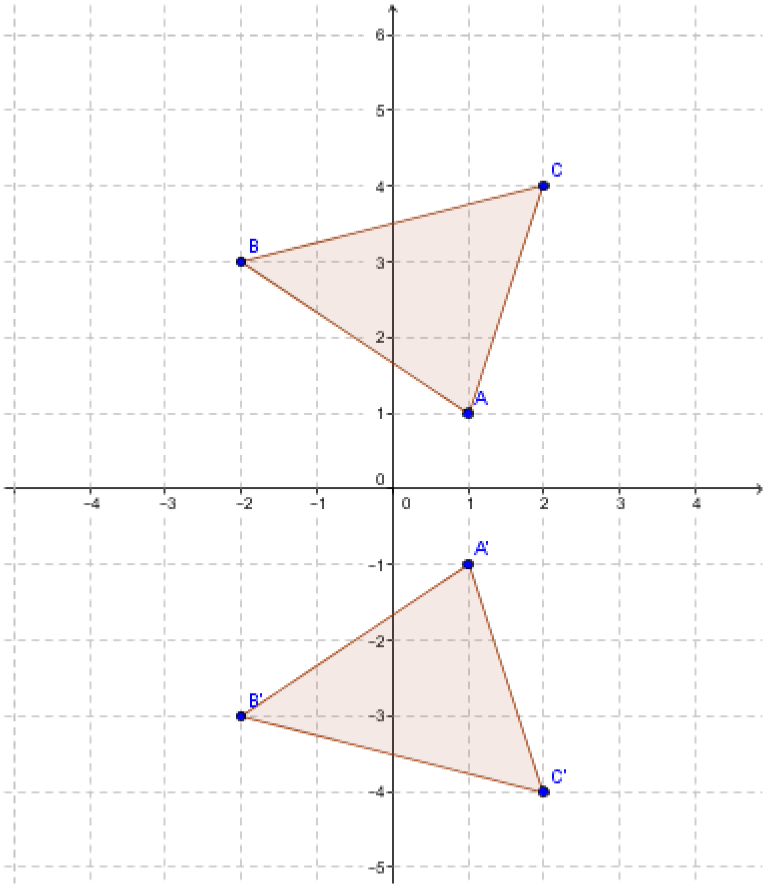
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



Réflexion par rapport à l'axe des ordonnées

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une réflexion s par rapport à l'axe des ordonnées notée s_y, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont A=(2,3), B=(3,1), C=(5,2) et D=(5,5). On veut effectuer une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

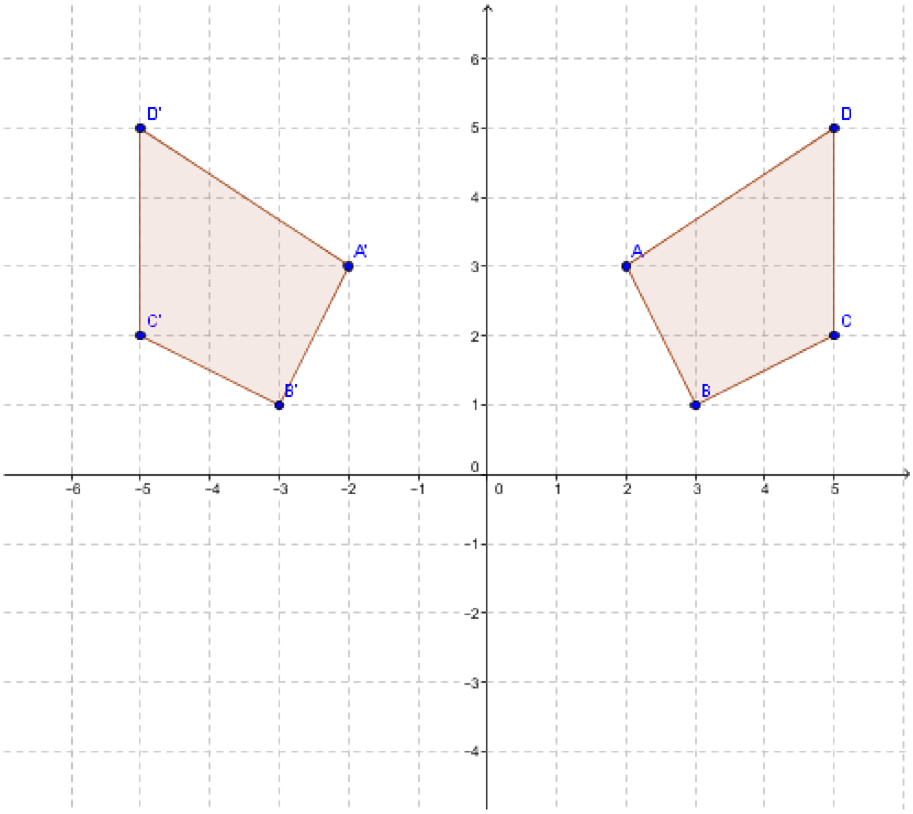
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = C'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = D'$$

