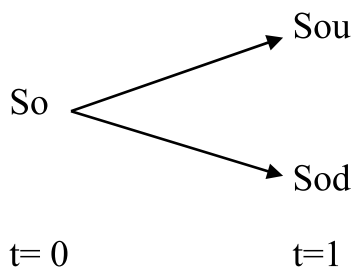
الفصل الرابع: النموذج الثنائي لقييم الخيارات I

النموذج الثنائي أو نموذج ذو الحدين هو نموذج متقطع لقييم الخيارات أعده كل من كوكس (COX) روس (ROSS) وروبينستاين (RUBINSTEIN) في بحث[1] نشر عام1979.

1.4− فرضيات النموذج:

سعر السهم في نهاية أي فترة يمكن أن يأخذ قيمتين: Sou في حالة الارتفاع وSod في حالة الانخفاض.



2.4− اشتقاق النموذج:

إشتقاق النموذج كما هو معمول به في تعسير الأصول المشتقة يعتمد على مبدأ غياب فرص المراجحة (قانون السعر الواحد).

لبناء النموذج تتبع الخطوات التالية:

أ− نشكل محفظة مكونة من: * شراء Δ أسهم

* بيع خيار شراء على هذه الأسهم

نقوم بحساب قيمة Δ بحيث قيمة المحفظة تكون نفسها في حالة ارتفاع السهم أو انخفاضه.

هذه المحفظة عديمة المخاطر وبالتالي العائد المحقق عليها هو معدل العائد الخالي من الخطر (r).

---

[1] Cox,J.C. ;Ross,S.A. and Rubinstein,M.(1979), « Option Pricing :A Simplified Approach »Journal of Financial Economics,7(3),229-263.

ب– نحسب تكلفة المحفظة في النقطة $t=0$. هذه العملية ستمكننا من الحصول على قيمة الخيار.

2.4– النموذج الثنائي لفترة واحدة:

مثال تطبيقي:

لنفرض بأننا بصدد تقييم خيار شراء على سهم تاريخ استلامه بعد 3 أشهر، سعر تنفيذه $(K)=21$، السعر الحالي للسهم 20، ومعدل العائد الخالي من الخطر يساوي 12%.

بعد 3 أشهر السهم يمكن أن يأخذ قيمتين 22 في حالة الارتفاع و18 في حالة الانخفاض.

$$\begin{array}{lll} & & Sou=22 \\ So=20 & \nearrow & fu=Max(22-21\ ;0)=1 \\ & \searrow & Sod=18 \\ & & fd=Max(18-21\ ;0)=0 \\ t=0 & & t=1 \end{array}$$

fu هو قيمة خيار شراء في تاريخ انتهاء العقد في حالة ارتفاع السعر.

fd هو قيمة خيار شراء في تاريخ انتهاء العقد في حالة انخفاض السعر.

نقوم بتكوين محفظة بشراء Δ سهم وبيع خيار شراء على هذا السهم.

في نهاية الفترة t1 (أي بعد 3 أشهر) نتحصل على النتائج التالية:

- إذا ارتفع سعر السهم إلى 22 ، قيمة المحفظة $22\Delta-1$
- إذا انخفض سعر السهم إلى 18 ، قيمة المحفظة $18\Delta-0=\Delta 18$

$$22\Delta-1 = 18\,\Delta \Longrightarrow \Delta = 0.25$$

محفظتنا تتكون من 0.25 سهم وخيار شراء مباع.لاحظ أن قيمة المحفظة ثابتة مهما كان سعر السهم في t1.

$$18x0.25=4.5 \Longleftrightarrow 22x0.25-1=4.5$$

بما أن المحفظة المكونة عديمة المخاطر (لها نفس القيمة في حالة ارتفاع سعر السهم وفي حالة الانخفاض) فإن معدل العائد على هذه المحفظة هو معدل العائد الخالي من الخطر.

القيمة الحالية للمحفظة في t=0 هي

$$4.5e^{-rt} = 4.5e^{-0.12x3/12} = 4.367$$

قيمة السهم في t=0 معروف وبالتالي فإذا رمزنا ب f لقيمة الخيار في هذا التاريخ فإن تكلفة تكوين المحفظة بنفس التاريخ هي:

$$S0\Delta\text{-}f=4.367$$

$$20x0.25\text{-}f=4.637$$

مما يستلزم أن قيمة خيار شراء على السهم المذكور هي 0.633.

3.4– تعميم النموذج:

إذا كان لدينا:

$S0u\Delta\text{-}fu$ هي قيمة المحفظة في حالة ارتفاع سعر السهم في نهاية الفترة 1.

$S0d\Delta\text{-}fd$هي قيمة المحفظة في حالة الانخفاض لنفس الفترة.

للحصول على محفظة عديمة المخاطر:

$$S0d\Delta\text{-}fd = S0u\Delta\text{-}fu$$

$$\Delta = \frac{fu - fd}{S0u - S0d}$$

لنرمز بـ r بمعدل العائد الخالي من الخطر.

