CHAPITRE 5

PRINCIPE DE D'ALEMBERT

5.1. Introduction

Le principe de d'Alembert est un principe de mécanique analytique affirmant que l'ensemble des forces de contrainte d'un système ne travaille pas lors d'un déplacement virtuel. Ce principe a été énoncé, en des termes différents, en 1743 par Jean le Rond d'Alembert dans son *Traité de dynamique ;* il a ensuite été utilisé par Joseph-Louis Lagrange dans le développement de la mécanique analytique, notamment pour redémontrer en 1788 les équations d'Euler-Lagrange à partir du principe fondamental de la dynamique.

5.1.1. Loi fondamentale de la dynamique

Considérant un système mécanique de K particules soumis à des forces, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule k de ce système s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f_{ki}} = m_k \vec{a}_k \qquad (5.1)$$

Où m_k et $\vec{a}_k$ sont la masse l'accélération du centre de masse de la particule k

La résultante des forces peut être divisée en deux parties :

- $\overrightarrow{f_{k,ex}}$ La résultante des forces extérieures sur la particule k
- $\overrightarrow{f_{k,in}}$ La résultante des forces intérieures sur la particule k

Donc on peut récrire la loi fondamentale de la dynamique pour chaque particule

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f_{ki}} = \overrightarrow{f_{k,ex}} + \overrightarrow{f_{k,in}} \quad (5.2)$$

5.2. Principe de d'Alembert

5.2.1 Equation de d'Alembert

Après la sommation de toutes les forces agissant pour le système mécanique, les forces intérieures s'annulent mutuellement (la somme des forces intérieures est nulle), la loi de Newton pour un système mécanique prend la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f_i} = \vec{f_{ex}} = m\vec{a} \quad (5.3)$$

Où m et $\vec{a}_g$ sont respectivement la masse totale et l'accélération du centre de masse de tout le système mécanique, et $m\vec{a}$ est la force d'inertie.

D'où

$$\overrightarrow{f_{ex}} - m\vec{a} = 0 \quad (5.4)$$

On obtient alors le principe de d'Alembert exprimant que pour un système mécanique, la somme des forces extérieures et les forces d'inertie sont nulles.

L'équation (5.4) peut être généralisée sur tout le système mécanique comme suit :

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{f_i} - \overrightarrow{f_{ex}}) = \sum_{i=1}^{N} (\vec{f_i} - m\vec{a}) = 0 \quad (5.5)$$

Si nous multipliant scalairement l'équation (5.5) par le vecteur de déplacement virtuel $\overrightarrow{\delta r_i}$ nous aurons l'équation de d'Alembert

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{f_i} - m\vec{a}).\overrightarrow{\delta r_i} = 0 \quad (5.6)$$

Où $\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\vec{f_i}\delta r_i}$ les travaux virtuels de toutes les forces appliquées et $\sum_{i=1}^{N} m\vec{a}.\overrightarrow{\delta r_i}$ les travaux virtuels de la force d'inertie.

5.2.2. Equation de d'Alembert en coordonnées généralisées

Soit un système mécanique de q_j coordonnée généralisée, le déplacement virtuel $\overrightarrow{\delta r_i}$ peut s'écrire

$$\overrightarrow{\delta r_i} = \frac{\partial \overrightarrow{\delta r_i}}{\partial q_j}\delta q_j \tag{5.7}$$

Pour exprimer en cordonnées généralisées les travaux virtuels d'inertie

$$m_i\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{\delta r_i} = m_i\overrightarrow{a_i}.\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_i}}{\partial q_j}\delta q_j = \overrightarrow{f_i}.\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_i}}{\partial q_j}\delta q_j \tag{5.8}$$

Alors pour un système mécanique

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\overrightarrow{f_i}.\overrightarrow{\delta r_i} - m\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{\delta r_i}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{f_i}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j - m\vec{a}_g\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_i}}{\partial q_j}\delta q_j\right) = 0 \tag{5.9}$$

Où le terme $\sum_{i=1}^{N}\vec{f_i}\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_i}}{\partial q_j}$ est appelé force généralisée Q_{ij}

$$Q_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\vec{f_i}\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_i}}{\partial q_j} \tag{5.10}$$

Donc, on peut écrire :

$$m\vec{a}_i\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j = \vec{f_i}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j \tag{5.11}$$

et

$$m\vec{a}_g\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right) - m\dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right) \tag{5.12}$$

Sachant que

$$\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{5.13}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \tag{5.14}$$

En remplaçant ces égalités dans l'équation (5.12) on obtient

$$m\vec{a}_g\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

On sait que l'énergie cinétique du système mécanique est

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \tag{5.15}$$

On introduisant la vitesse généralisée dans l'équation de l'énergie cinétique on aura

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j - m\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) \delta q_j \tag{5.16}$$

D'où on aura finalement la forme générale de l'équation de d'Alembert pour toutes les coordonnées généralisées q_j (j=1, 2, …..n)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{ij} \tag{5.15}$$

Exemple :

Soit le système mécanique suivant (Fig. 5.1) :

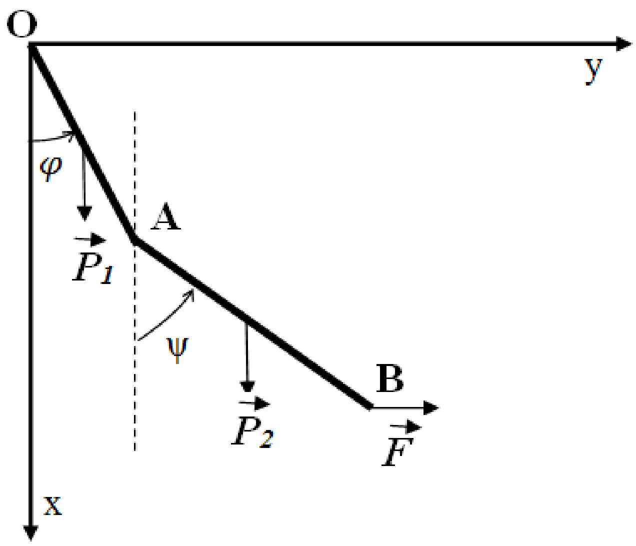

Fig. 5.1 Pendule double

Déterminer les forces généralisées du système.

Solution :

On a deux degrés de liberté ; φ et ψ

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^{2} \vec{f_k} \cdot \frac{\partial \vec{r_k}}{\partial \varphi} = P_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + P_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + f_y \frac{\partial y_3}{\partial \varphi} = f l_1 cos(\varphi) - (P_1 S_1 + P_2 l_1)\sin(\varphi)$$

$$Q_\psi = \sum_{k=1}^{2} \overrightarrow{f_k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial \psi} = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + f_y \frac{\partial y_3}{\partial \psi} = f l_2 cos(\psi) - P_2 S_2 \sin(\psi)$$

Les deux forces généralisées sont liées directement aux degrés de liberté et aux forces appliquées au système mécanique.