CHAPITRE 1

DYNAMIQUE DU SOLIDE

1.1. Rappels

1.1.1. Point matériel

Un point matériel est objet matériel dont les dimensions spatiales sont négligeables par rapport aux échelles du mouvement.

1.1.2 Corps solide

Est un ensemble de points matériels lies entre eux et caractérisés par les distances mutuelles qui restent constantes (ne subit pas de déformation)

1.1.3 Relativité du mouvement

Pour bien comprendre le concept de la relativité du mouvement prenant l'exemple suivant :
Un Train roule lentement, deux personnes A et B sont assis dans le train, une troisième personne C qui est au bord de la route reste immobile (Fig. 1.1)

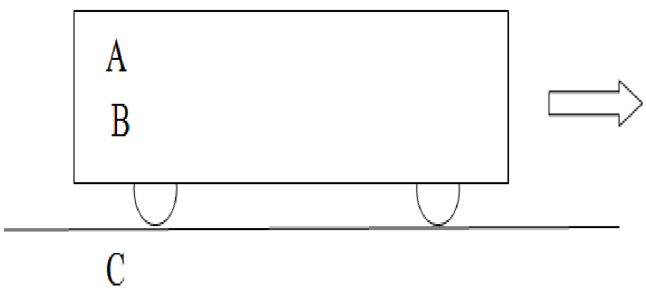

Fig. 1.1 Relativité du mouvement

A par rapport à B est immobile et par rapport à C est en mouvement, donc, la personne A est en mouvement et immobile à la fois. Alors, le mouvement d'un corps ne peut être étudié que par rapport à un solide de référence (référentiel). L'état de mouvement ou de repos d'un corps dépend du référentiel choisis. On dit que le mouvement d'un système est relatif au référentiel choisis. Le référentiel est un système de coordonnées permettant de situer un événement dans l'espace et dans le temps. Le référentiel est l'emplacement de l'observateur et il est constitué idéalement d'un **repère d'espace** et d'un **repère de temps**.

1.1.3.1 Repère d'espace

Les solides étudiés évoluent dans un espace physique qui peut être modélisé par un espace caractérisé par un repère de coordonnée orthonormé direct $R(O\vec{x},\vec{y},\vec{z})$(Fig. 1.2).

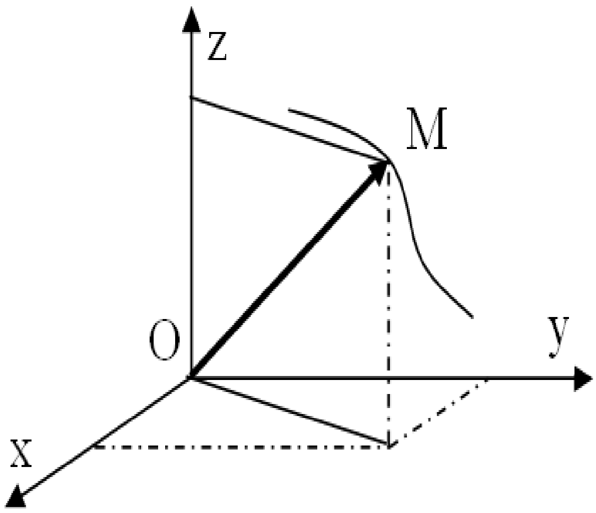

Fig. 1.2. Repère d'espace

Le mouvement d'un corps solide dans un référentiel est déterminé à l'instant *t* par la vecteur position comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{\jmath} \tag{1.1}$$

1.1.3.2 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse à l'instant *t* est défini par :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{1.2}$$

1.1.3.3. Vecteur accélération

Le vecteur accélération instantanée est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (I.3)$$

Exemple :

Décrire le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération d'un point M à l'instant *t* =2 s, déterminé par :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} 2t \\ t^2 + 3t - 1 \\ t + 1 \end{cases}$$

Solution :

Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = 2t\,\vec{\imath} + (t^2 + 3t - 1)\vec{\jmath} + (t + 1)\vec{k} \;\; = \; 4\,\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Vecteur vitesse

$$\vec{V} = 2\,\vec{\imath} + (2t + 3)\vec{\jmath} + \vec{k} \;\; = \; 4\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Vecteur accélération

$$\vec{a} = 2\vec{\jmath}$$

1.2. Mouvement d'un solide

La cinématique est une partie de la mécanique qui traite le mouvement mécanique uniquement de point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué ce mouvement. La cinématique étudie alors le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut être fait que par rapport à un référentiel où l'on pourrait déterminer la position du corps mobile

1.2.1. Mouvement de translation et mouvement de rotation

1.2.1.1. Mouvement de translation

Un solide possède un mouvement de translation si tous les points de ce solide se déplacent au même vecteur vitesse instantanée (Fig. 1.3).

$$\overrightarrow{v_A}(t) = \overrightarrow{v_B}(t) \tag{I.4}$$

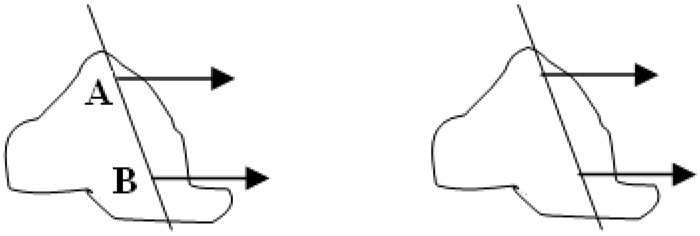

Fig. 1.3. Mouvement de translation

1.2.1.2. Mouvement de rotation

Un solide tourne autour d'un axe fixe(Δ) si tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe (Fig. 1.4).

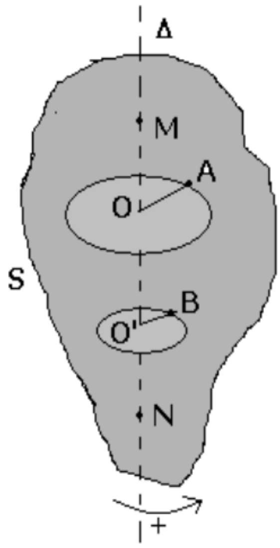

Fig. 1.4. Rotation autour d'un axe fixe

Dans un mouvement de rotation, la position d'un point M du solide à l'instant *t* est repérée par l'abscisse angulaire (Fig. 1.5)

$$\theta(t) = (\overrightarrow{OM_0, OM}) \tag{I.5}$$

Et l'abscisse curviligne :

$$S(t) = \widehat{M_0M} \tag{I.6}$$

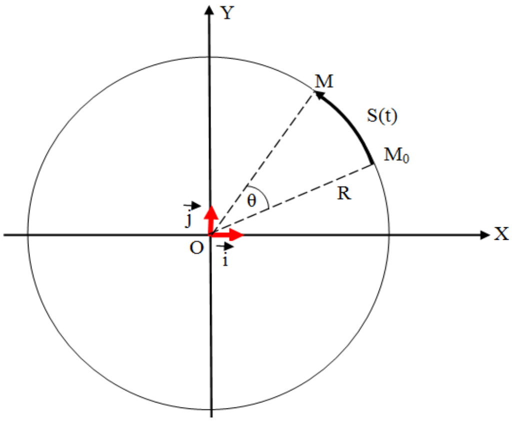

Fig. 1.5. Mouvement de rotation

Caractéristiques du mouvement de rotation : Le mouvement de rotation se caractérise par

- Tous les points décrivent des trajectoires circulaires par rapport à l'axe de rotation
- Tous les points ont le même déplacement angulaire θ à l'instant t.