On obtient le schéma suivant:



La rotation de 90 degrés centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une rotation r d'un angle de 90 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-3,3), B=(-1,0)$ et $C=(2,4)$. On veut effectuer une rotation centrée à l'origine dont l'angle est de 90 degrés dans le sens anti-horaire.

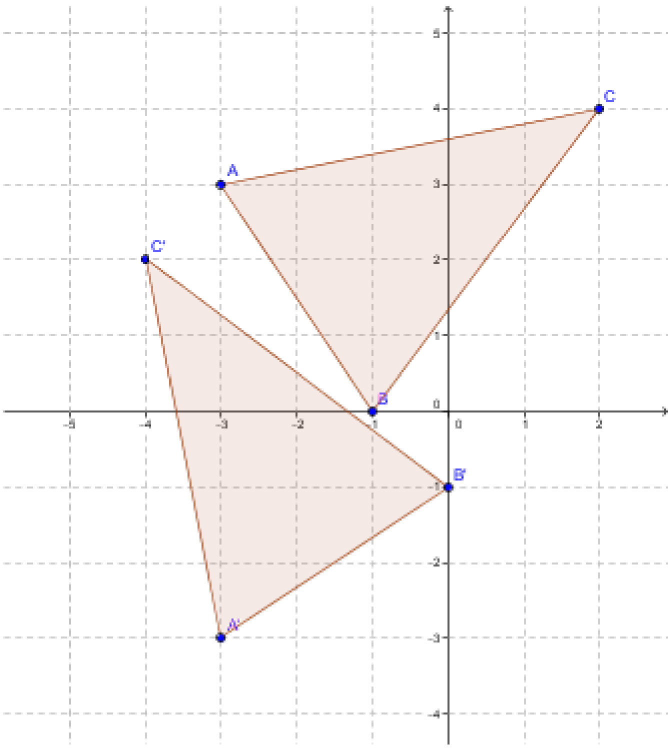
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



La rotation de 180 degrés centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une rotation r d'un angle de 180 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-4,1)$,$B=(1,-2)$ et $C=(3,3)$. On veut effectuer une rotation centrée à l'origine dont l'angle est de 180 degrés dans le sens anti-horaire.

