CHAPITRE 2

ELEMENT DE CINETIQUE

2.1. Tenseur d'inertie

2.1.1. Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un système discret et homogène par rapport à un axe Δ, est la somme des masses m_i de ce système, pondérées par leurs distances r_i *à* l'axe au carré

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2 \tag{2.1}$$

Lorsqu'on considère un corps solide qui est constitué d'une distribution continue de matière, on peut admettre qu'il est formé d'une infinité de points matériels. Cette hypothèse de continuité nous permet de remplacer la sommation $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ par une intégration et on obtient

$$I_\Delta = \int r^2 dm \tag{2.2}$$

Avec

$$dm = \rho dv \tag{2.3}$$

On aura

$$I_\Delta = \int \rho r^2 dv \tag{2.4}$$

Comme pour le calcul du centre de gravité, l'intégrale dépend de la distribution de la masse dans le solide. Selon que le solide est linéique, surfacique ou volumique, dm devient $\lambda dl,$ σds ou . Les termes dl, ds, dv sont respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume et λ, σ, ρ des densités linéique, surfacique ou volumique de masse. Pour évaluer l'inertie d'un objet non ponctuel, il faut découper l'objet en plusieurs volumes infinitésimaux de masse dm et calculer l'inertie totale I provenant de la contribution de toutes les masses infinitésimales en effectuant une sommation. Voici quelques formes de découpage infinitésimal fréquemment employées (Tableaux 2.1, 2.2 et 2.3) :

Tableau 2.1

En 1D : Densité linéaire $[\lambda]$ =kg /m et $dm = \lambda\, dl$

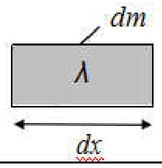
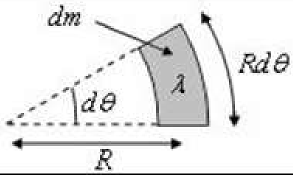
Tige : $dm = \lambda\, dx$	Tige cylindrique : $dm = \lambda\, R\, d\theta$
	

Tableau 2.2

En 2D : Densité surfacique $[\sigma]$=kg/ m^2 et $dm=\sigma ds$

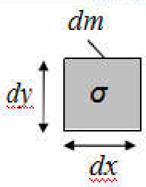
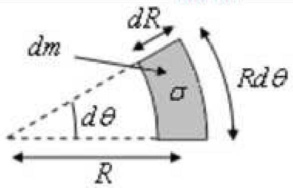
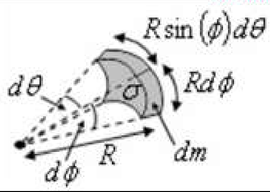
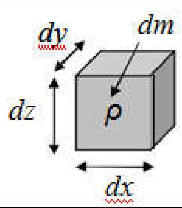
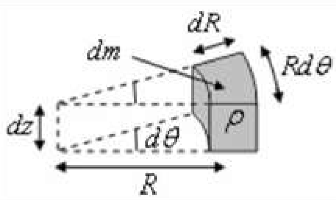
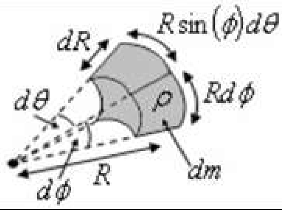
Carré : $dm = \sigma\, dx\, dy$	Carré cylindrique : $dm = \sigma\, R\, dR\, d\theta$	Carré sphérique: $dm = \sigma\, R^2 \sin(\varphi)\, d\theta\, d\varphi$
		

Tableau 2.3

En 3D : Densité volumique $[\rho]$ = kg/m^3 et $dm = \rho\, dV$

Cube[1] : $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$	Cube cylindrique[2] : $dm = \rho\, R\, dR\, d\theta\, dz$	Cube sphérique[3] : $dm = \rho\, R^2 \sin(\varphi)\, dR\, d\theta\, d\varphi$
		

Remarque : $x, y, z \in [-\infty, \infty]$ et $R \in [0, \infty]$ $\theta \in [0, 2]$ $\varphi \in [0, \pi]$

θ : Longitude θ : Axe parallèle à x φ : Axe parallèle à z

φ : colatitude « Rotation plan xy » « Rotation $+z$ à $-z$ »

Exemple :

Le moment d'inertie d'un anneau. Un anneau mince et homogène de masse *m* et de rayon *R* tourne autour d'un axe, perpendiculaire à son plan, qui passe par son centre (voir figure 2.1). Monter que son moment d'inertie est donnée par :

$I = mR^2$

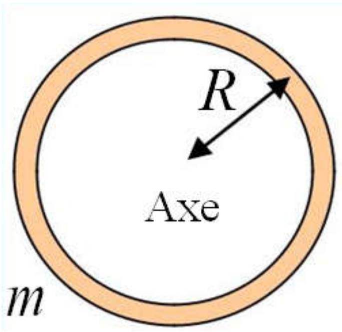


Fig. 2.1 Anneau mince

Densité linéaire :