Exemple :
Un observateur est assis dans un train. Dans chacun des cas suivants, appliquer la troisième loi de Newton, c'est-à-dire pour une masse m abandonnée sur le plancher du train, déterminez l'accélération et la force résultante par rapport à un système de référence fixe et, si possible, par rapport à un système de référence lié au train:

a) le train accélère uniformément sur une voie rectiligne;
b) le train roule à une vitesse constante sur une voie rectiligne;
c) avec une vitesse linéaire constante, le train parcourt une courbe dont le rayon de courbure est constant;
d) le train décélère uniformément sur une voie rectiligne;
e) le train est au repos.

1.3. Mouvement plan

Lorsqu'un solide est en mouvement plan, tous les points se déplacent dans des plans parallèles à un plan de référence. Une translation (plane) et une rotation d'axe sont des mouvements plans particuliers. L'étude du mouvement plan peut se faire selon deux approches différentes. Prenons l'exemple suivant de l'échelle qui glisse en A avec une vitesse $\vec{V}_A$ en B avec une vitesse $\vec{V}_B$ (Fig. 1.6).

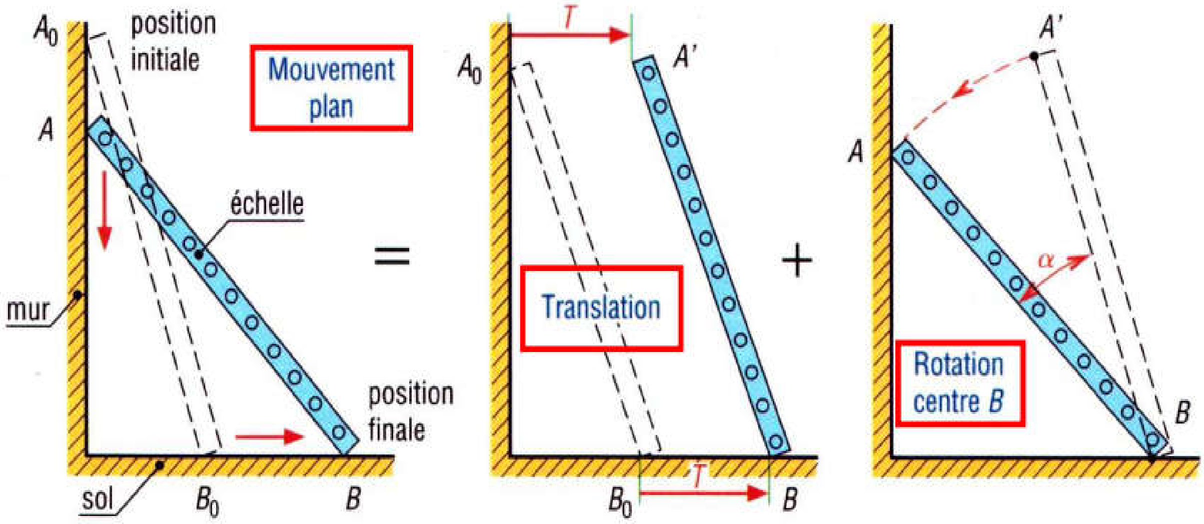

Fig. 1.6 Mouvement plan

L'échelle décrit un mouvement plan par rapport à l'ensemble (sol + mur). Pour passer de la position initiale (A_0, B_0) à la position finale (A,B), on peut faire une translation (T) amenant A_0 en A' et B_0 en B suivie d'une rotation d'axe B, d'angle α, amenant A' en A.

1.3.1. Equiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide. Abordée à l'occasion des mouvements plans, elle est également vérifiée pour des mouvements quelconques de solides dans l'espace. Soit A et B deux points d'un solide en mouvement plan quelconque (Fig. 1.7). En traduisant que la distance [AB] est constante, nous obtenons la relation :