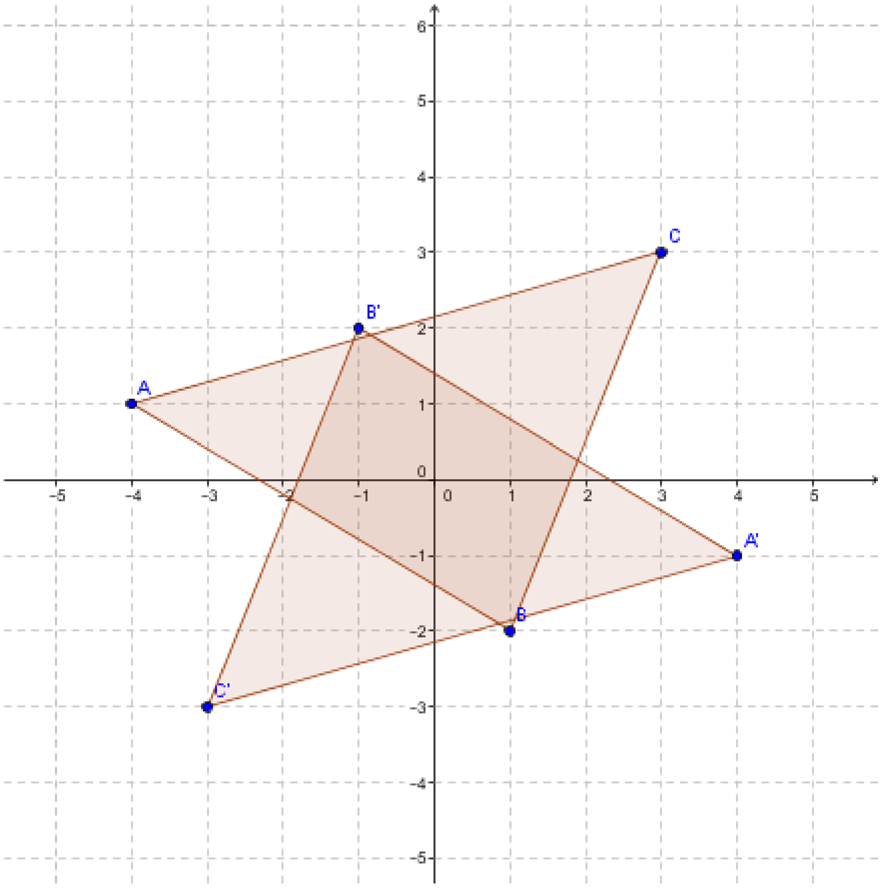
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



La rotation de 270 degrés centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une rotation r d'un angle de 270 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-4,1), B=(1,-2)$ et $C=(3,3)$. On veut effectuer une rotation centrée à l'origine dont l'angle est de 270 degrés dans le sens anti-horaire.

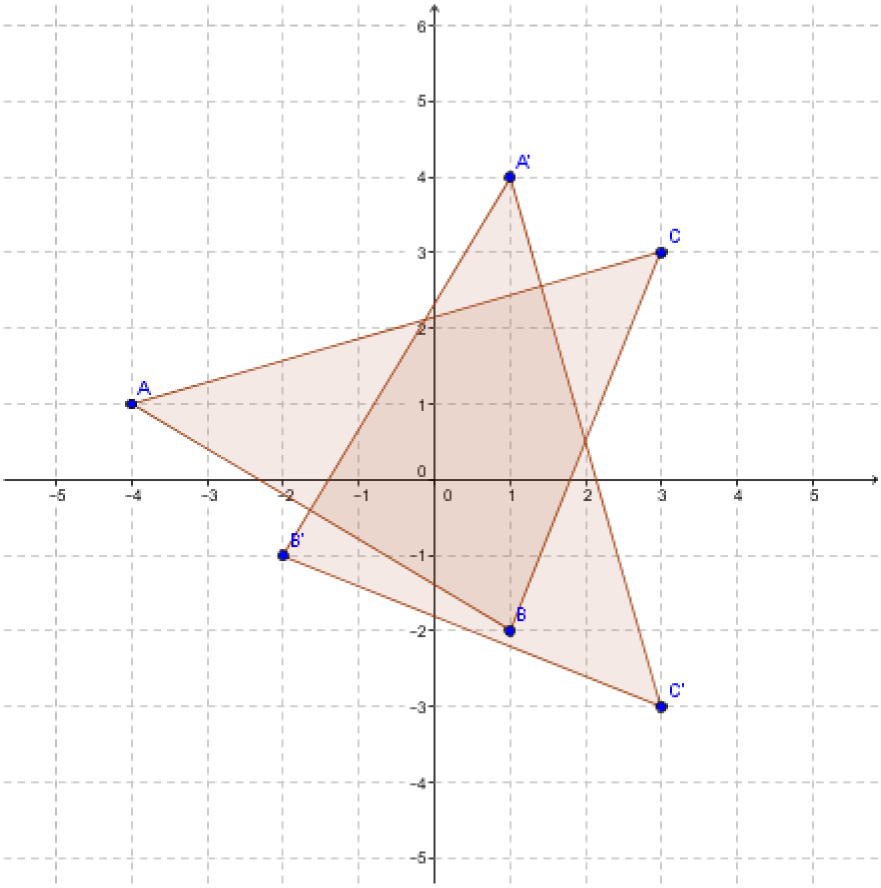
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



