CHAPITRE 7

EQUATION DE HAMILTON

7.1. Introduction

Considérons un système mécanique à k degrés de liberté, décrit par k coordonnées généralisées. Comme précédemment, le Lagrangien $L(\dot{q}\ ,\ q\ ,\ \mathrm{t})$ est en fonction de la vitesse généralisée $\dot{q}$ du coordonnée généralisée q et du temps t, il s'écrit

$$L=T-U \tag{7.1}$$

La quantité de mouvement associe à la vitesse généralisée

$$\vec{P} = m\dot{\vec{q}} \tag{7.2}$$

Et l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2 \tag{7.3}$$

Donc on peut déduire par dérivation de l'énergie cinétique que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} = \vec{P} = m\dot{\vec{q}} \tag{7.4}$$

7.2. Formalisme de Hamilton

Ce que nous avons vu du formalisme Lagrangien suffit amplement à traiter l'ensemble des problèmes de la mécanique classique (et relativiste). L'approche de Hamilton, que nous allons développer dans la suite du cours, n'apporte rien de nouveau du point de vue du contenu physique. Mais elle offre un cadre théorique puissant, permettant une interprétation géométrique de la mécanique. C'est dans ce cadre qu'on vas définir une fonction, dite fonction de Hamilton ou tout simplement *Hamiltonien*' comme suit :

$$H=\vec{P}.\dot{\vec{q}}-L \tag{7.5}$$

Naturellement l'Hamiltonien est en fonctions des variables $\dot{q}$, q, t et $\dot{p}$ et prend la dimension d'une énergie.

En vertu des définitions (7.4) et (7.2) on obtient l'équation ´

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.6}$$

on peut avoir aussi

$$\frac{dH}{dt}=\dot{p}_i\dot{q}_i+p_i\ddot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.7}$$

l'équation (7.7) se simplifie à la manière suivante :

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{7.8}$$

si l'énergie potentielle *U* est indépendante de la vitesse généralisée, on aura donc :

$$p_i\dot{q}_i=m\dot{q}_i^{\ 2}=2T \tag{7.9}$$

Par conséquence, le formalisme Hamiltonien *H* n'est donc rien d'autre que l'énergie totale du système mécanique qu'on peut l'écrire.

$$H=T+U \tag{7.10}$$

Si le système mécanique est conservatif, en effet, le Lagrangien ne dépend pas du temps et alors :

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{7.11}$$

D'où le Hamiltonien ou l'énergie totale du système mécanique est constante.

$H=T+L=$Constate (7.12)

Exemple :

On reprend les exemples du paragraphe 6.2.1 :

pour le pendule élastique :

L'énergie cinétique

$$\boldsymbol{T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2}$$

l'énergie potentielle

$$\boldsymbol{U=\frac{1}{2}kx^2}$$

l'équation de Hamilton

$$H=\boldsymbol{\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2}$$

et

$$\frac{dH}{dt}=0$$

Alors on aura l'équation du mouvement sous la forme différentielle :

$m\ddot{x}+kx=0$

Pour le pendule simple :

l'énergie cinétique

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

l'énergie potentielle

$$U=mgh=mgl(1-cos(\varphi))$$

l'équation de Hamilton

$H=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1-cos(\varphi))$

Et

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

On aura ainsi la forme différentielle de l'équation du mouvement sous:

$$\mathbf{l\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi)=0}$$

7.3. Equation de Routh

Il est parfois utile de n'effectuer les transformations précédentes que pour certaines parties de coordonnées généralisées d'un système mécanique. Dans ce qui suit, les coordonnées qui apparaissent dans l'équation de Lagrange sont q_k nommées coordonnées positionnelles, tandis que les coordonnées qui n'interviennent pas dans cette fonction sont φ_{k+i} nommées coordonnées cycliques ou coordonnées négligeables. Il est alors naturel d'introduire la fonction de Routh

L'équation de Lagrange pour les coordonnées cycliques :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=0 \qquad (7.13)$$

Donc, la quantité de mouvement généralisée correspondante aux coordonnées cycliques est constante :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = P_{\varphi} = Cte \qquad (7.14)$$

Il est alors naturel d'introduire une fonction dite fonction de Routh

$$R=P\dot{q}-L \qquad (7.15)$$

Soit

$$L= P\dot{q}-R \qquad (7.16)$$

En introduisant l'équation (7.16) dans l'équation de Lagrange pour les coordonnées positionnelles on aura

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial R}{\partial q}=0 \qquad (7.17)$$

Et pour les coordonnées cycliques

$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -\dot{P}_{\varphi}$ (7.18)

Et

$\dot{\varphi} = \frac{\partial R}{\partial P_{\varphi}}$ (7.19)

En conclusion générale, la fonction de Routh est une fonction de Hamilton par rapport à la coordonnée q et une fonction de Lagrange par rapport à la coordonnée φ.

Exemple :

Barre prismatique de longueur l et de masse m', tourne avec une vitesse $\dot{\varphi}$ autour d'un axe vertical. Sur cette barre se déplace un point matériel de masse m, lié à un ressort (Fig. 7.1)

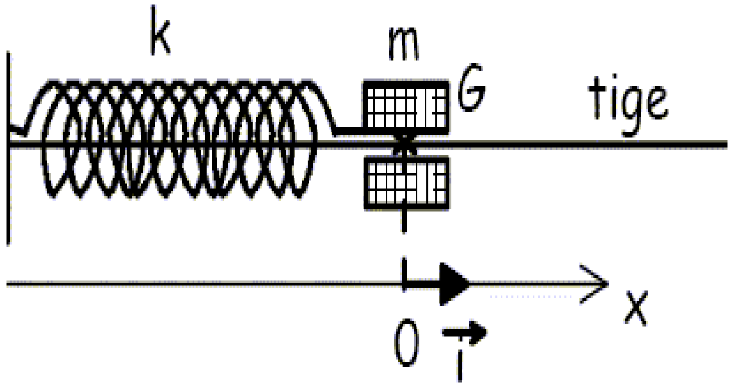

Fig. 7 .1 Basse prismatique

- Ecrire les équations d'Hamilton du mouvement du système mécanique.
- Ecrire les équations de Routh du mouvement du système mécanique

Solution :

L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{R}^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2)$

L'énergie potentielle : $U = \frac{1}{2} kx^2$

La fonction de Hamilton est : $H = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} kx^2$

La fonction de Lagrange est : $L = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) - \frac{1}{2} kx^2$

La fonction de Routh est : $H = x\dot{\varphi} - \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} kx^2$

On voit clairement que la coordonnée généralisée φ n'intervient pas dans la fonction de Hamilton, donc c'est une coordonnée cyclique.

les équations d'Hamilton du mouvement

$$P_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = (I + mR^2)\dot{\varphi}$$

et

$$P_x = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

les équations de Routh du mouvement

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I + mR^2)\dot{\varphi}$$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$