$$\vec{V}_A.\overrightarrow{AB} = \vec{V}_B.\overrightarrow{AB} \qquad (1.7)$$

Nous obtenons alors

$$V_A cos\alpha = V_B cos\beta \qquad (1.8)$$

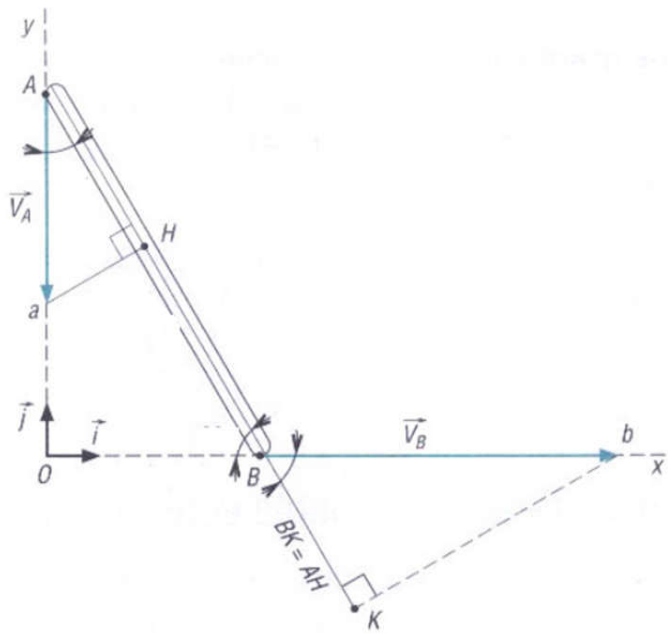

Fig. 1.7 Equiprojectivité

1.3.2. Centre instantané de rotation : CIR

A chaque instant du mouvement plan d'un solide, il existe un point I de ce plan, et un seul, ayant une vitesse nulle, ce point est appelé centre instantané de rotation (C.I.R.). Soient deux points A et B appartenant à (S) en déplacement par rapport à R_O.

- Le centre instantané de rotation se trouve à chaque instant sur la normale à la trajectoire T_A d'un point quelconque $A_{(\in R/Ro).}$
- Il est situé également sur la normale à la trajectoire TB d'un point quelconque $B_{(\in R/RO).}$ ⇒ Le C.I.R. se trouve donc à l'intersection des normales aux vecteurs vitesses $\vec{V}_{A\in R/R0}$ et $\vec{V}_{B\in R/RO}$. Il permet de déterminer graphiquement la vitesse d'un point quelconque de (S) à l'instant t, à partir d'une vitesse connue.

Exemple :

Une barre de longueur AB=3m glisse en A avec une vitesse de 0.5 m/s (Fig. 1.8)

- Déterminer par calcul et par la méthode graphique (C.I.R) la vitesse en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol

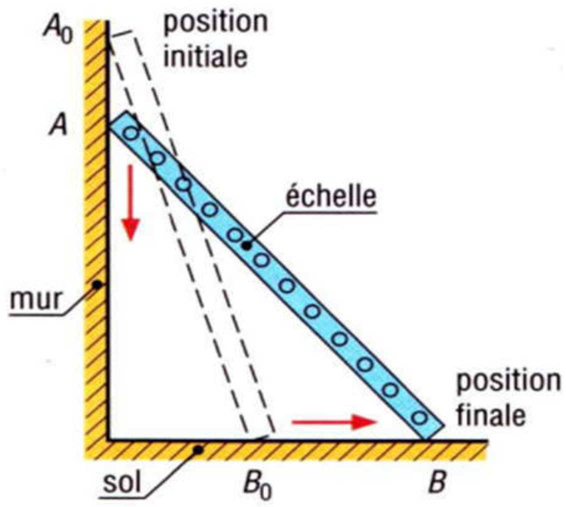

Fig. 1.8 Glissement d'une barre dans un plan

1.4. Angles d'Euler

Le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel fait intervenir 6 paramètres, qui sont les trois coordonnées décrivant la position de son centre de masse (ou d'un point quelconque du solide) et trois angles, nommés les angles d'Euler. Les angles d'Euler peuvent servir à représenter l'orientation d'un solide par rapport à un repère fixe. Ils sont utilisés pour la construction du vecteur rotation instantané du solide, nécessaire à l'étude de sa cinématique. L'objectif est de passer du référentiel fixe Oxyz (le repère de navigation) au référentiel lié au solide O'x'y'z'(le repère mobile) par trois rotations successives :

