CHAPITRE 6

EQUATION DE LAGRANGE

6.1. Rappel

Le formalisme lagrangien, étudié ci-après, est strictement équivalent au formalisme Newtonien. Il présente cependant la particularité être construit â partir de grandeurs fondamentales scalaires (énergies), et de conduire à des équations de mouvement de forme invariante dans un changement de coordonnées généralisées.

6.2. Formalisme Lagrangien

Pour un système mécanique de q_j coordonnée généralisée, l'équation de d'Alembert s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{ij} \qquad (6.1)$$

Si la force $\vec{f_i}$ est une fonction de potentiel, alors la force généralisée est Q_{ij} lui aussi aura une fonction de potentiel, c.-à-d.

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (6.2)$$

Où U représente l'énergie potentielle

Et l'équation de d'Alembert de vient alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{6.3}$$

On définit une fonction dite la fonction de Lagrange ou le Lagrangien L comme suit

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t) \tag{6.4}$$

Si l'énergie potentielle ne dépond que de la cordonnées généralisée q, on aura donc

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{6.5}$$

Et la dérivée par rapport au temps de la relation (6.5) aura

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{6.6}$$

Et encore

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{6.7}$$

En combinant les équations (6.5) et (6.6) avec l'équation (6.4) on aura le formalisme de Lagrange suivant :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{6.8}$$

6.3. Equations de Lagrange

Dans le cas ou la force $\vec{f_\iota}$ ne dérive pas d'une fonction de potentiel, alors la force Q_{ij} est dissipative, la résultante de ces forces est en fonction de la vitesse sous la forme. :

$$\vec{f_\iota} = -\alpha\dot{\vec{q_\iota}} \tag{6.9}$$

Alors la force généralisée :

$$Q_{ij} = -\alpha \dot{\vec{q_\iota}} . \frac{\partial \overrightarrow{\delta r_\iota}}{\partial q_j} = -\alpha \left(\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_\iota}}{\partial q_j} \right)^2 \frac{\partial q_j}{\partial t} \quad (6.10)$$

On pose

$$\alpha \left(\frac{\partial \overrightarrow{\delta r_\iota}}{\partial q_j} \right)^2 = \beta \quad (6.11)$$

Pour un système **dissipatif (non conservatif**) de plusieurs degrés de liberté l'équation Lagrange prend une autre forme comme suit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\beta \dot{q}_J \quad (6.12)$$

<u>Remarque</u> : le travail virtuel de ces forces dissipatives agissant sur le système est non-nul.

6.4. Exemples d'utilisation des équations de Lagrange

Les équations de Lagrange constituent une des méthodes les plus commodes pour écrire les ´ équations du mouvement d'une large gamme de systèmes mécaniques. Les systèmes que nous `allons considérer explicitement dans la suite sont supposées posséder un potentiel indépendant ´des vitesses généralisées ; dans le cas d'une particule chargée en mouvement dans un champ électromagnétique, le potentiel correspondant est cependant généralise au sens de la section précédente. En pratique, on peut procéder comme suit : ´

1- Choisir un ensemble de *f* coordonnées généralisées ($q_1; q_2 ....; q_f$).
2- Exprimer l'énergie cinétique ´ *T*, les forces généralisées *Qi*, et le potentiel (généralisé *U* en fonction des coordonnées généralisées, de leurs dérivées premières temporelles et du temps, `et former le lagrangien $L = T - U$.
3- Substituer *L* dans les équations de Lagrange et effectuer les différentiations indiquées. ´

Parmi les avantages de cette approche, notons tout d'abord la disparition des forces de liaison inconnues, mais aussi le fait que, disposant du libre choix des coordonnées généralisées, il est possible d'utiliser intelligemment cette liberté en fonction du système particulier étudié

Exemple 1 :

Sans vitesse initiale, une masse *m* liée à un ressort élastique est écartée légèrement de sa position d'équilibre, ensuite relâchée (Fig. 6.1).

