CHAPITRE 3

NOTIONS FONDAMENTALES

3.1. Degrés de libertés

3.1.1. Introduction

Une pièce mécanique libre qui n'a aucune liaison avec d'autres pièces dans l'espace peut se déplacer selon trois axes :

- Trois mouvements de translation suivants ces trois axes.
- Trois mouvements de rotation suivants ces trois axes.

La pièce de la figure 3.1, possède six mouvements libres, on dit donc, elle possède six degrés de libertés

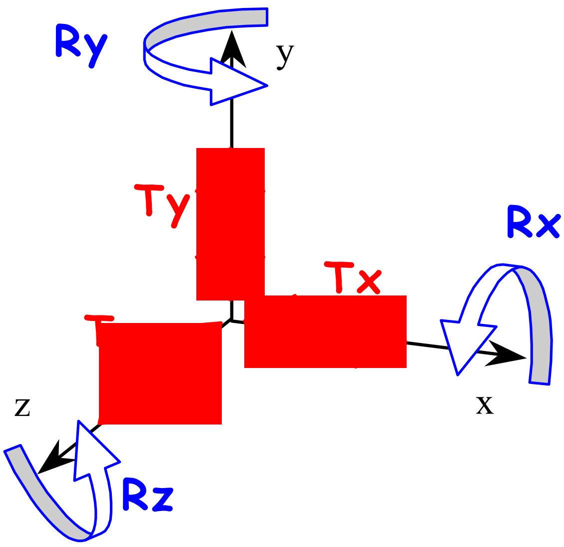


Fig. 3.1 Mouvements libres d'un solide

Un solide libre dans l'espace possède **6 degrés de liberté** :

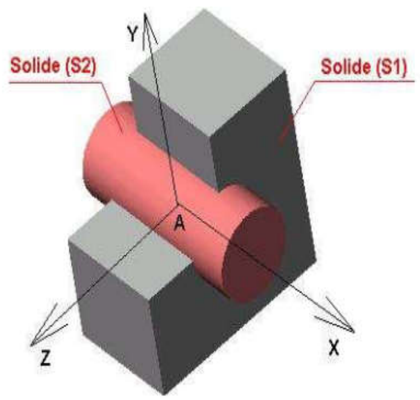
- **Translation suivant Ox**
- **Translation suivant Oy**
- **Translation suivant Oz**
- **Rotation autour de l'axe Ox**
- **Rotation autour de l'axe Oy**
- **Rotation autour de l'axe Oz**

3.1.2. Définition

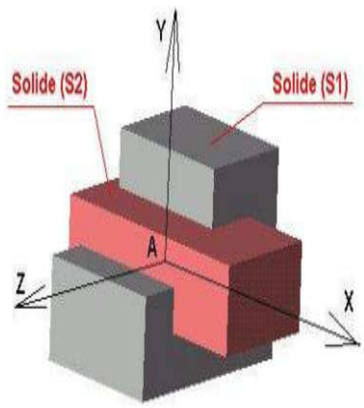
On appelle degrés de liberté *ddl*, le nombre de mouvements en rotation ou en translation libres et indépendants.

- Un point matériel libre dans l'espace possède trois degrés de libertés
- Un corps solide libre dans l'espace possède six degrés de libertés

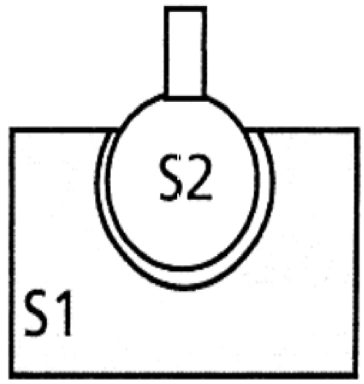
Exemple : (Fig. 3.2)



2 ddl



1 ddl



3 ddl

Fig. 3.2. Degrés de liberté

3.2. Liaison mécanique

3.2.1. Définition

Une liaison mécanique est une relation de contact entre deux pièces mécanique. Donc, une liaison n'existe que si et seulement si des surfaces de contact existent. Dans le cas général, un degré de liberté supprimé correspond à un nombre de liaison (Tableau 3.1):