L'homothétie de rapport k centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une homothétie h centrée à l'origine de rapport k, on applique la transformation suivante:

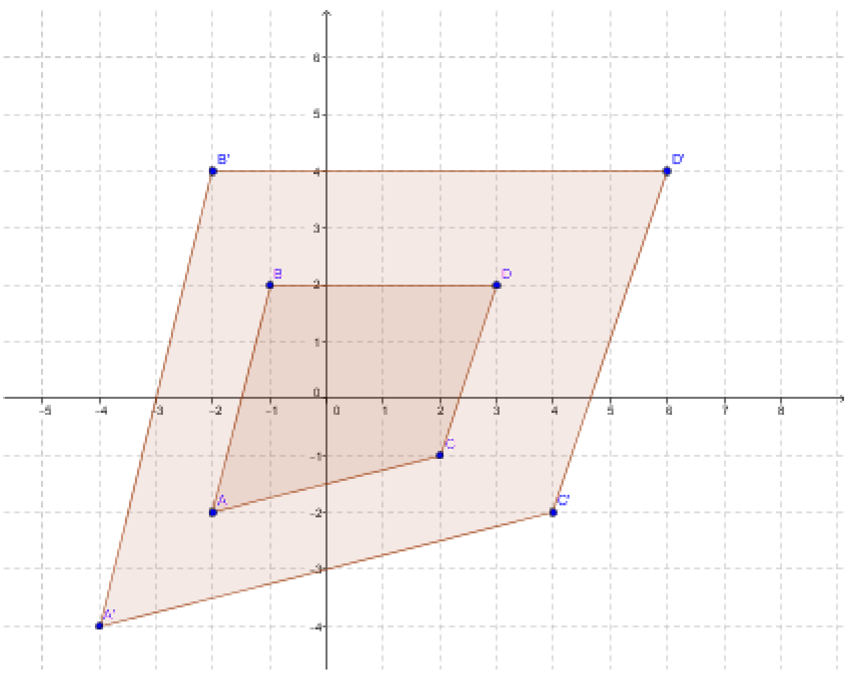
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A=(-2,-2)$, $B=(-1,2)$, $C=(2,-1)$ et $D=(3,2)$. On veut effectuer une homothétie centrée à l'origine de rapport $k=2$.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = A'$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = B'$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = C'$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = D'$$

On obtient le schéma suivant:



Les compositions de transformations géométriques

Pour effectuer une composition de transformations géométriques, on applique chaque transformation géométrique l'une après l'autre en commençant de gauche à droite. Par exemple pour $Sx \circ Sy$, il faut effectuer Sy puis ensuite Sx.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(1,1)$,$B=(2,4)$ et $C=(3,3)$. On veut effectuer une réflexion par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une rotation d'un angle de 270 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine.

On note ceci $r_{270} \circ s_x$.

On effectue la réflexion par rapport à l'axe des abscisses:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

On obtient alors:

$A' = (1, -1)$, $B' = (2, -4)$ et $C' = (3, -3)$.

Ensuite, on effectue la rotation d'un angle de 90 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

On obtient alors:

$A'' = (-1, -1)$, $B'' = (-4, -2)$ et $C'' = (-3, -3)$.

On obtient le schéma suivant: