CHAPITRE 4

PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

4.1. Introduction

Le principe des puissances virtuelles ou PPV est un principe fondamental en mécanique, qui postule un équilibre de puissance dans un mouvement virtuel, il s'agit d'une formulation duale du principe fondamental de la dynamique ou PFD. Il permet de retrouver certains principes ou théorèmes comme le principe fondamental de la dynamique et le théorème de l'énergie cinétique, et constitue aussi la base d'une démarche de modélisation pour les milieux continus (théorie du premier gradient, théorie du second gradient). On parle parfois du principe des travaux virtuels ou PTV qui est sensiblement le même principe

4.2. Force extérieure et force intérieure

Pour un système mécanique de *N* composants, toutes les forces agissantes :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f_i} = \vec{f} = \vec{f}_{int} + \vec{f}_{ext} \qquad (4.1)$$

4.2.1. Force extérieure

On appelle force extérieure toute force exercée sur le système par un objet n'appartenant pas au système (Force du poids dans le système mécanique défini par la machine d'Atwood de la figure 4.1).

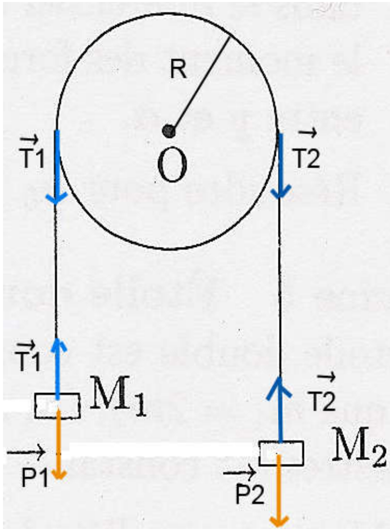

Figure. 4.1 Machine d'Atwood

4.2.2. Force intérieure

On appelle force intérieure une force exercée par une partie du système sur une autre partie du système (Force de tension dans le système mécanique défini par la machine d'Atwood de la figure 4.1).

4.2.3. Travail d'une force

Dans un référentiel galiléen, le travail $W(\vec{f})$ effectué par la force $\vec{f}$ exercée lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est

$$W(\vec{f}) = \vec{f}.d\vec{r} \tag{4.2}$$

Alors pour N forces

$$\sum_{i=1}^{N} W(\vec{f_i}) = W(\vec{f}_{int}) + W(\vec{f}_{ext}) \tag{4.3}$$

4.3. Principe des travaux virtuels

C'est un principe de la statique analytique, il décolle de la notion de déplacements virtuels $\overrightarrow{\delta r}$ et les propriétés générales des liaisons parfaites.

4.3.1. Déplacement virtuel

Un **déplacement virtuel** est correspond un déplacement théorique d'un système physique qui est atemporel (déplacement imaginaire), infinitésimal, ne respecte pas obligatoirement les forces appliquées au système, Un **déplacement virtuel** est noté $\partial\vec{r_i}$ et nécessite un temps nul

4.3.2. Déplacement réel

Un déplacement virtuel correspond à un déplacement de chaque vecteur position $\vec{r_i}$ d'une quantité $\partial\vec{r_i}$ à un instant t donné. Un déplacement réel $d\vec{r_i}$, met en jeu une translation correspondante dans le temps (ainsi qu'un éventuel travail des forces de liaison). Le principe de d'Alembert stipule donc que les seuls déplacements virtuels possibles sont ceux qui sont compatibles avec les forces (internes ou non) de liaison et donc n'engendrent aucun travail.

4.3.3. Liaison parfaite

En mécanique une liaison est dite parfaite, si le contact se fait sans frottement, c'est-à-dire la puissance dissipée par cette liaison est nulle.

4.3.4. Principe des travaux virtuels

Le système de points matériels étant en équilibre, donc il y'a égalité opposée entre les forces actives et de liaisons, et on a :

$$f_i + N_i = 0 \Rightarrow f_i = - N_i \tag{4.4}$$

Dans ce cas, quelque soit le déplacement virtuel des points du système, les travaux virtuels de ces forces sont égaux en module et opposés en direction, c.à.d.:

$$\delta W(\vec{f_i}) + \delta W(\vec{N_i}) = 0 \tag{4.5}$$

Seulement comme les liaisons sont considérées parfaites, nous avons :

$$\delta W(\vec{N_i}) = 0 \tag{4.6}$$

on peut écrire que :

$$\delta W(\vec{f_i}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{f_i}.\delta\,\vec{r_i} = 0 \tag{4.7}$$

On peut donc conclure que si un système mécanique, soumis uniquement à des liaisons parfaites, se trouve en équilibre, les forces actives qui agissent sur lui satisfont à la condition (4.4), de la on peut déduire le principe des déplacements virtuels qui s'énonce comme suit :

Principe des déplacements virtuels:

Pour qu'un système mécanique soumis uniquement à des liaisons parfaites soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires de toutes les forces actives qui lui sont appliquées pour tout déplacement virtuel du système soit égale à zéro.

Cette condition peut se traduire analytiquement en projetant dans l'expression (4.7) les déplacements virtuels possibles suivant les trois axes (x, y, z), et on aura :

$$\delta W(\overrightarrow{f_i}) = \sum_{i=1}^{N}(\overrightarrow{f_{xi}}.\delta\,\overrightarrow{r_{xi}} + \overrightarrow{f_{yi}}.\delta\,\overrightarrow{r_{yi}} + \overrightarrow{f_{zi}}.\delta\,\overrightarrow{r_{zi}})=0 \qquad (4.8)$$

Remarque

Il est important de signaler que le **P.D.V**. nous donne, sous forme générale, la condition de l'équilibre pour un système mécanique quelconque, sans nécessité d'étudier chaque corps du système de façon isolée. De plus, l'application de ce principe de ne tenir compte que des forces actives f_i et d'exclure à l'avance toutes les réactions inconnues des liaisons parfaites.

4.4. Résolution des problèmes

Dans le cas d'un système à un degré de liberté, les expressions (4.7) et (4.8) donnent immédiatement la condition d'équilibre du système. Si le système a plusieurs degrés de liberté, il faudra poser séparément les conditions (4.7) et (4.8) pour chaque déplacement indépendant du système.

Pour certains mécanismes plans, on peut, lors de la résolution des problèmes, déterminer pratiquement le nombre de degrés de liberté de la façon suivante : on suppose que le mécanisme soit en mouvement,

- si en arrêtant le mouvement de translation ou de rotation quelconque des éléments, pous arrêtons en même temps le mouvement de tout le mécanisme, on peut affirmer que ce dernier n'a qu'un seul degrés de liberté.
- Si après l'arrêt du mouvement de translation ou de rotation d'un élément du mécanisme, celui-ci continu à se mouvoir, mais s'arrête quand on retient le mouvement d'un autre élément quelconque, il a alors deux degrés de liberté, etc…

4.4.1. Etapes de résolution d'un problème

- Représenter toutes les forces actives qui agissent sur le système.
- Communiquer au système un déplacement virtuel, et bien noter les vecteurs déplacement élémentaires δr_i ou rotations élémentaires $\delta\phi_i$ aux points d'application des forces.
- Calculer les travaux élémentaires de toutes les forces actives pour le déplacement donné à l'aide des formules :

Pour les déplacements

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f}.\,\delta\vec{r} \tag{4.9}$$

et pour les rotations

$$\delta W(\vec{f}) = M(\vec{f})\,\delta\phi_i \tag{4.10}$$

- Trouver la relation entre les grandeurs δr_i et $\delta\phi_i$ incluses dans la condition (4.8)
- Après avoir remplacé ces grandeurs dans (4.7), on obtiendra une équation qui permettra de déterminer les inconnues cherchées ou la relation qui les lies.

