جامعة محمد بوضياف المسيلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة محاضرات مقياس

الرياضيات المالية

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير

الدكتور:

نوي نور الدين

السنة الجامعية 2017-2018

محتوى المطبوعة:

الفصل الأول: العمليات المالية في المدى القصير

الفصل الثاني: العمليات المالية في المدى الطويل

الفصل الاول: العمليات المالية في المدى القصير

1)الفائدة البسيطة

يمكن تعريف الفائدة البسيطة بأنها العائد الذي يحصل عليه المستثمر نتيجة استخدام أمواله خلال مدة زمنية معينة ، فإذا أودع شخص مبلغا من المال في أحد البنوك لمدة معينة وبمعدل فائدة متفق عليه ، فانه يحصل من البنك في نهاية مدة الاستثمار على المبلغ الذي أودعه بالإضافة إلى الفائدة المستحقة له من استثمار هذا المبلغ لدى البنك ، وكذلك هي الأجر الذي يدفعه المدين إلى دائنة نتيجة استخدامه لأموال دائنة في نهاية مدة زمنية معينة ، فإذا اقترض شخص مبلغا من المال من أحد البنوك لمدة معينة وبمعدل فائدة متفق عليه ، فانه يدفع إلى البنك في نهاية مدة القرض المبلغ الذي اقترضه بالإضافة إلى الفائدة المستحقة عليه من اقتراض هذا المبلغ من البنك

1-1-العلاقة الأساسية لحساب الفائدة البسيطة:

لنرمز بـــ C لرأس المال المستثمر أو المبلغ المودع في البنك، n لمدة استثمار رأس المال مقدرة بالسنوات، t لمعدل الفائدة السنوية والتي تحسب كنسبة مئوية. عندئذ يكون مقدار الفائدة (ولنرمز لها بالرمز I) التي نحصـــــل عليها (نتيجة إيداعنا للمبلغ c خلال الفترة الزمنية المحددة n سنة وبفائدة i) هي:

$$\mathbf{I = C \times \frac{t}{100} \times \ n = \frac{Ctn}{100}}$$

مثال: قام بنك باقتراض مؤسسة مبلغ 300000 لمدة سنتين بمعدل 8%، أحسب مبلغ الفائدة؟

$$I = \frac{ctn}{100} = \frac{300000 \times 8 \times 2}{100} = 48000$$

1-2- الفائدة البسيطة لفترة زمنية دون السنة:

أ- التعبير عن مدة القرض بالأشهر:

اذا اعتبرنا m هي مدة إيداع المبلغ بالأشهر و هي توافق$\frac{m}{12}$من السنة و قانون الفائدة البسيطة يعطى بالعلاقة التالية:

$$I = C \times \frac{t}{100} \times \frac{m}{12} = \frac{Ctm}{1200}$$

مثال: اقترض مبلغ 72000 و لمدة 09 أشهر بمعدل 7% أسحب مبلغ الفائدة؟

$$I = \frac{72000 \times 7 \times 9}{1200} = 3780$$

ب- التعبير عن مدة القرض بالأيام:

يمكن التعبير عن المدة أيضا بالأيام و يجب اعتبار أن مجموع عدد أيام السنة هو 360 يوم و عليه فإن المدة تعطى $\frac{N}{360}$ و قانون القائدة البسيطة يعطى كالتالي:

$$I = C \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} = \frac{Ctn}{36000}$$

ملاحظات:

- إن حساب الفائدة البسيطة على اعتبار عدد أيام السنة 360 يوم يعطي لنا ما يسمى بالفائدة التجارية .

- كما يمكن حساب الفائدة البسيطة بعدد أيام السنة العادية وهي 365 يوم ويعطي لنا فائدة تسمى بالفائدة الصحيحة أو الحقيقة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$I = C \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{365} = \frac{Ctn}{36500}$$

- على الرغم من اختلاف عدد أيام السنة في حال احتساب الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة إلا أن مدة الإيداع تحسب بأيامها الفعلية ، باستبعاد يوم الإيداع واحتساب يوم السحب ..