Tableau 3.1

N_{bre} de degrés de liberté = 3 N – N_{bre} de liaisons (pour N points matériels)
N_{bre} de degrés de liberté = 6 N – N_{bre} de liaisons (pour N corps solides)

3.2.2. Types de liaisons mécaniques

3.2.2.1 Liaisons holonome

Une liaison holonome est une liaison géométrique qui s'exprime par des équations contenant les paramètres liés entre eux, et parfois le temps. Se défini par des relations entre les coordonnées, elle s'écrit sous la forme

$$f_k\,(x_i\,,y_i\,,z_i)=0 \tag{3.1}$$

ou

$$f_k\,(x_i\,,y_i\,,z_i,\,t)=0 \tag{3.2}$$

$i \in [1,N]$

k est le nombre de ces liaisons.

Exemple :

Un pendule simple oscillant dans le plan vertical z=0 : il y a deux liaisons holonomes (Fig. 3.3)

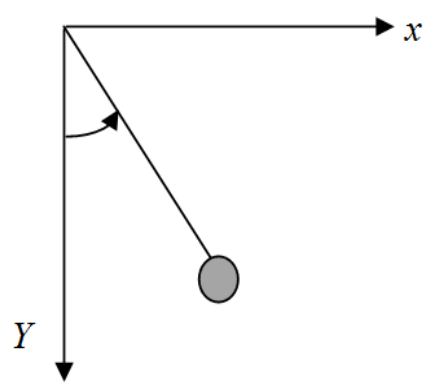


Fig. 3.3 Pendule simple

$f_1(x,y,z) = 0$ ou $x^2+y^2-l^2 = 0$

et

$z = 0$

soit ici $k = 2$ et le nombre de degrés de liberté $ddl=1$.

3.2.2.2. Liaisons non-holonome

Se sont des liaisons cinématiques, dépendantes en plus de la vitesse, c'est-à-dire sous la forme :

$$f_k\,(x_i\,,y_i\,,z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \quad (3.3)$$

ou

$$f_k\,(x_i\,,y_i\,,z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0 \quad (3.4)$$

Exemple :

Cylindre roule sans glissement sur un plan (x,y) (Fig. 3.4)

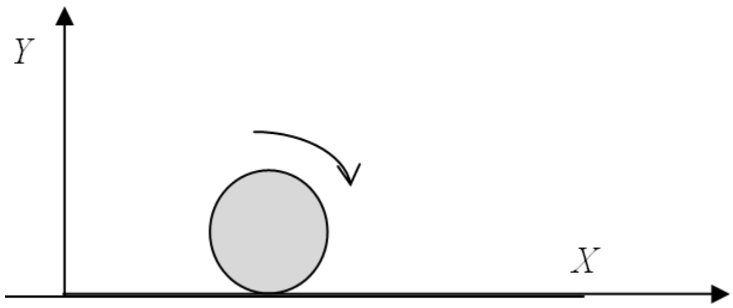


Fig. 3.4 Cylindre sur le plan (x, y)

3.2.2.3. Liaisons scléronomes et liaisons rhéonomes.

Une liaison dont l'´equation ne dépend pas explicitement du temps est dite scléronome. Dans le cas contraire, une liaison dont l'´equation dépend explicitement du temps est dite rhéonome. Donc dépend du temps.

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

elle est dite **rhéonome** ou **non-stationnaire**, si elle n'en dépend pas, elle est dite **scléronome** ou **stationnaire**

$$\frac{df}{dt} \neq 0 \tag{3.6}$$

3.2.3. Système mécanique

On appelle un système mécanique ou un système matériel, un ensemble d'objets parfaitement identifiés, pouvant être liés entre eux ou non pour assurer une fonction. L'ensemble déterminé de points matériels ou de corps solides dont le mouvement est limité par un certain nombre de liaisons, constitue un système mécanique. (Voir la figure 3.5 comme exemple). Les systèmes mécaniques se classifient selon la nature des liaisons mécaniques.

