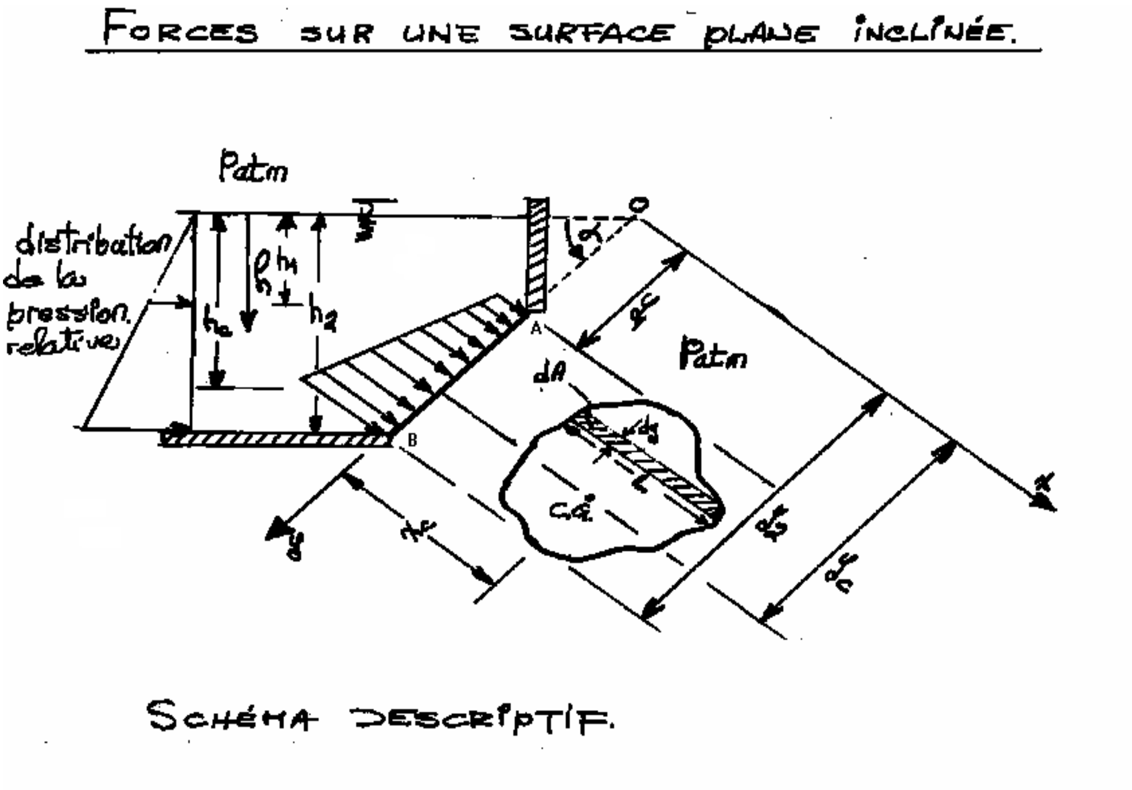
CHAPITRE3

Forces de Pression des Fluides sur les Surfaces

I.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Planes

a.- Expression générale de la Force de Pression



Soit une surface plane AB inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale et immergée dans un fluide de densité massique ρ et C son centre de gravité .

Etablissons l'expression de la force Résultante F des forces exercées par le fluide sur la surface AB (voir diagramme des forces exercées) : Considérons pour cela la force élémentaire dF s'exerçant sur une surface élémentaire dA :

$$dF = PdA = (P_{atm} + \rho gh)dA = P_{atm}dA + \rho ghdA$$

La force résultante F est égale à l'intégrale de dF sur toute la surface AB :

$$F = \int_A dA = \int_A P_{atm}dA + \int_A \rho ghdA$$

or , $h = y\sin\alpha$ d'ou :

$$F = P_{atm}A + \int_A \rho gy\sin\alpha dA = P_{atm}A + \rho g\sin\alpha \int_A ydA =$$

Le terme $\int_A ydA$ représente le ‘’ ***Moment Statique*** ‘’ de la surface AB par rapport

11

à Ox : $\int_A ydA = y_c A$ avec $\mathbf{y_c}$ **:** Ordonnée du centre de gravité de la surface AB .

L'expression de F devient : $F = P_{atm}A + \rho g\sin\alpha y_c A$

et comme $y_c \sin\alpha = h_c$: Profondeur du centre de gravité de la surface AB :

$$F = P_{atm}A + \rho g h_c A$$

En général , la pression P_{atm} est négligée et donc l'expression finale de F devient :