- العلاقة بين الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية يمكن توضيحها من خلال :

✓ حاصل القسمة بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقة فنحصل على ما يلي :

$$\frac{I_c}{I_R} = \frac{36500}{36000} = \frac{73}{72}$$

من خلال هذه العلاقة نلاحظ ما يلي:

- الفائدة التجارية أكبر من الفائدة الحقيقة بمقدار $\frac{73}{72}$ دج عن كل 1 دج موظف في بنك وعليه يمكن استخلاص العلاقتين التاليتين:

$$I_c = \frac{73}{72} I_R$$

$$I_R = \frac{72}{73} I_c$$

✓ الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية فنحصل على العلاقتين التاليتين:

$$I_c - I_R = I_c - \frac{72}{73} I_c$$

$$(I_c - I_R) = \frac{1}{73} I_c$$

$$(I_c - I_R) = \frac{1}{72} I_R$$

مثال: قرض تم منحه بتاريخ 03/13 و يعاكس 07/08 فما هي مدة القرض بالأيام؟

مارس 31-13 = 18+ يوم أفريل30+ ماي31+ جوان30 +جويلية8= 117 يوم

وعليه فان مدة القرض هي: **117يوم**

1-3-الحسابات على العلاقة الأساسية:

نلاحظ أن العلاقة الأساسية للفائدة البسيطة تحتوي على أربعة متغيرات هي I *c, n, i* نستطيع حساب أحدها حينما تكون بقية المتغيرات معلومة:

$$I = \frac{ctn}{36000}$$

$$C = \frac{36000 \times I}{tn}$$

$$n = \frac{36000 \times I}{ct}$$

$$t = \frac{36000 \times I}{cn}$$

مثال: اودع مبلغ مالي في بنك لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة بسيطة سنوي **9%** ليعطي فائدة قدرها 27 دج

أحسب قيمة المبلغ المودع ؟

الحل:

$$C = ؟, t = 9\%, n = 3ans, I = 27\text{دج}$$

$$C = \frac{36000 \times I}{tn} = 36000 * \frac{27}{9 * 3} = 36000\text{دج}$$

مثال 2: أودع مبلغ مالي بقيمة 1000 دج لمدة معينة ليعطي في نهايتها فائدة تقدر ب200 دج اذا كان معدل الفائدة 10 **%** فأحسب مدة التوظيف ؟

الحل :

$$C = 1000\text{دج}, t = 10\%, n = ؟, I = 200\text{دج}$$

$$n = \frac{36000 \times I}{ct} = 36000 * \frac{200}{10 * 1000} = 720\text{يوم}$$

مثال3 : اقترض شخص مبلغ مالي من بنك قدره 10000 دج ليسدد بعد أربع سنوات فائدة قدرها 400 دج ، فاحسب معدل الفائدة المطبق في البنك ؟

الحل:

$$C = 10000 \text{دج} \,, t = ?\%, n = 4 \text{سنوات}, I = 400\text{دج}$$

$$t = \frac{100 \times I}{cn} = \frac{100 \times 400}{10000 \times 4} = 10\%$$

4-1-القيمة المكتسبة (الجملة):

في نهاية فترة التوظيف أو عند وصول أجال استحقاق الدين فان الأشخاص مطالبين بتسديد قيمة الأصل مضافا إليه الفوائد، هذه القيمة يطلق عليها اسم **الجملة** أو **القيمة المكتسبة**

$$A = C + I$$

$$S = C + C \times \frac{t}{100} \times n$$

$$S = C(1 + \frac{tn}{100})$$

مثال: أحسب القيمة المكتسبة لقرض بمبلغ 72000 بمعدل فائدة 10% ولمدة 45 يوم.

$$I = \frac{72000 \times 10 \times 45}{36000} = 900$$

$$A = C + I = 900 + 72000 = 72900\text{دج}$$

او باستخدام علاقة الجملة مباشرة $A = C + I = c(1 + \frac{tn}{100})$

2) الخصم و توافق رؤوس الأموال:

في حالات كثيرة يتعهد المتعاملون بتسديد ديونهم المترتبة عن المعاملات التجارية باستخدام الأوراق التجارية وهذه الأوراق ثلاثة أنواع:

أ- **الشيك:** هو تعهد فوري يمكن للمستفيد أن يحصل على قيمته من البنك يوم تحريره.