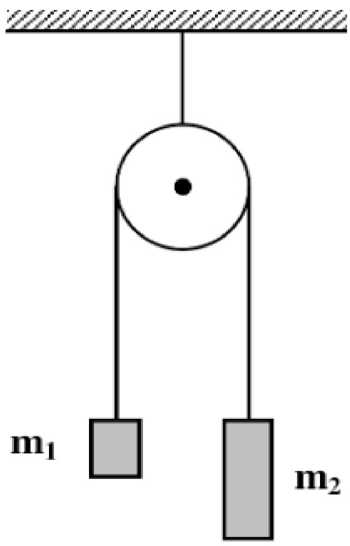


Fig. 3.5 Machine d'Atwood

3.2.4. Travail des forces de liaisons

On appelle **force de liaison** associée à une liaison donnée, la force qui ne sert qu'à maintenir cette liaison tout au long du mouvement considéré. Cette définition a pour conséquence que le travail réalisé par de telles forces est toujours nul pour des déplacements du système respectant la liaison en question. Les forces de liaison sont le plus souvent mal connues et on les détermine en fait grâce aux équations de Newton assorties des relations de liaison auxquelles elles se réfèrent. Il est facile de voir que le raisonnement précédent reste valable dans un point de vue plus général ; par conséquent, le travail élémentaire effectué par des forces de liaison est toujours nul pour des déplacements du système compatibles avec la liaison à laquelle sont associées ces forces.

3.3. Coordonnées généralisées

3.3.1. Définition

On appelle **coordonnées généralisées** d'un système mécanique un ensemble de variables réelles, qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes (par exemple : angles, positions relatives), et permettant de décrire ce système, en particulier dans le cadre de la mécanique lagrangienne. Une coordonnées généralisée est désignée par q qui peut s'identifier à une distance comme elle peut être représentée par un angle. Il est même imaginable que chaque coordonnée ait sa propre unité de mesure. A chaque degré de liberté du système mécanique on fait correspondre une coordonnée généralisée q

3.3.2. Vitesse généralisée et accélération généralisée

La vitesse généralisée est définie comme en cinématique d'un point matériel, par contre, la force et l'accélération généralisées sont définies à l'aide des déplacements virtuels dans le but de s'insérer dans la mécanique analytique qui les utilise intensément.

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \qquad (3.7)$$

Exemple :

Le mouvement d'un point matériel M dont la trajectoire est un cercle (Figure 3.6) dans le plan XOY, de centre O et de rayon R dans la base cartésienne est :

$x=R\cos(\varphi)$

$y=R\sin(\varphi)$

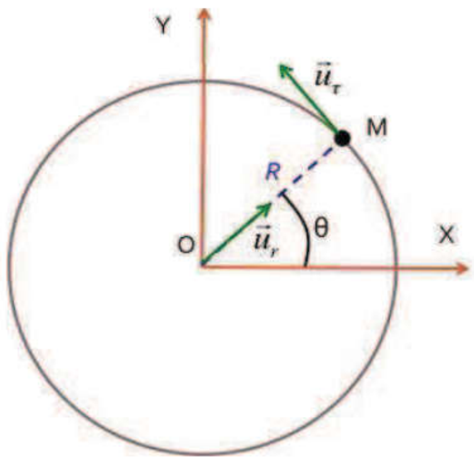


Fig. 3.6 Mouvement circulaire

Dans cet exemple, le seul degré de liberté du pendule est l'angle φ, donc le plus adapté pour représenter le système mécanique est de choisir φ comme coordonnée généralisée, alors, $\varphi = q$

3.3.3. Transformation de coordonnées

Une **transformation de coordonnées** est une conversion d'un système à un autre pour décrire le même espace. Les transformations des coordonnées n'affectent pas les équations de base décrivant un système mécanique. Les variables comme q représentent une liste de N coordonnées généralisées

$$q=(q_1, q_2, \ldots\ldots q_N) \tag{3.8}$$

Alors, la transformation est un changement de variables des N coordonnées du système aux N coordonnées généralisées, et on obtient:

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_k, \mathrm{t}) \tag{3.9}$$

Exemple :

Dans le cas du pendule simple dans un plan vertical, la masse est repérée par trois coordonnées (r, θ, z) en coordonnées cylindriques où θ est l'angle entre le pendule et l'axe y, $\theta = \arctan(x/y)$. Les 3 coordonnées sont soumises à deux contraintes:

$$r = l$$

et

$z = 0$.

Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté ; la coordonnée généralisée correspondante au système mécanique est:

$q_1 = \theta$.