القيمة الحالة للمحفظة في $t=0$ هي : $(S0u\Delta - fu)e^{-rt}$

تكلفة المحفظة في نفس التاريخ: $S0\Delta - f$ وبالتالي

$$S0\Delta - f = (S0u\Delta - fu)e^{-rt}$$

$$f = S0\Delta\,(1 - ue^{-rt}) + fue^{-rt}$$

باستبدال Δ بقيمتها في المعادلة السابقة وبعد تبسيط النتائج نتحصل على :

$$\mathbf{f = e^{-rT}\,[pfu + (1-p)fd] \qquad (1.4)}$$

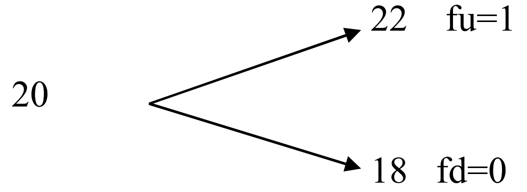
بحيث $p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d}$

P و (1-p) هي قيمة الاحتمالات المحايدة للمخاطرة.

لاحظ جيدا أن قيمة خيار f ما هي إلا القيمة الحاليةgللخيارات fu و fd مرجحة باحتمالاتها المناسبة.

<u>مثال:</u>

نطبق الصيغة المحصل عليها على معطيات التطبيق السابق.



$r=0.12$, $t= 0.25$, $d=0.9$, $u = 1.1$

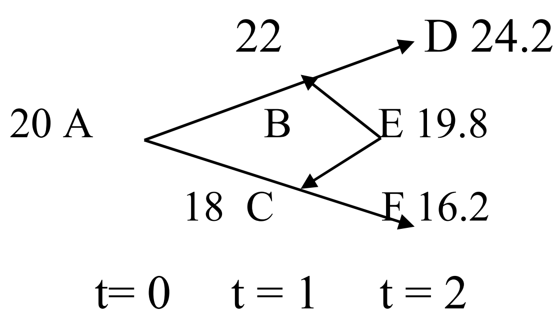
$$p=\frac{e^{0.12 \times 0.25}-0.9}{1.1-0.9}=0.6523$$

f= e-0.12 x 0.25 [0.6523 x1 + 0 x 0.3477]

= 0.633

4.4–النموذج الثنائي لفترتين:

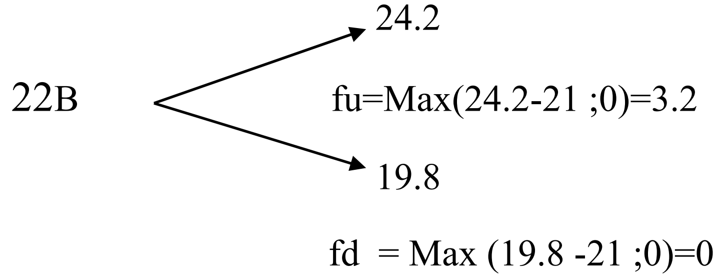
لنفرض أن أسعار سهم X Y Z ستتطور خلال الفترتين المقبلتين طول كل منهما 3 أشهر وفقا للشكل التالي:



لحساب قيمة الخيار في النقطة A أي في t=0 نقوم بتفكيك الشجرة الأصلية إلى أشجار فرعية B و C وببساطة قيمة الخيار في A ما هي إلا القيمة الحالية لمتوسط القيم المتحصل عليها في العقود B و C مرجحة باحتمالاتها.

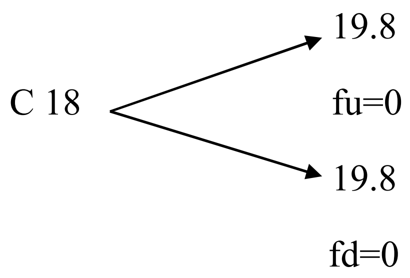
$$f A = e^{-r\Delta T}\,[pfB + (1-p)\, fC]$$

نحسب قيمة الخيار في النقطة B



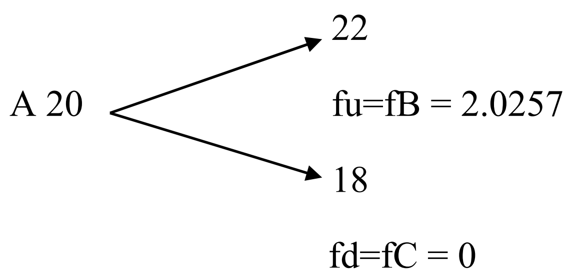
$fB = e^{-0.12x3/12}$ [0.623x3.2+0.3477x0] = 2.0257

قيمة الخيار في النقطة C:



fC= 0

قيمة الخيار في النقطة A:

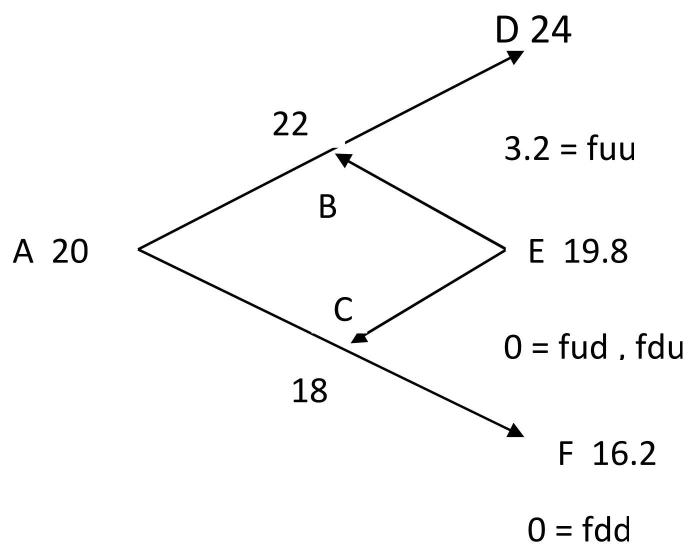


$fA = e^{-r\Delta T} [pfB + (1-p) fC]$

= e-0.12 x 3/12 [0.6523x2.0257+0.3477x0]

= 1.2823

وفي الأخير نتحصل على شجرة الخيار بالمعطيات التالية :



تعميم النتائج:

لدينا: $fu = e^{-r\Delta t}\,[pfuu+(1-p)\,dud] = fB$

$fd = e^{-r\Delta t}\,[pfud+(1-p)\,ddd] = fC$

$f = e^{-r\Delta t}\,[pfu+(1-p)\,fd] = fA$

باستبدال fu و fd بقيمتها في المعادلة الأخيرة نتحصل على :

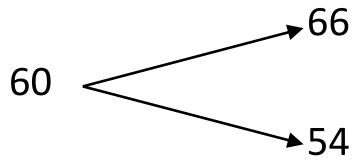
$$\mathbf{f = e^{-2r\Delta t}\,[p^2fuu+2p(1-p)\,fud+(1-p^2)fdd]} \qquad \mathbf{(2.4)}$$

أسئلة و تمارين الفصل الرابع

1- اشرح ميكانيزم تقييم الخيار عن طريق تقنية المراجحة.

2- نعتبر خيار شراء على سهم سعره حاليا في السوق مساوي 60.

أسعار هذا السهم يمكن أن تتطور خلال السداسي المقبل وفقا للشكل التالي:



المطلوب:

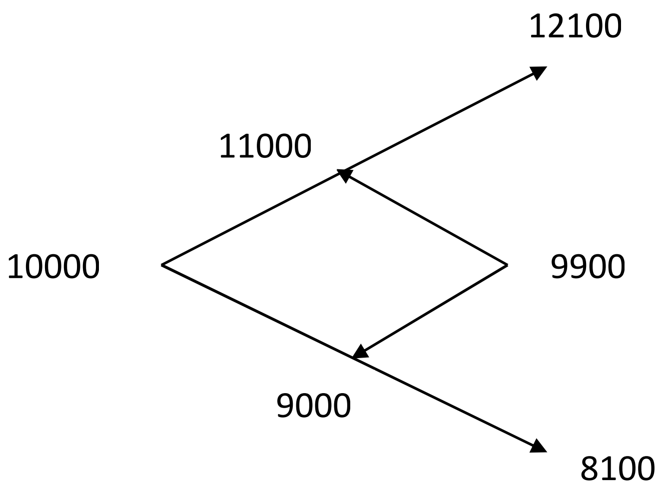
أ-حساب قيمة خيار الشراء على هذا السهم بسعر تنفيذ مساوي ل 55 وتاريخ استلام بعد 06 أشهر بتكوين محفظة بين السهم والخيار، إذا علمت أن معدل العائد الخالي من الخطر يقدر 05% سنويا.

ب-التأكد من النتيجة السابقة باستعمال العلاقة التحليلية.

3- تتداول أسهم شركة WURT AG حاليا في بورصة فرانك فورت عند مستوى 100 أورو للسهم الواحد. خلال السنتين المقبلتين يرتقب المحللون الماليون أن ترتفع أو تنخفض أسعار هذا السهم بمعدل 20% في كل فترة.

المطلوب: حساب قيمة خيار شراء من نوع أوروبي على هذا السهم بسعر تنفيذ مساوي ل 90 أورو وتاريخ استلام بعد سنتين، علما بأن معدل العائد الخالي من الخطر يقد ب 05% سنويا.

4-تتداول سبائك الذهب في سوق المعادن الثمينة NY B X حاليا ب 10.000 دولار للوحدة. بالنسبة لتوقعات السنة المقبلة يرتقب أن تتطور هذه الأسعار، كل ستة أشهر، كما يلي:



المطلوب:

حساب قيمة خيار شراء من نوع أوروبي على الأصل المذكور بسعر تنفيذ قدره 10500 دولار وتاريخ استلام بعد سنة علما بأن معدل العائد الخالي من الخطر يقدر ب 05% سنويا.

5- بالاستناد إلى معطيات التمرين السابق، تأكد من النتيجة باستعمال العلاقة التحليلية.