ب- **السند الأذني:** هو تعهد بين طرفين يلتزم فيه الساحب بتسديد مبلغ معين لطرف اخر المستفيد بتاريخ ما

ت- **الكمبيالة أو السفتجة:** هي عبارة عن ورقة تجارية ثلاثية الأطراف، وتشمل أمرا صادرا من شخص يسمى الساحبأو المدين إلى شخص يسمى المسحوب عليه(بنك)، والذي عليه ان يقوم بدفع أجر لشخص ثالث يستفيد مبلغ من المال عند الإطلاع أو موعد محدد لإذن شخص ثالث يسمى حامله أو المستفيد (الدائن)، وتحدد كل دولة بيانات الكمبيالة، فيجب أن تحتوي على كلمة "كمبيالة"، في الصك، اسم من يلزم الوفاء المسحوب عليه، موعد الاستحقاق، مكان الوفاء، اسم الواجب الوفاء له، تاريخ ومكان إصدار الكمبيالة وتوقيع من قام بإنشائها.

الخصم التجاري: يعتبر خصم الأوراق التجارية من التسهيلات الائتمانية التي يقدمها البنك للعملاء الذين يرغبون في تحصيل قيمة الكمبيالات قبل تاريخ استحقاقها للحصول على نقدية حاضرة، **و**هو سعر الخدمة المؤدات من البنك وهو فائدة محسوبة

بمعدل t من طرف البنك على القيمة الاسمية للورقة لمدة n يوم التي تفصل بين تاريخ الخصم وتاريخ استحقاق الورقة التجارية فعدد الأيام هنا توافق مدة القرض الممنوح من طرف البنك.

أ- العلاقة الأساسية للخصم:

V: القيمة الاسمية للورقة التجارية t : معدل الخصم n المدة وهي المدة المحصورة بين تاريخ الخصم وتاريخ استحقاق الورقة .e : مبلغ الخصم.

ويمكن الحصول على العلاقة كالتالي:

$$e = V \times \frac{t}{100} \times \frac{n}{360} = \frac{Vtn}{36000}$$

لتبسيط هذه العلاقة وباستخدام القاسم D والذي يساوي $D = \frac{36000}{t}$

فنحصل على العلاقة الأساسية كالتالي:

$$e = \frac{Vn}{D}$$

مثال: ورقة تجارية بمبلغ $V = $ 60000 DA و بتاريخ استحقاق 31/09 تم خصمها بتاريخ 26/03 بمعدل 9%.احسب قيمة الخصم ؟

الحل :

مبلغ الخصم:

$$e = \frac{Vtn}{36000} = \frac{60000 \times 9 \times 66}{36000} = 990$$

ب- القيمة الحالية التجارية

تمثل القيمة الممنوحة للزبون من طرف البنك أو صافي ما يتحصل عليه المستفيد بعد خصم البنك الفائدة على القيمة الاسمية و تمثل الفرق بين القيمة الإسمية للورقة الحالية و الخصم التجاري بها:

باستعمال الرمز $\boldsymbol{a}$كرمز للقيمة الحالية⇐ $\boldsymbol{a = V - e}$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} - \frac{Vtn}{36000}$$

أو:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} - \frac{Vn}{D}$$

ملاحظة: البنك يحتفظ في الحين بمبلغ الخصم بعد خصم الورقة التجارية عند تاريخ الاستحقاق ويحصل البنك على قيمة الاسمية للورقة التجارية عند تاريخ الاستحقاق.

ث- مسائل على الخصم التجاري:

العلاقة الأساسية للخصم التجاري فيها 4 متغيرات: $\boldsymbol{e, V, t, n}$، التي تؤدي إلى حل 4 مسائل مختلفة في حالة وجود متغير يكون مجهول.

$$e = \frac{Vtn}{36000}$$

$$V = \frac{36000 \times e}{tn}$$

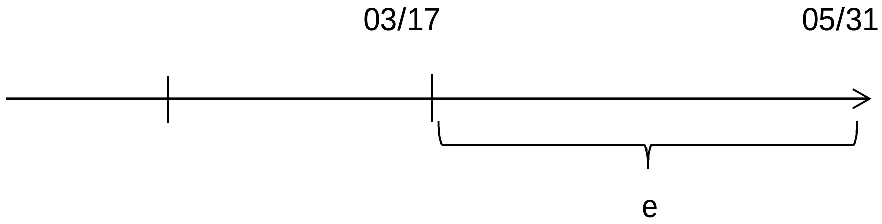
$$t = \frac{36000 \times e}{Vn}$$

$$n = \frac{36000 \times e}{Vt}$$

مثال: في 03/17 تقدم تاجر لبنك بخصم ورقة تجارية قيمتها الإسمية 840 دج معدل الخصم 4% مستحقة الدفع في 05/31 من نفس السنة. حساب القيمة الحالية لهذه الورقة.

الحل:

تاريخ الاستحقاق:



$$t = 4\%, V = 840, D = \frac{36000}{4} = 9000, n = 75 jours$$

ط1:

$$e = \frac{Vn}{D} = \frac{840 \times 75}{9000} = 7$$

$$a = V - e = 840 - 7 = 833DA$$

ط2:

$$a = \frac{V(D-n)}{D} = \frac{840(9000-75)}{9000} = 833DA$$

مثال (2): في 06/02 قامت المؤسسة بخصم 3 أوراق التجارية التالية:

- الورقة الأولى: 9800 دج مستحقة في n/07/02
- الورقة الثانية: 12600 دج مستحقة في n/08/31
- الورقة الثالثة: 7200 دج مستحقة في n/10/30.

وذلك بمعدل خصم 9%. أحسب قيمة الخصم التجاري والقيمة الحالية الاجمالية؟

الحل:

$$V_1 = 9800, V_2 = 12600, V_3 = 7200$$

$$n_1 = 30j, n_2 = 90j, n_3 = 150j$$

$$e = \frac{V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3}{D}$$

$$e = \frac{9800.30 + 12600.90 + 7200.150}{4000} = 627DA$$

$$a = (V_1 + V_2 + V_3) - e$$

$$a = (9800 + 12600 + 7200) - 627$$

$$a = 28973DA$$

3) توافق رؤوس الأموال:

قد يضطر الساحب أو الشخص المدين إلى طلب تأجيل الدفع من طرف الشخص الدائن ، هذا التأجيل في موعد الاستحقاق ينتج عنه استبدال الورقة بورقة أخرى جديدة تختلف عنها في القيمة الاسمية لكن تساويها في القيمة الحالية عند تاريخ الاستبدال أو تاريخ التكافؤ

أ- مبدأ تكافؤ الأوراق التجارية:

عند تاريخ التكافؤ: القيمة الحالية للورقة الجديدة تساوى القيمة الحالية للورقة المستبدلة

$$a = a_1 \Rightarrow V_1(D - n_1) = V(D - n)$$

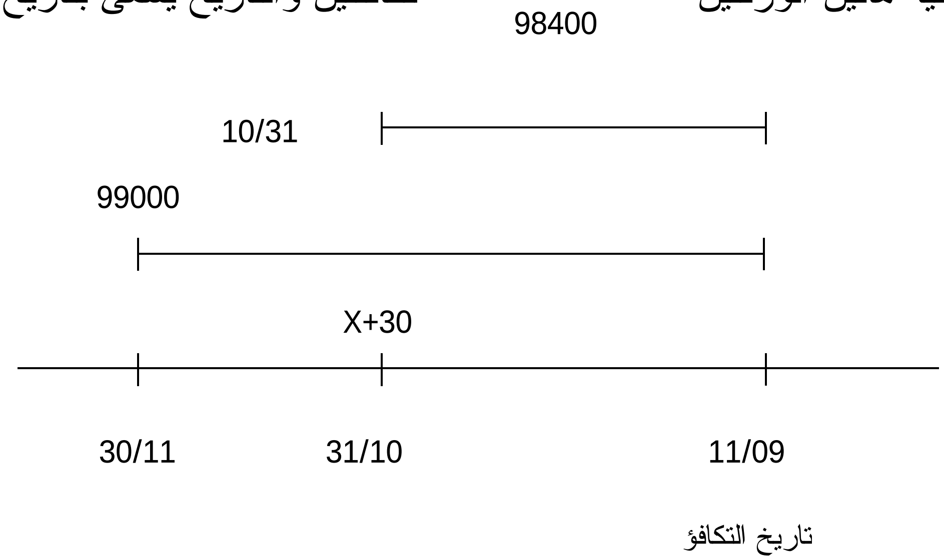
وكما يمكن استبدال ورقة بورقة يمكن استبدال مجموعة من الاوراق بورقة وحيدة وتصبح العلاقة ع النحو التالي:

$$V(D - n) = V_1(D - n_1) + V_2(D - n_2) + V_3(D - n_3)$$

مثال (1) : ورقتين تجاريتين بقيمتين اسميتين على التوالي 98400 بتاريخ استحقاق 10/31 و 99000 بتاريخ استحقاق 30/11.

تخصمان بمعدل 7.2%.

يمكن حساب القيمة الحالية التجارية لهاتين الورقتين في أي تاريخ فإذا ما وجد تاريخ تتساوى فيه هاتين الورقتين ... تكافئتين والتاريخ يسمى بتاريخ **التكافؤ**.



$$\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{V_1} - \frac{Vt_1xn_1}{36000} = 98400 - \frac{98400 \times 7.2 \times x}{36000}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{V_2} - \frac{Vt_2xn_2}{36000} = 99000 - \frac{99000 \times 7.2 \times (x + 30)}{36000}$$

هناك تكافؤ بين الورقتين التجاريتين إذا فإن:

$$\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} \Rightarrow \boldsymbol{V_1} - \frac{Vt_1xn_1}{36000} = \boldsymbol{V_2} - \frac{Vt_2xn_2}{36000}$$

$$98400 - \frac{98400 \times 7.2 \times x}{36000} = 99000 - \frac{99000 \times 7.2 \times (x + 30)}{36000}$$

$$x = \frac{-216000}{-4320} = 50$$

إذن تاريخ التكافؤ هو: 09/11 سبتمبر

ب- **تاريخ الاستحقاق المشترك أو المدة المتوسطة:** نتكلم عن تاريخ الاستحقاق المشترك او المدة المتوسطة اذا كان مجموع القيم الاسمية للأوراق المستبدلة تساوي القيمة الاسمية للورقة الجديدة

مثال:

في 09/06 الدائن بــ 3 أوراق تجارية:

- 1000 دج بتاريخ استحقاق 10/31
- 3000 دج بتاريخ استحقاق 11/30
- 2000 دج بتاريخ استحقاق 12/31

يطلب البنك تعويض 3أوراق بورقة واحدة ذات تاريخ استحقاق 12/15.

المطلوب: حساب القيمة الاسمية بورقة تجارية وحيدة بمعدل خصم 9%.