$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{m}{2\pi R} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}m = \lambda dl = \lambda R d\theta$$

$$I = \lambda \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) R \, dl\theta = \lambda \int_0^{2\pi} R^3 \, dl\theta = \lambda 2\pi R^3 = \frac{m 2\pi R^3}{2\pi R} = mR^2$$

2.1.2. Matrice d'inertie ou tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie I_0 d'un solide au centre O d'un repère R (O, x, y, z), la matrice définit suit

$$I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{xz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

Où

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \tag{2.6}$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \tag{2.7}$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy}$

$$I_{zz} = \int (y^2 + x^2) dm \quad (2.8)$$

[1]Ce découpage s'effectue dans le système d'axe *xyz* qui porte le nom de coordonnée cartésienne.

[2] Ce découpage s'effectue dans le système d'axe *Rθz* qui porte le nom de coordonnée cylindrique.

[3] Ce découpage s'effectue dans le système d'axe $R\theta\Phi$ qui porte le nom de coordonnée sphérique

Moment d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oz}$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int (xy) dm \quad (2.9)$$

Produit d'inertie par rapport aux axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int (zx) dm \quad (2.10)$$

Produit d'inertie par rapport aux axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oz}$

$$I_{zy} = I_{zy} = \int (zy) dm \quad (2.11)$$

Produit d'inertie par rapport aux axes $\overrightarrow{Oz}$ et $\overrightarrow{Oy}$

2.1.3. Cas de symétries

Si le solide S admet un plan de symétrie matérielle, l'expression de l'opérateur d'inertie dans un repère dont deux axes sont dans ce plan, a deux produits d'inertie nuls. Si le solide S admet deux plans de symétrie perpendiculaires, l'expression de l'opérateur d'inertie dans un repère centré sur l'intersection de ces plans et dont les axes sont dans ces plans, a trois produits d'inertie nuls. Ce repère est propre pour l'opérateur d'inertie (Fig. 2.2).

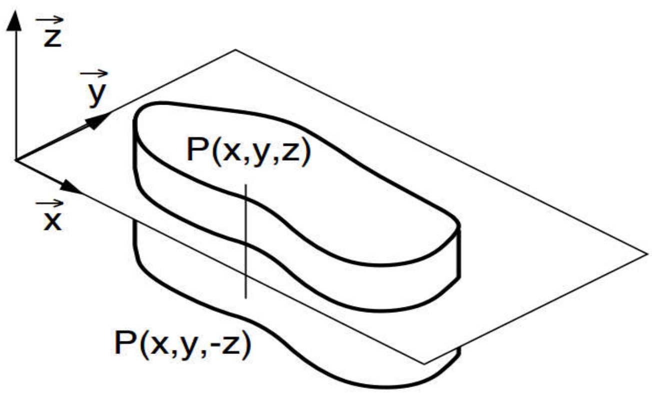


Fig. 2.2 Solide admet un plan de symétrie

Donc,

Si Oxy et un plan de symétrie on aura :

$$I_{xz} = I_{yz} = 0 \tag{2.12}$$

Car

$$z_G = 0 \tag{2.13}$$

Si Oxz et un plan de symétrie :

$$I_{xy} = I_{zy} = 0 \tag{2.14}$$

Car

$$y_G = 0 \tag{2.15}$$

Si Oyz et un plan de symétrie :

$$I_{zx} = I_{yx} = 0 \tag{2.16}$$

Car

$$x_G = 0 \tag{2.17}$$

Dans ce cas, la matrice d'inertie est diagonalisable, il existe une base orthonormée *i, j, k* dans laquelle elle est diagonale.

$$I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{vmatrix} \tag{2.18}$$

2.1.4. Enoncé du théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe **Δ'** qui ne passe pas par son centre de masse est égal au moment d'inertie de ce solide par rapport à un axe parallèle **Δ** qui passe par son centre de masse augmenté au produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à l'axe **Δ'** (Fig. 2.3).

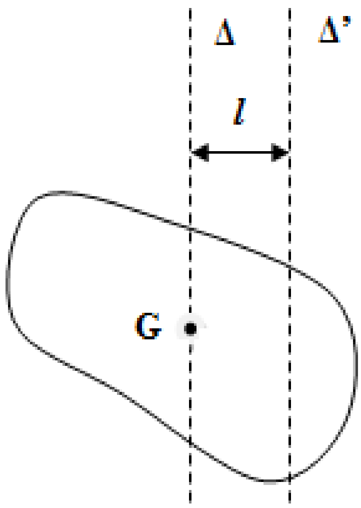


Fig. 2.3 Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe qui ne passe pas par son centre de masse

