Suite du chapitre 2

Méthode pour résolution d'équations différentielles

I) Equations différentielles du premier ordre

Equation linéaire:	$y' + ay = f(t)$

La solution générale est :
La solution de l'équation sans second membre(équation homogène) : y_h

+

une solution particulière de l'équation avec second membre : y_p

$$\mathbf{y_g = y_h + y_p}$$

a) Equation sans second membre : $y' + ay = 0$

C'est une équation à variables séparables dont on obtient facilement

la solution homogène : $\mathbf{y_h = ke^{-at}}$ **, avec k est une constante.**

b) Equation avec second membre :

- Soit il existe une solution évidente
- Soit on utilise la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière :

Soit $\mathbf{y_h = ke^{-at}}$ une solution de l'équation sans second membre

Une solution particulière peut être déduite à partir de la méthode de variation de la constante exposée précédemment.

=> On cherche une SP (solution particulière) de la forme $y_p(t)=k(t)e^{-at}$

=> On remplace dans l'équation (y'', y', y ...)

=> On trouve k une primitive de $k'(t)$

=> On écrit la SG (solution générale) : $\mathbf{y_g = y_h + y_p}$

=> On fait intervenir les CI seulement à la fin !

La méthode de variation des constantes marche toujours ; cependant, dans bien des cas, il existe une solution particulière y_p qui ressemble à f(t). Le type de la fonction f(t) nous indique sous quelle forme la chercher, et il ne reste plus qu'à ajuster les coefficients. Cela conduit en général à des calculs plus simple que la méthode de variation de la constante. Le tableau ci-dessous montre comment s'y prendre pour trouver une telle solution particulière.

Second membre f(t)	**Solution particulière y_p (t)**
f(t) est un polynôme de degré n	y_p (t) est un polynôme de degré n
$f(t) = ke^{rt}$, avec $r \neq -a$	$y_p(t) = ce^{rt}$
$f(t) = ke^{-at}$	$y_p(t) = cte^{-at}$
$f(t) = P(t)e^{rt}$, $r \neq -a$, P polynôme de degré n	$y_p(t) = Q(t)e^{rt}$, Q polynôme de degré n
$f(t) = P(t)e^{rt}$, $r = -a$, P polynôme de degré n	$y_p(t) = Q(t)e^{rt}$, Q polynôme de degré n+1
f(t) = Ccos (rt) + Dsin (rt)	y_p(t) = Acos (rt) + Bsin (rt)

Exemple 1 : Cherchons une solution de l'équation : $y'-2y=t^2+1$

Posons $y_p = at^2 + bt + c$
et remplaçons dans l'équation : $2at + b - 2at^2 + bt + c = t^2 + 1$.
En identifiant, on trouve alors : $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$; $c = -\frac{3}{4}$
Une solution particulière est donc :

$$y_p = -\frac{1}{2}t^2 - -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$$

D'où la solution générale est :

$$y_p = -\frac{1}{2}t^2 - -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + ke^{2t} \text{ avec } k \in \mathfrak{R}$$

II. Equation différentielle du 2^{nd} ordre : $y''+ay'+by=f(t)$

SG=SH+SP

Solution homogène (SH): $y''+ay'+by=0$

Equation Caractéristique (EC): $r^2 + ar + b = 0$

=> On calcule Δ :

- $\Delta>0$ 2 racines réelles distinctes (r_1 et r_2) de l'EC

$y_h(t) = A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t}$, avec A et B deux constantes appartenant à R.

- $\Delta=0$ 1 racine double réelle (r)

  $y_h(t) = (A+Bt).e^{rt}$
- $\Delta<0$ 2 racines complexes conjuguées : $r_1=\alpha+jw$ et $r_2=\alpha-jw$
  $y_h(t) = e^{\alpha t}(A.\cos(wt) + B.\sin(wt))$

Solution particulière (SP) : une des méthodes suivantes peut être utilisées :

- Méthode générale de la "variation des constantes"
- Méthode particulière des "coefficients indéterminés"

Si on utilise la deuxième méthode, suivant la forme du second membre, une méthode d'identification des coefficients permet de déterminer la solution particulière y_p :

$$y''+ay'+by=f(t)$$

- f(t) = k (k : constante)

  y_p =k (k :cste) si $b \neq 0$

  y_p =kt (k : cste) si b=0 et $a \neq 0$

  y_p =kt^2 (k : cste) si b=a=0

Exemple2 : Cherchons la solution de l'équation : **y''-3y'-4y=8**

SH : y''-3y'-4y=0

E.C. : r^2-3r-4 =0 avec Δ= 5

Les racines sont : r_1=-1 et r_2=4

La solution est donc : $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$ avec $c_1\ et\ c_2 \in \Re^2$

SP : y''-3y'-4y=8

Comme $b = -4 \neq 0$, cherchons y_p sous la forme : y_p =k avec $k \in \Re$

d'où $y'_p=y''_p=0$ et -4k=8, ceci implique que y_p=2 .