الحل:

$$\boldsymbol{a = a_1 + a_2 + a_3}$$

حساب المدة التي تفصل تاريخ التبديل بتاريخ الاستحقاق:

- n_1 = 55 = 10/31 09/06
- من 09/06 11/30= 85 =n_2

- من 09/06 12/31 = 116 = n_3
- من 09/06 12/15 = 100= n

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} - \frac{Vtn}{36000}$$

$$D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{9} = 4000$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} - \frac{Vn}{D} = \boldsymbol{V}\left(\frac{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{D}}\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$$

حساب القيمة الإسمية للورقة الجديدة:

$$V\left(\frac{D-n}{D}\right) = V_1\left(\frac{D_1 - n_1}{D_1}\right) + V_2\left(\frac{D_2 - n_2}{D_2}\right) + V_3\left(\frac{D_3 - n_3}{D_3}\right)$$

$$V\left(\frac{4000 - 100}{4000}\right) = 1000\left(\frac{4000 - 55}{4000}\right) + 3000\left(\frac{4000 - 85}{4000}\right) + 2000\left(\frac{4000 - 116}{4000}\right)$$

$$3900V = 3945000 + 11745000 + 7768000$$

$$V = 6014.87$$

الطريقة العملية للحساب:

القيمة الاسمية	تاريخ الاستحقاق	عدد الأيام من تاريخ الاستحقاق		حساب بمعدل 9%	
				فائدة	خصم
1000		45		11.25	
3000		15		11.25	
2000			16		8
6000				22.50	8

القيمة الاسمية للورقة الجديدة:

$$6000 + 22.50 - 8 = 6014.87$$

مثال: بإعادة أخذ معطيات المثال السابق وبافتراض أن القيمة الإسمية للورقة الجديدة هي: 6000 دج.

المطلوب: تحديد تاريخ الاستحقاق؟

$$\boldsymbol{a = a_1 + a_2 + a_3}$$

$$V - \left(\frac{Vn}{D}\right) = V_1 - \left(\frac{V_1 n_1}{D_1}\right) + V_2 - \left(\frac{V_2 n_2}{D_2}\right) + V_3 - \left(\frac{V_3 n_3}{D_3}\right)$$

$$6000 - \left(\frac{6000n}{4000}\right)$$

$$= 100 - \left(\frac{1000 \times 55}{4000}\right) + 3000 - \left(\frac{3000 \times 85}{4000}\right) + 2000 - \left(\frac{2000 \times 116}{4000}\right)$$

$$n = \frac{542000}{6000} = 90.33 \sim 91$$

تاريخ استحقاق الورقة الجديدة 12/06

تاريخ الاستحقاق هو 91 يوم من تاريخ التبديل 09/06

وعموما فان تاريخ الاستحقاق المتوسط يحسب من خلال العلاقة التالية: $n = \frac{\sum V_i n_i}{\sum V_i}$

تمارين محلولة

تمرين 01:

- في 17 مارس 2013، تقدم تاجر للبنك لخصم ورقة تجارية، قيمتها الاسمية 840 دج، تستحق الدفع في 31 ماي من نفس السنة، معدل الخصم 04%.

يطلب منك حساب القيمة الحالية لهذه الورقة.

تمرين 02: في 02/06/ 2012 قامت مؤسسة السلام بخصم ثلاث أوراق تجارية لدى بنك البركة بمعدل خصم 09 %:

- ✓ الورقة الأولى بقيمة 9800 د.ج مستحقة في 2012/07/02.
- ✓ الورقة الثانية بقيمة 12600 د.ج مستحقة في 2012/08/31.
- ✓ الورقة الثالثة بقيمة 7200 د.ج مستحقة في 2012/10/30.

المطلوب:

1-احسب الخصم الإجمالية.

2-أحسب القيمة الحالية الإجمالية.

تمرين 03:

في 06/02 قامت المؤسسة بخصم 3 أوراق التجارية التالية:

- الورقة الأولى: 9800 دج مستحقة في n/07/02
- الورقة الثانية: 12600 دج مستحقة في n/08/31
- الورقة الثالثة: 7200 دج مستحقة في n/10/30.