$\boxed{F = \rho g h_c A}$ *Remarque* : En hydrostatique , $\rho = \rho_w$ (Eau) : $\boxed{F = \rho_w g h_c A}$

b.- Position du point d'application de la Force de Pression :
Déterminons $\mathbf{h_D}$, la profondeur du point d'application de la force résultante F :
Pour cela , utilisons le principe des moments :

$$M_o F = \sum_{AB} M_i$$

avec :

$$M_o F = F.y_D \quad \text{et} \quad \sum_{AB} M_i = \int_{AB} y dF = \int_{AB} y.\rho g y \sin\alpha dA = \int_{AB} \rho g y^2 \sin\alpha dA = \rho g \sin\alpha \int_{AB} y^2 dA$$

le terme $\int_{AB} y^2 dA$ représente le ‘‘ ***Moment d'Inertie*** ‘‘ de la surface AB par rapport à l'axe Ox = $\mathbf{I_{ox}}$

On aura donc : $\rho g \sin\alpha y_D A = \rho g \sin\alpha I_{ox}$ Et donc : $\boxed{y_D = \dfrac{I_{ox}}{y_c A}}$

<u>*Remarque*</u> : Utilisation du théorème de Huygens :

Ce théorème nous permet d'écrire que : $I_{ox} = I_{cc} + {y_c}^2 A$ avec :

$\mathbf{I_{cc}}$: Moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son centre de gravité C .

Dans ce cas , la formule précédente devient :

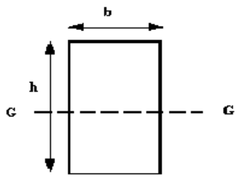
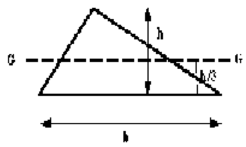
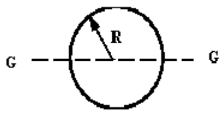
$\boxed{y_D = y_c + \dfrac{I_{cc}}{y_c A}}$ ou bien $\boxed{h_D = h_c + \dfrac{I_{oo}}{h_c A'}}$

avec :

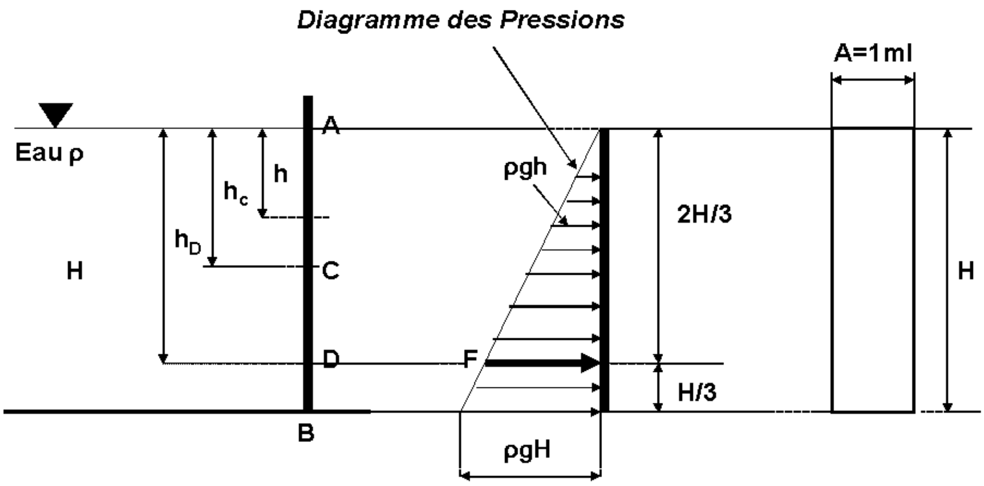
- **A'** : Projection verticale de la surface AB
- $\mathbf{I_{oo}}$: Moment d'inertie de la surface A' par rapport à l'axe passant par son centre de gravité .

<u>**Conclusion**</u> **:** Le point d'application de la résultante F se trouve toujours ***plus bas*** que le centre de gravité d'une distance égale à : $\dfrac{I_{oo}}{h_c A'}$

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Type	Surface	Moment d'Inertie I_{CC}
Rectangle 	bh	$\dfrac{bh^3}{12}$
Triangle 	$\dfrac{bh}{2}$	$\dfrac{bh^3}{36}$
Cercle 	πR^2	$\dfrac{\pi R^4}{4}$

c.- Cas d'une surface verticale – Diagramme des pressions :



Cas d'une surface plane verticale

Soit une plaque AB plane verticale retenant une hauteur d'eau H . Le schéma représente le diagramme des pressions exercées sur la surface AB . Exprimons la résultante F des forces de pressions sur la surface AB de 2 façons différentes :

1.- D'après le diagramme des pressions :

Le diagramme des pressions est représenté par un triangle dont la surface est égale à la résultante des forces de pressions :

$\boxed{F = \frac{\rho g H.H}{2} = \frac{1}{2}\rho g H^2}$ et F passe par le centre de gravité du triangle , d'où :

$$\boxed{h_D = \frac{2}{3}H}$$

2.- D'après les formules de l'hydrostatique :