<u>Remarque</u> :

La relation entre les grandeurs $\boldsymbol{\delta} r_i$ et $\boldsymbol{\delta\phi}_i$ peut être obtenue directement par des considérations purement géométriques, on bien par un procédé cinématique, en déterminant la relation entre les vitesses correspondantes, linéaires V_k ou angulaires ω_k qu'auraient les éléments du système, et ensuite, il faut tenir compte des relations élémentaires :

$$\boldsymbol{\delta} r_k = V_k dt \tag{4.11}$$

et

$$\delta\phi_{\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}} dt \tag{4.12}$$

Exemple :

Pour illustrer l'application de cette première méthode (des moments), considérons à titre d'exemple le problème d'équilibre suivant :

Deux particules de masse m_1 et m_2 sont posées sur un double plan incliné sans friction et ´ sont attachées aux deux bouts d'un fil inextensible, de masse négligeable, passant par une poulie aussi caractérisée par l'absence de toute friction. Trouvez la condition d'équilibre faisant intervenir ´ les masses des particules et les pentes des deux plans (Fig. 4.2). Considérant la condition d'équilibre du fil passant par les points A, O et B, on montre aisément que

$$T_1 = T_2 \quad (4.13)$$

(cf. en écrivant ´ que le moment des forces $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{N}$ évalué par rapport au centre de la poulie est nul). Ensuite, l'application de la loi fondamentale de la statique au (x) système (s) des vecteurs extérieurs $m_1\vec{g}$, $\vec{R}_1$, $\vec{T}_1$et/ou $m_2\vec{g}$, $\vec{R}_2$, $\vec{T}_2$)

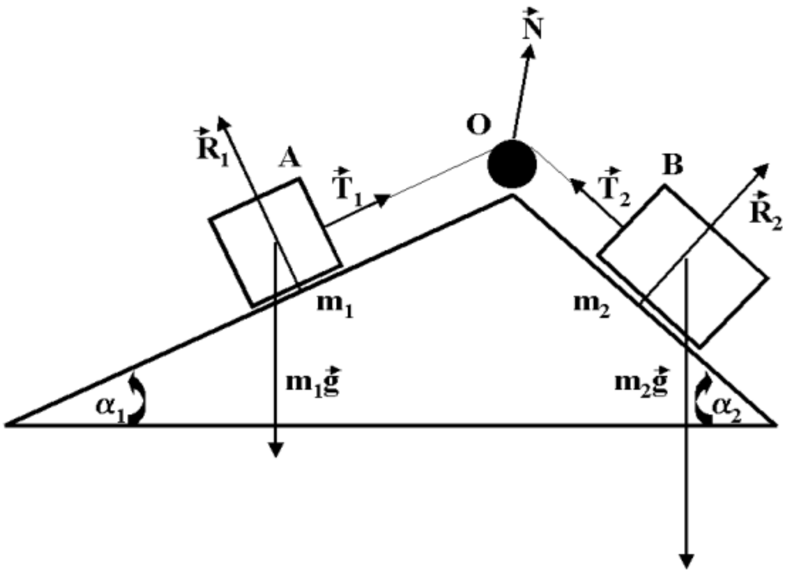

Fig. 4.2. Double plan incliné

Par la méthode des travaux virtuels, il est clair que l'on a

$$\delta W(\vec{f_i}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{f_i}.\delta \vec{r_i} = 0 \quad (4.14)$$

et par suite

$$m_1\vec{g}.\delta\vec{r_1} + m_2\vec{g}.\delta\vec{r_2} + \vec{T}_1.\delta\vec{r_1} + \vec{T}_2.\delta\vec{r_2} + \vec{R}_1.\delta\vec{r_1} + \vec{R}_2.\delta\vec{r_2} = 0 \quad (4.15)$$

on voit que la somme des travaux virtuels des forces de tension est identiquement nul, et qu'il en est de même du travail de $\vec{R}_1$ et de $\vec{R}_2$. Ainsi, les forces de liaisons sont ici les forces de tension $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ et les réactions $\vec{R}_1$ et de $\vec{R}_2$. Par contre le travail des forces de pesanteur prises individuellement n'est pas identiquement nul.

Nous trouvons facilement que :

$$m_1\vec{g}.\delta\,\overrightarrow{r_1}+m_2\vec{g}.\delta\,\overrightarrow{r_2}=m_1 g.\delta\,r_1+m_2 g.\delta\,r_2=0 \tag{4.16}$$

indépendamment du déplacement δr_1 considéré. Il en découle donc le résultat

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}=\frac{m_2}{m_1} \tag{4.17}$$