و ذلك بمعدل خصم 9%.

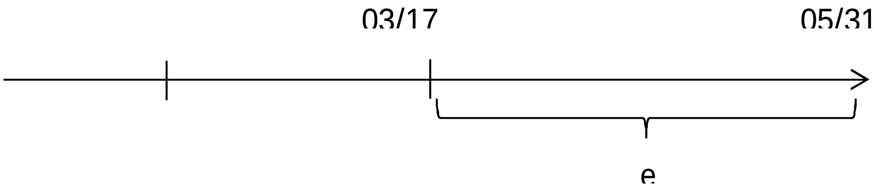
المطلوب:

أحسب قيمة الخصم التجاري و القيمة الحالية الاجمالية.

حلول التمارين

حل تمرين 1:

تاريخ الاستحقاق:



$$31 - 17 = 14$$

$$t = 4\%, V = 840, D = \frac{36000}{4} = 9000, n = 75 jours$$

ط1:

$$e = \frac{Vn}{D} = \frac{840 \times 75}{9000} = 7$$

$$a = V - e = 840 - 7 = 833 DA$$

ط2:

$$a = \frac{V(D-n)}{D} = \frac{840(9000-75)}{9000} = 833 DA$$

تمرين 2

$$V_1 = 9800, V_2 = 12600, V_3 = 7200$$

$$n_1 = 30j, n_2 = 90j, n_3 = 150j$$

$$e = \frac{V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3}{D}$$

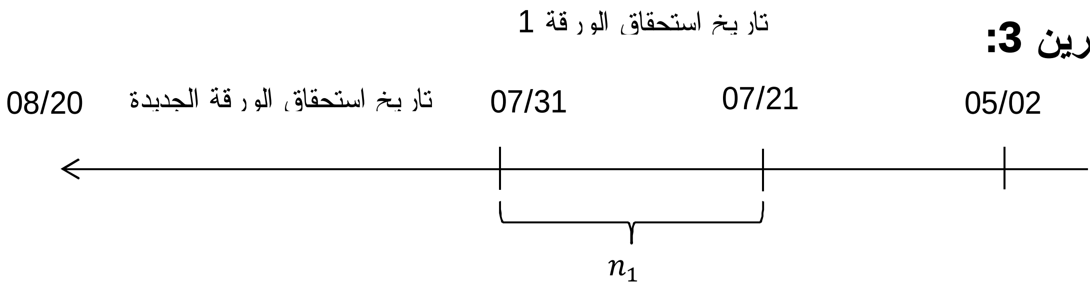
$$e = \frac{9800.30 + 12600.90 + 7200.150}{4000} = 627DA$$

$$a = (V_1 + V_2 + V_3) - e$$

$$a = (9800 + 12600 + 7200) - 627$$

$$a = 28973DA$$

تمرين 3:



عند 07/21 تاريخ التكافؤ (الاستبدال):

$$a = a_1 \Rightarrow V_1(D - n_1) = V(D - n)$$

$$V = \frac{V_1(D - n_1)}{(D - n)} = \frac{10000(6000 - 10)}{6} = 10033.50$$

$$D = \frac{36000}{6} = 6000$$

$$V = 10033.50$$

تمارين غير محلولة

تمرين 01: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 21600 د.ج تستحق الدفع في 2015/01/20 خصمت لدى بنك القرض الشعبي الجزائري؛ فإذا علمت أن معدل الخصم هو 08% سنويا والعمولة 0.5% ومصاريف التحصيل 0.25 %، وأن صافي القيمة التي يتسلمها المستفيد هي 21222 د.ج.

المطلوب: حدد تاريخ تقديم الورقة للخصم.

