نموذج بلاك – شولز ومرتون BSM لتقييم الخيارات

يعد نموذج BSMمن التطورات الكبرى التي عرفتها النظرية المالية في العقد الثاني من القرن العشرين إذ يعتبر لدى الكثير بمثابة الانطلاقة الحقيقية للهندسة المالية.

في بحثين منفصلين نشرا سنة 1973 توصل BS من جهة و M من جهة أخرى إلى اشتقاق الصيغة التحليلية لتقييم خيار أوروبي على سهم لا يوزع حصص نقدية ليؤسسوا بذلك منهجية شاملة لتقييم المنتوجات المشتقة والتي كان لها أثر حاسما في تطور وازدهار الصناعة المالية منذ ذلك الوقت.

6-1- فرضيات النموذج:

- سوق تام (لا توجد ضرائب، لا توجد عمولات، توقعات المستثمرين متجانسة، يمكن الإقراض والاقتراض بنفس معدل الفائدة خلال حياة الخيار...).
- البيع على المكشوف مسموح به.
- السهم لا يوزع حصص نقدية خلال فترة حياة الخيار.
- معدل تشتت أسعار السهم ثابت خلال فترة حياة الخيار.
- ليس هناك أي فرص للمراجحة.
- تطور سعر السهم يتبع المسار الهندسي التالي:

$$dS = uSdt + \sigma S dz \quad (6.1)$$

حيث: u: العائد المنتظر من السهم أو الاتجاه العام للمسار.

σ = معدل التشتت أسعار السهم (الجزء العشوائي للمسار)

dz: مسار Weiner بالخصائص التالية:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

المتغير العشوائي ε يتبع القانون الطبيعي المصغر للاحتمالات $N(0,1)$

$$E(\varepsilon) = 0 \qquad Var(\varepsilon) = \Delta t$$

- كل التغيرات Δt لفترات متباينة مستقلة.

6-2- اشتقاق النموذج:

لاشتقاق النموذج إعتمد BSM على نظرية الحساب والمسارات العشوائية التي تستعمل لنمذجة تطور الكثير من الظواهر الطبيعية.

نقول أن متغير عشوائي x يتبع مسار Itô إذا أمكن كتابة تطوره على الشكل التالية:

$$dx = \underbrace{a\,(x,t)\,dt}_{\text{الاتجاه العام}} + \underbrace{b\,(x,t)\,dz}_{\text{الجزء العشوائي}} \qquad (6.2)$$

من جهة أخرى ينص قانون Itô على أنه إذا كان لدينا دالة G لمتغيرين x و t (الوقت)، فيمكن كتابة مسارها كالتالي:

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial x}\,a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2\right] dt + \frac{\partial G}{\partial x}\,b\,dz \qquad (6.3)$$

باسقاط هذه النتيجة على المسار الهندسي المستعمل لنمذجة تطور أسعار السهم $dS = uSdt + \sigma\,dz$ (أي بوضع $a = uS$ و $b = \sigma S$)

فإن تطور قيمة الخيار f الذي يمثل دالة لسعر السهم والوقت يمكن صياغته على النحو التالي:

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial S}\,uS + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma S^2\right] dt + \frac{\partial f}{\partial S}\,\sigma S dz \qquad (6.4)$$

خلال فترة زمنية طولها Δt لدينا :

$$\Delta S = uS\,\Delta t + \sigma S\,\Delta z \qquad (6.5)$$

وعليه فإن:

$$\Delta f = \left[\frac{\partial f}{\partial S}\,uS + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma S^2\right] \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\,\sigma S\Delta z \qquad (6.6)$$

نشكل محفظة بالخصائص التالية:

- شراء $\frac{\partial f}{\partial S}$ أسهم
- بيع خيار على السهم أي $f -$

قيمة هذه المحفظة:

$$\Pi = -\,f + \frac{\partial f}{\partial S}\,S \qquad (6.7)$$

التغير في قيمة المحفظة خلال فترة طولها Δt يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\Delta\Pi = -\,\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\,\Delta S \qquad (6.8)$$

بتعويض Δf و ΔS بقيمتها في المعادلة السابقة (6.8) نتحصل على:

$$\Delta \pi = \left[-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right] \Delta t \qquad (6.9)$$

لاحظ أن هذه العبارة لا تحتوي على أي حد فيه Δz أي أن التغير في قيمة المحفظة خلال Δt خالي من المخاطر

بما أن المحفظة خالية من المخاطر خلال الفترة Δt فإن معدل العائد عليها هو معدل العائد الخالي من الخطر (r).