2.2. Energie cinétique d'un solide

Soit O un point quelconque d'un référentiel inertiel (R). Soit S un solide de masse *m*, de volume *V* et de masse volumique *ρ*. On considère un élément du solide *S*, de masse *dm*, de volume *dV* situ´e au point M. Soient *v* sa vitesse en translation dans (R), et *ω* sa vitesse de rotation. Son énergie cinétique *dT* s'´ecrit :

$$dE_c = \frac{1}{2}v^2 dm \qquad (2.19)$$

$$dE_c = \frac{1}{2}v^2 \rho dV \qquad (2.20)$$

On décompose la vitesse *v* en vitesse de translation et une vitesse de rotation *ω*, donc

$$dE_c = \frac{1}{2}(\mathrm{v_t} + \omega r)^2 \rho dV \qquad (2.21)$$

Par intégration sur le volume on obtient

$$E_c = \frac{1}{2}\mathrm{v_t}^2 m + \frac{1}{2}\iiint \omega^2 r^2 \rho dV + \iiint \mathrm{v_t}\, \omega r \rho dV \qquad (2.22)$$

Le premier terme est l'´energie cinétique de translation

$$E_{c_t} = \frac{1}{2}\mathrm{v_t}^2 m \qquad (2.23)$$

Le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation

$$E_{c_r} = \frac{1}{2}\iiint \omega^2 r^2 \rho dV = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint \rho\, r^2 dV = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 \qquad (2.24)$$

Le troisième terme est nul

$$\iiint \mathrm{v_t}\, \omega r \rho dV = 0 \qquad (2.25)$$

Alors, dans un référentiel inertiel, l'énergie cinétique d' un solide est la somme de l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation.

$$E_c = E_{ct} + E_{cr} \qquad (2.26)$$

Exemple :

Calculer le tenseur d'inertie du parallélogramme (voir figure 2.4 ci-dessous) suivant :

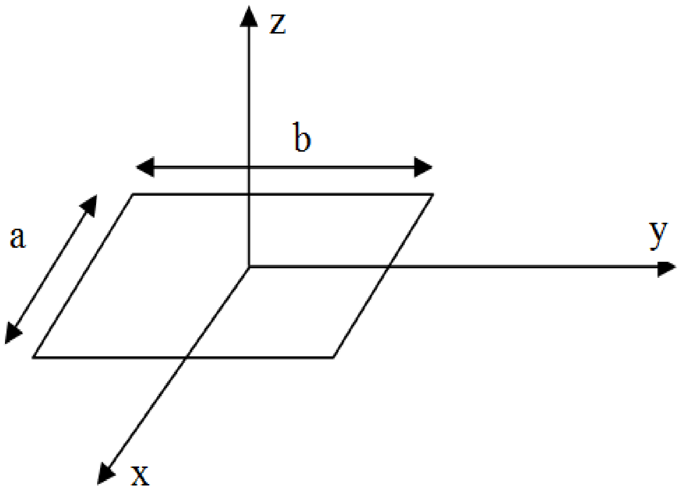


Fig. 2.4 Parallélogramme

Solution :

$$I_{xx} = \rho \iint (y^2) ds = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx = \rho \frac{b^3}{12} a$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

$$I_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{12}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & Iyy = \frac{1}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

Exemple :

Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{OZ}$ d'un tube cylindrique de rayon intérieur *r*, de rayon extérieur *R* et de hauteur *h* (Fig. 2.5).

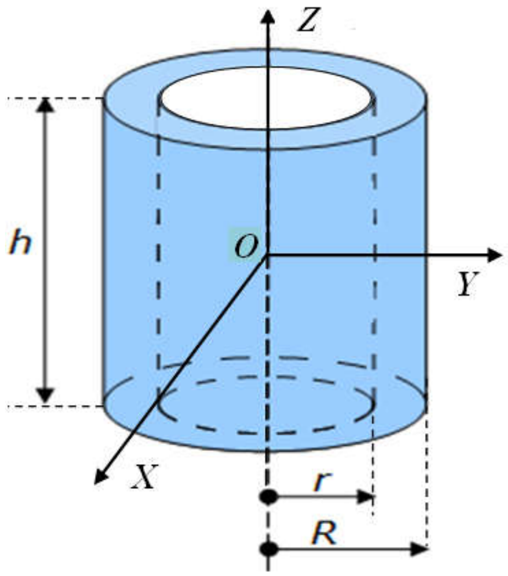


Fig. 2.5 Tube cylindrique

Solution

$$I_{zz} = \int \rho(x^2+y^2)\, dV$$

$$I_{zz} = \rho \int_r^R r^2 \int_0^{2\pi} \theta \int_{-h/2}^{h/2} r\, dz d\theta dr$$

$$I_{zz} = \rho\left[\frac{R^4}{4} - \frac{r^4}{4}\right] 2\pi h = \frac{\rho\pi h}{2}[R^4 - r^4]$$

$$I_{zz} = \frac{m\pi h}{2\pi h(R^2 - r^2)}[R^4 - r^4]$$

$$I_{zz} = \frac{m}{2}[R^2 + r^2]$$