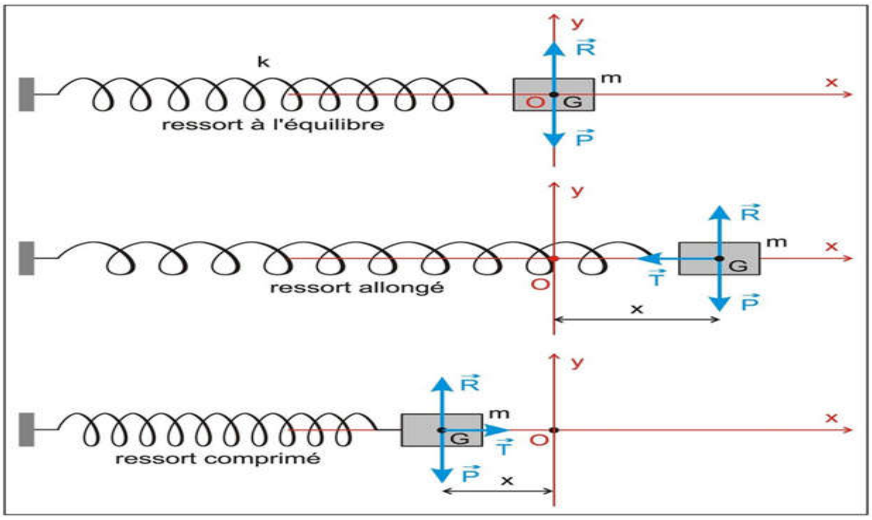

Fig. 6.1. Pendule élastique

Solution :

L'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle $U = \frac{1}{2}kx^2$

L'équation de Lagrange $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

Par dérivation on aura

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = m\ddot{x}$
- $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -kx$

Alors l'équation du mouvement est sous la forme différentielle :

$m\ddot{x} + kx = 0$

Exemple 2 :

Dans un pendule simple, la masse ponctuelle m est écartée de sa position d'équilibre d'un angle φ, ensuite relâchée (Fig. 6.2).

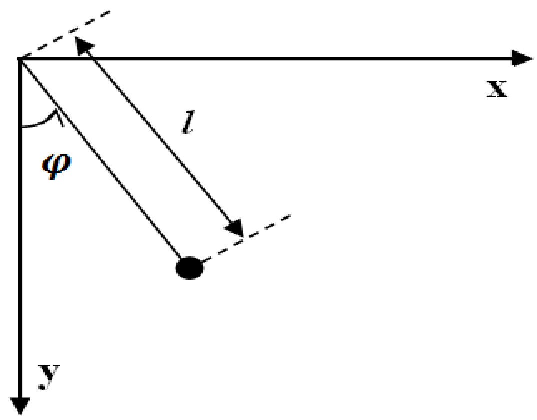

Fig. 6.2. Pendule simple

Solution :

L'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2$

L'énergie potentielle $U = mgh = mgl(1 - cos(\varphi))$

L'équation de Lagrange $L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - cos(\varphi))$

Par dérivation on aura

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = ml^2\ddot{\varphi}$
- $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -mglsin(\varphi)$

Alors l'équation du mouvement est sous la forme différentielle :

$l\ddot{\varphi} + gsin(\varphi) = 0$

Exemple 3 :

Deux points matériels A_1 et A_2 de même masse m ; sont reliés entre eux par un ressort de raideur ***k'***. Par ailleurs ; ils sont reliés à 2 supports fixes par deux ressorts ayant chacun la même raideur ***k***. l'ensemble peut coulisser sans frottements le long d'une tige horizontale fixe. On note $x_1(t)$; $x_2(t)$ les élongations respectives des points A_1 et A_2 ; comptées à partir de leur position d'équilibre où les ressorts ne sont ni allongés ni contractés (Fig. 6. 3)

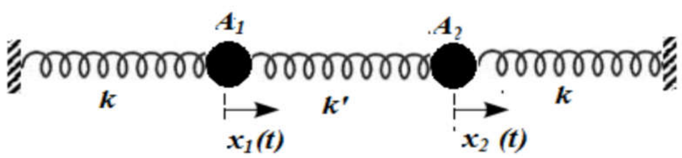

Fig. 6.3 Pendule élastique double

- Etablir les énergies cinétiques et les énergies potentielles du système.
- En déduire le Lagrangien du système.
- Déterminer les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

Solution :

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2{}^2$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx_1{}^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_3)^2 = \frac{1}{2}kx_1{}^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2)^2$$

Le Lagrangien du système est

$$L = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2{}^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_1{}^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2)^2\right)$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 + kx_1 - k'(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m\ddot{x}_2 + k'(x_2 - x_1) + kx_2 = m\ddot{x}_2 + (k - k')x_1 + k'x_2 = 0.$$