- La précession : première rotation autour de l'axe OZ du repère fixe « Précession » (Fig. 1.9).
- La nutation : seconde rotation autour de l'axe OX1 nouvellement créé « Nutation » (Fig. 1.10).
- La rotation propre, dernière rotation autour de l'axe OZ', créé suite au deux premières rotations « Rotation » (Fig. 1.10).

La première rotation autour de l'axe OZ peut être décrite par le système

$$\left(\begin{cases} X = X1.cox(\psi) - Y1.\sin(\psi) \\ Y = X1.\sin(\psi) + Y1.\cos(\psi) \\ Z = Z1 \end{cases}\right. \qquad (1.9)$$

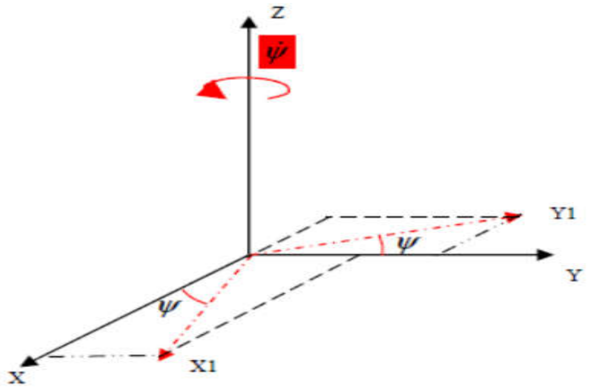

Fig. 1.9 Précession

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Donc, les matrices de transformation

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0) & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

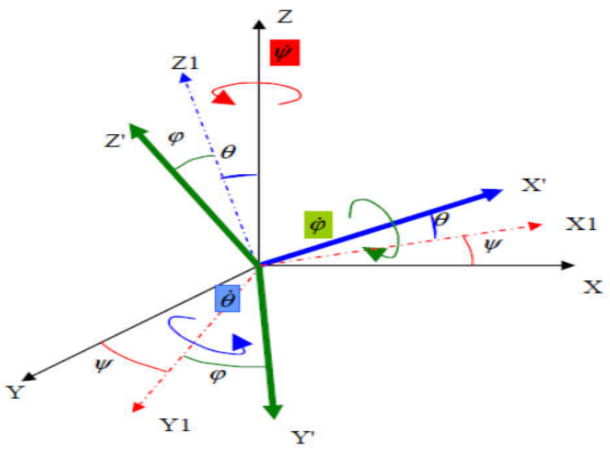

Fig. 1.10. Angles d'Euler

Alors la matrice produit est M=A.B.C

1.5. Mouvement d'un solide dans l'espace

Positionner un solide dans l'espace par rapport à un référentiel revient à positionner le repère lié au solide par rapport au repère lié au référentiel.

1.5.1 Vecteur vitesse

Soit O le point fixe du mouvement. On note T(OXYZ) un repère cartésien lié au référentiel dans lequel le mouvement du solide est étudié ; on l'appellera repère d'espace. On définit également un repère mobile lié au solide $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ (Fig.1.11).