La solution générale y_g de l'équation sera donc :

$$y_g = y_h + y_p = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - 2$$

Exemple 3 : y''-3y=8

SH : y''-3y=0 , E.C. : r^2-3r =r(r-3)=0 avec Δ= 9

Les racines sont : r_1=0 et r_2=3

La solution est donc : $y_h = c_1 + c_2 e^{3t}$ avec $c_1\ et\ c_2 \in \Re^2$

SP : y''-3y'=8

Comme $b = 0$ et $a = -3 \neq 0$, cherchons y_p sous la forme : $y_p = kt$ avec $k \in \Re$

d'où $y'_p = k$ et $y''_p = 0$ et $-3k = 8$ ceci implique que $k = -\frac{8}{3}$ et $y_p = -\frac{8}{3}t$

La solution générale y_g de l'équation sera donc :

$$y_g = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{3t} - \frac{8}{3}t$$

- $f(t) = P_n(t)$ ($P_n(t)$: polynôme de degré n)
  $y_p = Q_n(t)$ Polynôme de degré n si $b \neq 0$
  $y_p = Q_{n+1}(t)$ Polynôme de degré n+1 si b=0 et et $a \neq 0$
  $y_p = Q_{n+2}(t)$ Polynôme de degré n+2 si b=a=0

Exemple 4 : $y'' - 3y' = 2t + 1$

SH : $y'' - 3y' = 0$

E.C. : $r^2 - 3r = r(r-3) = 0$ avec $\Delta = 9$

Les racines sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = 3$

La solution est donc : $y_h = c_1 + c_2 e^{3t}$ avec c_1 et $c_2 \in \Re^2$

SP : $y'' - 3y' = 2t + 1$

Comme $b = 0$ et $a = -3 \neq 0$, cherchons y_p sous la forme : $y_p = t(at+b) = at^2 + bt$ avec :

d'où $y'_p = 2at + b$ et $y''_p = 2a$

Portons ces expressions dans l'équation générale :

$$y''_p - 3y'_p = -6at + 2a - 3b = 2t + 1$$

Par identification :

$$\left.\begin{array}{l} -6a = 2 \\ 2a - 3b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{5}{9} \end{array}$$

$$y_p = -\frac{t^2}{3} - \frac{5}{9}t$$

La solution générale de l'équation sera :

La solution générale y_g de l'équation sera donc :

$$y_g = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{3t} - \frac{t^2}{3} - \frac{5}{9}t$$

- $f(t) = ke^{rt}$ (r et k $\in \mathbb{R}^2$)
- $y_p = ce^{rt}$ si r n'est pas une racine de l'E.C. (c $\in$ R)

  $y_p = cte^{rt}$ si r est racine simple de l'E.C.

  $y_p = ct^2e^{rt}$ si r est racine double de l'E.C.

- $f(t) = P_n(t)\, e^{rt}$ ($P_n(t)$: polynôme de degré n) et r $\in$ R

$y_p = Q_n(t)\, e^{rt}$, $Q_n(t)$ Polynôme de degré n si r n'est pas racine de l'E.C.

$y_p = Q_{n+1}(t)\, e^{rt}$, $Q_{n+1}(t)$ Polynôme de degré n+1 si r est racine simple de l'E.C.

$y_p = Q_{n+2}(t)\, e^{rt}$, $Q_{n+2}(t)$ Polynôme de degré n+2 si r est racine double de l'E.C.

- $f(t) = C\sin(mt) + D\cos(mt)$ (C et D $\in \mathbb{R}^2$ et m $\in$ R*)

  $y_p = k1\sin(mt) + k_2 D\cos(mt)$ si $\pm jm$ n'est pas racine de l'E.C.

  $y_p = t(\, k_1\sin(mt) + k_2 D\cos(mt)\,)$ si $\pm jm$ est racine de l'E.C.

- $f(t) = e^{rt}\,(C\sin(mt) + D\cos(mt))$ (C, D et r $\in R^3$ et m $\in$ R*)

  $y_p = e^{rt}\,(k_1 \sin(mt) + k_2 \cos(mt))$ si $r \pm jm$ n'est pas racine de l'E.C.

  $y_p = te^{rt}\,(k_1 \sin(mt) + k_2 \cos(mt))$ si $r \pm jm$ est racine de l'E.C.

- $f(t) = e^{rt}\,(P_n(t)C\sin(mt) + Q_h(t)D\cos(mt))$ (r$\in$R et m$\in$ R*) où $P_n(t)$ et $P_h(t)$: polynômes de degré n et h.

  Posons $R_p(t)$ et $S_p(t)$: polynômes de degré p = Max(n, h)

  $y_p = e^{rt}\,(R_p(t)\sin(mt) + S_p(t)\cos(mt))$si $r \pm jm$ n'est pas racine de l'E.C.

  $y_p = e^{rt}\,(R_{p+1}(t)\sin(mt) + S_{p+1}(t)\cos(mt))$ si $r \pm jm$ est racine de l'E.C.

III. Résolution des équations différentielles par la transformation de Laplace

La transformation de Laplace permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire posée sur [0,+∞[en la transformant en une équation plus simple. Par exemple, si l'équation du départ est à coefficients constants, la transformée de Laplace de cette équation est une équation algébrique.

Exemple 5 : Cherchons la solution de l'équation : $2y''+3y'+y(t)=e^t$, $t > 0$ avec : $y(0)=7$ et $y'(0)=-4$.

La transformée de Laplace de l'équation ci-dessus s'écrit :

$$2(\mathrm{p}^2\mathrm{Y}(\mathrm{p}) - 7\mathrm{p} + 4) + 3(\mathrm{pY}(\mathrm{p}) - 7) + \mathrm{Y}(\mathrm{p}) = \frac{1}{p-1}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Y}(\mathrm{p}) = \frac{14\mathrm{p}^2 - \mathrm{p} - 12}{(p-1)(p+1)(2p+1)}$$

En utilisant la transformation de Laplace inverse on a :

$$y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{16}{3}e^{-\frac{t}{2}}$$