مما سبق ذكره يمكن إعادة صياغة $\Delta \pi$ وفقا لما يلي:

$$\Delta \pi = r\, \pi \Delta t \qquad (6.10)$$

بتعويض قيمة π و $\Delta \pi$ في (6.10) لدينا:

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right] \Delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S\right) \Delta t \qquad (6.11)$$

ومنه:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \qquad (6.12)$$

والعلاقة السابقة هي المعادلة ذات المشتقات الجزئية لـ BSM

6-3- صيغ BSM لتقييم الخيارات:

إذا وضعنا الشروط التالية عند الحدود العليا للخيارات:

$t = T$ $\quad$ $Max\,(S - K, 0)$ بالنسبة لخيار الشراء C

و $t = T$ $\quad$ $Max\,(K - S, 0)$ بالنسبة لخيار البيع P

نتحصل على الصيغ BMS التالية لتقييم خيار الشراء وخيار البيع من نوع أوروبي على سهم لا يوزع حصص نقدية.

$$C = S_0\, N(d1) - Ke^{-rT} N(d2) \qquad (6.13)$$

$$P = Ke^{-rT} N(-d2) - S_0\, N(-d1) \qquad (6.14)$$

حيث :

$$d1 = \frac{\ln(S_0/k) + (r + \sigma^2/2)\,T}{\partial \sqrt{T}} \qquad (6.15),$$

$$d2 = \frac{\ln(S_0/k) + (r - \sigma^2/2)\,T}{\partial \sqrt{T}} \qquad (6.15)$$

و $N(\ )$ هي دالة كثافة الاحتمالات للقانون الطبيعي المصغر $N(0.1)$

4-6- تطبيق صيغ BSM على سهم يوزع حصص نقدية:

- حالة التوزيع المتقطع للحصص (مبالغ مطلقة خلال تواريخ محددة)

نقوم بخصم القيمة الحالية للحصص النقدية من سعر السهم أي S_0 ثم نستعمل المبلغ المتحصل عليه لحساب d1 و d2 وأخيرا قيمة الخيار الشراء C و خيار البيع P .

- حالة التوزيع المستمر للحصص النقدية (نسبة)

اذا رمزنا بـq إلى معدل العائد على الحصص النقدية الموزعة على فترة حياة الخيار، لدينا:

$$d1 = \frac{\ln (S_0/k) + (r - q + \sigma^2/2)\, T}{\partial \sqrt{T}} \quad (6.17)$$

$$d2 = \frac{\ln (S_0/k) + (r - q - \sigma^2/2)\, T}{\partial \sqrt{T}} \quad (6.18)$$

$$C = S_0 e^{-qT} N(d1) - K e^{-rT} N(d2) \qquad (6.19)$$

$$P = K e^{-rT} N(-d2) - S_0 e^{-qT} N(-d1) \qquad (6.20)$$

5-6- تطبيق صيغ BSM على مؤشر أسهم:

نستعمل كما في حالة التوزيع المستمر للحصص النقدية العلاقات (6.19) و (6.20).

6-6- تطبيق صيغ BSM على عملة أجنبية:

الاستثمار في عملة أجنبية، كما رأينا سابقا، يشبه إلى حد ما الاستثمار في سهم يوزع حصص نقدية، وعليه فإذا رمزنا بـ rf إلى معدل العائد الخالي من الخطر في البلد الأجنبي، لدينا:
الماطر

$$C = S_0 e^{-r_f T} N(d1) - K e^{-rT} N(d2) \qquad (6.21)$$

$$P = K e^{-rT} N(-d2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d1) \qquad (6.22)$$

حيث:

$$d1 = \frac{\ln (S_0/k) + (r - r_f + \sigma^2/2)\, T}{\partial \sqrt{T}} \quad (6.23)$$

$$d2 = \frac{\ln (S_0/k) + (r - r_f - \sigma^2/2)\, T}{\partial \sqrt{T}} \quad (6.24)$$

أسئلة وتمارين الفصل السادس:

1- احسب قيمة خيار شراء من نوع أوروبي على سهم شركة ABC علما بأن:

- السعر الحالي للسهم في السوق: 50
- سعر التنفيذ: 55
- تاريخ الاستلام: 06 أشهر
- معدل تشتت عوائد السهم: 20% سنويا
- معدل العائد الخالي من الخطر: 05% سنويا

2- احسب قيمة خيار البيع للسهم ABC بالاستناد إلى معطيات التمرين السابق ثم تأكد النتيجة باستعمال علاقات المساواة بين خيار الشراء وخيار البيع.

3- لدينا سهم سعره الحالي في السوق 80. هذا السهم سيوزع حصص نقدية قدرها 2 و3 بعد ثلاث أشهر وستة أشهر على التوالي.

المطلوب:

حساب قيمة خيار الشراء من نوع أوروبي على هذا السهم بسعر تنفيذ مساوي ل 80 وتاريخ استلام سنة، علما بأن معدل العائد الخالي من الخطر يقدر ب 06% وأن معدل تشتت عوائد السهم هو 20% سنويا.

4- يتداول مؤشر S&P500 حاليا عند مستوى 500 نقطة ويعرف معدل تشتت سنوي قدره 18%. الأسهم المكونة للمؤشر ستوزع حصص نقدية معدل عائدها 03% سنويا خلال السداسي المقبل.

المطلوب:

حساب قيمة خيار البيع من نوع أوروبي على المؤشر بسعر تنفيذ مساوي ل 500 نقطة وتاريخ استلام 06 أشهر أذا كان معدل العائد الخالي من الخطر يرتفع إلى 05% سنويا.

5- يتداول الجنيه الإسترليني حاليا عند مستوى 1.5000 لكل أورو ويعرف تشتتا سنويا قدره 20% سنويا.

المطلوب:

حساب قيمة خيار البيع على العملة السابقة بسعر تنفيذ مساوي ل 1.5000 وتاريخ استلام سنة، أذا كان معدل العائد الخالي من الخطر هو 11% و 08% في انجلترا وفرنسا على التوالي.