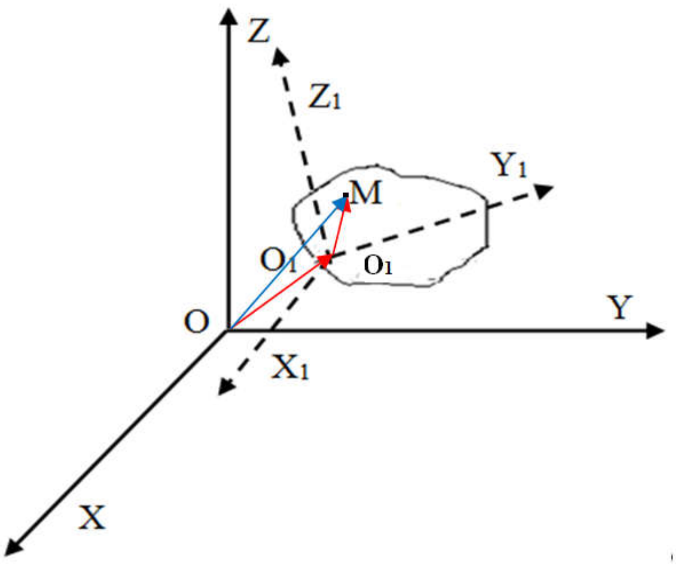

Fig. 1.11 Repères du solide dans l'espace

Les coordonnées d'un point M du solide est donnée par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + x_1\overrightarrow{\iota_1} + y_1\overrightarrow{J_1} + z_1\overrightarrow{k_1} \qquad (1.14)$$

En dérivant l'expression (1.14), nous obtenons le vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V(M)}=\underbrace{\vec{V}(O_1) + x_1\frac{d\overrightarrow{\iota_1}}{dt} + y_1\frac{d\overrightarrow{J_1}}{dt} + z_1\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}}_{(1)}+\underbrace{\dot{x}_1\overrightarrow{\iota_1} + \dot{y}_1\overrightarrow{J_1} + \dot{z}_1\overrightarrow{k_1}}_{(2)} \qquad (1.15)$$

Le terme (1) représente la vitesse du $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ par rapport au repère T(OXYZ) ce terme est appelé la vitesse d'entrainement notée par $\overrightarrow{V_e}$, et le terme (2) représente la vitesse du point M du solide par rapport au repère $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ appelée aussi la vitesse relative notée par $\overrightarrow{V_r}$, ainsi on obtient la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$, définie comme suit :

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r} \tag{1.16}$$

1.51. Vecteur accélération

En dérivant l'expression du vecteur vitesse (1.15), nous obtenons le vecteur accélération

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}(O_1) + x_1\frac{d^2\vec{\imath_1}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{\jmath_1}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k_1}}{dt^2}}_{(1)} + \underbrace{\ddot{x}\vec{\imath_1} + \ddot{y}\vec{\jmath_1} + \ddot{z}\vec{k_1}}_{(2)} + \underbrace{2\left(\dot{x}_1\frac{d\vec{\imath_1}}{dt} + \dot{y}_1\frac{d\vec{\jmath_1}}{dt} + \dot{z}_1\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right)}_{(3)} \tag{1.17}$$

Le terme (1) représente l'accélération du $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ par rapport au repère T(OXYZ) ce terme est appelé accélération d'entrainement notée par $\overrightarrow{a_e}$, et le terme (2) représente l'accélération du point M du solide par rapport au repère $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ appelée aussi la accélération relative notée par $\overrightarrow{a_r}$, et le terme (3) appelée accélération de **Coriolis ou accélération complémentaire** est un terme d'accélération qui intervient lorsque l'on étudie le mouvement d'un corps se déplaçant dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen cette accélération est notée $\overrightarrow{a_c}$. Alors l'accélération absolue$\overrightarrow{a_a}$, est comme suit :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} \tag{1.18}$$

1.6. Mouvement à force centrale

1.6.1. Force centrale

1.6.1.1. Définition

Une force centrale, est une force qui agit sur un point matériel M et possédant les propriétés suivantes :

- Sa ligne d'action passe par un point fixe O dit, centre de la force centrale (Fig. 1.12).
- Sa valeur ne dépond que de la distance entre le point O et le point M