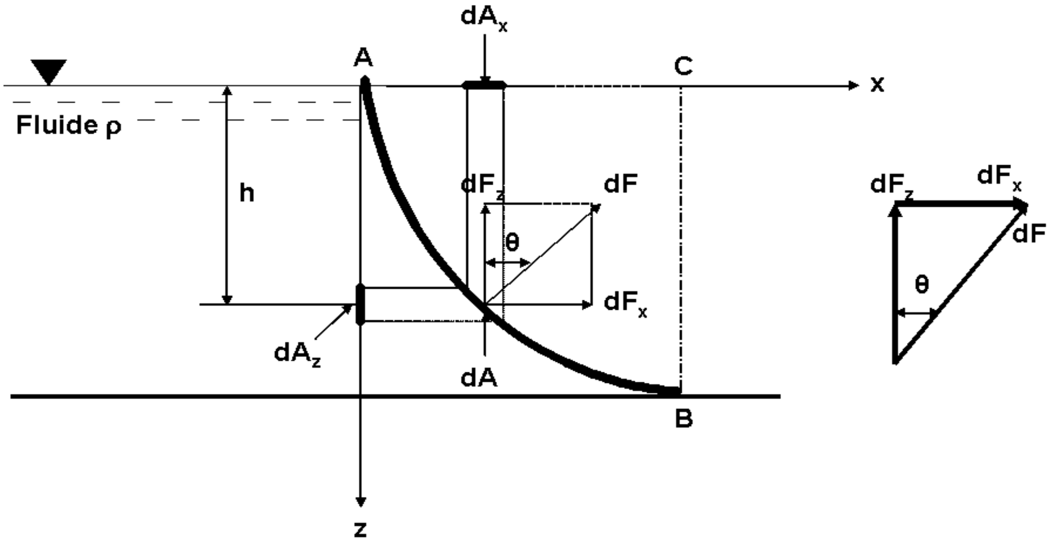
$$\boxed{F = \rho g h_c A = \rho g \frac{H}{2} H.1ml = \frac{1}{2}\rho g H^2}$$

et : $\boxed{h_D = h_c + \frac{I_{oo}}{h_c A} = \frac{H}{2} + \frac{1.H^3}{12\frac{H}{2}H.1} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = \frac{2}{3}H}$

II- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Courbes

a.- Expression générale de la Force de Pression

Force de Pression sur une surface Courbe



Soit une paroi courbe AB retenant un fluide de densité massique ρ .
Soit un élément dA de la surface AB situé à une profondeur h et sur lequel s'exerce une force élémentaire dF qui se décompose en 2 forces :

- Une force dF_x , agissant sur la surface dA_z projection de dA sur l'axe z .
- Une force dF_z , agissant sur la surface dA_x projection de dA sur l'axe x .

On sait que : $dF = \rho g h dA$ d'où :

$$dF_x = dF.\sin\theta = \rho g h dA \sin\theta = \rho g h dA_z \quad \text{car} \quad dA\sin\theta = dA_z$$

$$dF_z = dF.\cos\theta = \rho g h dA \cos\theta = \rho g h dA_x \quad \text{car} \quad dA\cos\theta = dA_x$$

d'où :

$$\int dF_x = F_H = \rho g \int_{Az} h dA_z = \rho g h_c A_z \rightarrow \underline{F_H = \rho g h_c A_z}$$

avec : A_z : Projection verticale de la surface courbe AB .

CONCLUSION : *Le calcul de la composante horizontale F_H est ramené au calcul d'une force de pression sur une **surface plane verticale** .*

De même : $\int dF_z = F_v = \rho g \int_{Ax} h dA_x = \rho g \int_W dW = \rho g W \rightarrow \underline{F_v = \rho g W}$

Avec W : Volume délimité par :

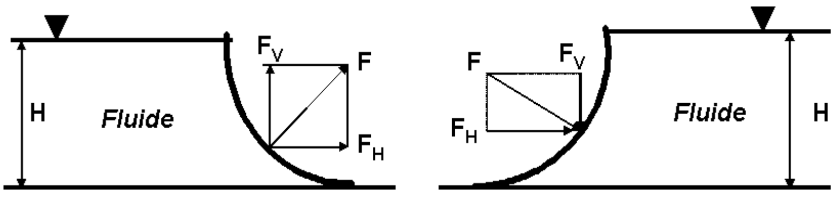
- La surface courbe AB
- La surface libre du fluide
- Les 2 verticales menées des 2 extrémités A et B de la surface .

CONCLUSION : Le calcul de la composante horizontale FV se résume donc au calcul *du **Poids du fluide** représenté par le volume déplacé par la surface AB .*

Le calcul des 2 composantes F_H et F_V permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression suivante :

$$\boxed{F = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2}}$$

Remarque : Selon que la surface AB en contact avec l'eau est concave ou convexe , on aura :



F_V dirigée vers le haut

F_V dirigée vers le bas

b.- Position du point d'application de la Force de Pression :

Le point d'application de la résultante F est obtenu si l'on connaît les composantes F_H et F_V . Dans le cas général , il faudra établir l'équation de la courbe AB et celle du segment représentant la force
F (équation d'une droite) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

$$\boxed{\theta = arctg \frac{F_v}{F_H}}$$