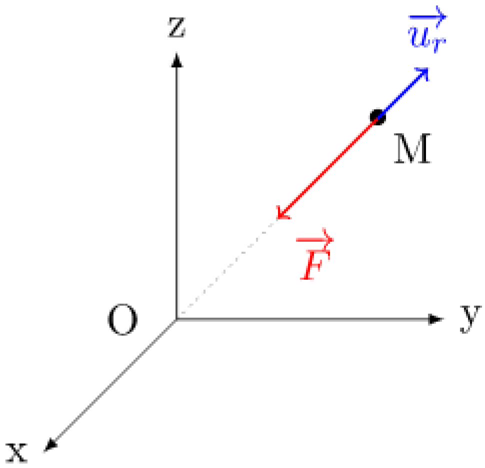

Fig. 1.12 Force centrale

Cette force est conservative (le calcul de son travail ne dépend pas du chemin suivi), elle dérive donc d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = f(r)\,\vec{u}_r \tag{1.19}$$

Et ainsi

$$f(r) = -\frac{dE_p}{dr} \tag{1.20}$$

Si $f(r) > 0$, F est attractive, et si $f(r) < 0$, F est répulsive.

1.6.2. Equation du mouvement

En coordonnées polaires (r,θ) (Fig. 1.13), la position est donnée par la formule

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \tag{1.21}$$

Alors le vecteur vitesse $\vec{v}$ est comme suit :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \tag{1.22}$$

Ainsi le vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} \tag{1.23}$$

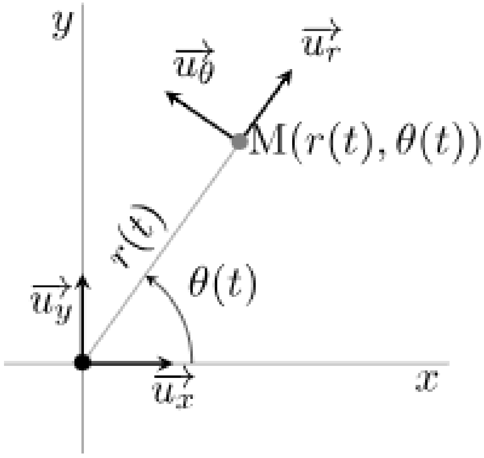

Fig. 1.13 Mouvement à force centrale en coordonnées polaires

D'où l'expression de la force centrale :

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{u}_r = m\vec{a}=m\Big(\big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\big)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}\Big) \quad (1.24)$$

On peut conclure que

$$f(r)=m\big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\big) \quad (1.25)$$

Et

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (1.26)$$

On aura donc

$$\big(r^2\dot{\theta}\big)' = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (1.27)$$

Ce qui implique que

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = Cst = h \quad (1.28)$$

La constante *h* est appelée vitesse aréolaire

A partir des équations (1.25) et (1.28)

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{f(t)}{m} \quad (1.29)$$

Et encore

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2} \quad (1.30)$$

Donc, l'expression de l'accélération d'une force centrale est :

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}\right) \quad (1.31)$$

On remplace dans l'équation (1.26) on aura

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = \frac{r^4 f(r)}{mh^2} \qquad (1.32)$$

Si on pose $U = \frac{1}{r}$ dans l'équation (1.32), alors

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{U^2}\frac{dU}{d\theta} \qquad (1.33)$$

Et

$$\frac{dr^2}{d^2\theta} = -\frac{1}{U^2}\frac{d^2U}{d\theta^2} + \frac{2}{U^3}\left(\frac{dU}{d\theta}\right)^2 \qquad (1.34)$$

L'équation (1.32), nous conduit à la forme finale suivante :

$$\frac{dU^2}{d^2\theta} + U = -\frac{f(\frac{1}{U})}{mh^2U^2} \qquad (1.35)$$

Et c'est l'équation de Benet. En mécanique classique, les **formules de Binet** sont des expressions de la vitesse et de l'accélération d'un corps soumis à une force centrale telle que la gravitation ou un champ électrostatique. Elles permettent d'exprimer, en coordonnées polaires, la position d'un mobile en fonction de l'angle formé par celui-ci.