تمرين 02:

كمبيالة مسحوبة في 05/02 بقيمة 10000 دج تستحق الدفع في 07/31، في 07/21 اتفاق المدين و الدائن على تأجيل الاستحقاق إلى08/20 فإذا كان معدل الخصم 6.%

فما هي القيمة الإسمية للورقة الجديدة؟

تمرين 03:

يزيد استبدال 3 أوراق تجارية بورقة تجارية واحدة تستحق الدفع بعد 60 يوم.

الورقة 1: بقيمة 2000 دج تستحق بعد 18 يوم.

الورقة 2: بقيمة 3000 دج تستحق بعد 29 يوم.

الورقة 3: بقيمة 4000 دج تستحق بعد 45 يوم.

المطلوب: إذا كان معدل الخصم 4% فما هي قيمة الورقة الجديدة.

الفصل الثاني: العمليات المالية على المدى الطويل

1- الفائدة المركبة – الرسملة

1-1- مفهوم الرسملة:

إذا كان حساب الفوائد يأخذ كقاعدة رأسمال المقترض في البداية فهذا الحساب يبرر أن العمليات المالية هي عمليات قصيرة المدى التي لا تدوم إلا لبضعة أيام فإذا كانت عملية القرض هي عملية طويلة المدى تدوم لعدة سنوات فإن الفائدة البسيطة المولدة من رأس المال في خلال السنة الأولى و بعد إضافتها إلى رأس المال الأولى تولد فوائد خلال السنة القادمة و بعد إضافتها إلى رأس المال الأولى تولد فوائد خلال السنة القادمة فالرسملة إذن: تعني إضافة الفوائد لرأس المال و تعد خاصية من خصائص القرض بالفائدة المركبة.

1-2- العلاقة الأساسية للفائدة المركبة:

مثال: تعرض بمنح بفائدة مركبة مع رسملة سنوية للفوائد.

ليكن:

c: مبلغ رأس المال الموظف.

n: مدة القرض (مدة التوظيف، معبر عنها بالسنوات).

i: معدل الفائدة لـــ 1 دج و لمدة سنة.

(فمثلا المعدل 7% يكتب $i = 0.07$ لكل 1 دج).

الفائدة البسيطة لسنة أولى: $I = C_i$

الفائدة البسيطة لسنة 2: $I_2 = [C_0 + C_i]i$

الفائدة البسيطة لسنة 3: $I_3 = C_1 + C_2$

ملاحظة:

الفائدة البسيطة في خلال سنة برأسمال (C) الموظف بمعدل سنوي (i) لكل 1 دج فهي

تساوي إلى $I = C_i$

التاريخ (السنوات)	رأس مال في بداية السنة	فائدة السنة الأولى	القيمة المكتسبة في نهاية السنة تعدل رسملة فائدة السنة
1	C	C_i	$C + C_i = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)$	$C(1+i) + C_2(1+i) = C(1+i)(1+i)$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2 + C_2(1+i)^2 = C(1+i)^2 + (1+i) = C(1+i)^3$
4	$C(1+i)^{3=4-1}$	$C(1+i)^3 i$	$C(1+i)^4$
سنة ما قبل الأخير: n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2} i$	$C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$C(1+i)^n$

القيمة المكتسبة: هي القرض + الفوائد

$$C_n = C(1+i)^n$$

القيمة المكتسبة و نرمز لها بـــ لرأسمال بمبلغ C_n بعد n رسملة للفوائد فهي تعطى بالعلاقة التالية:

$$C_n = C(1+i)^n$$

ملاحظة:

على عكس العلاقة الخاصة بحساب الفائدة البسيطة التي تعطي مباشرة مبلغ الفائدة المولدة رأسمال الموظف فإن العلاقة الأساسية للفائدة المركبة تعطي القيمة المكتسبة لرأسمال الموظف و للحصول على الفائدة الاجمالية نقوم بإجراء الفرق بين القيمة المكتسبة و رأسمال الأول.

$$C_n - C = C(1+i)^n - C = C[(1+i)^n - 1]$$

1-3- أمثلة على حساب القيمة المكتسبة:

مثال:

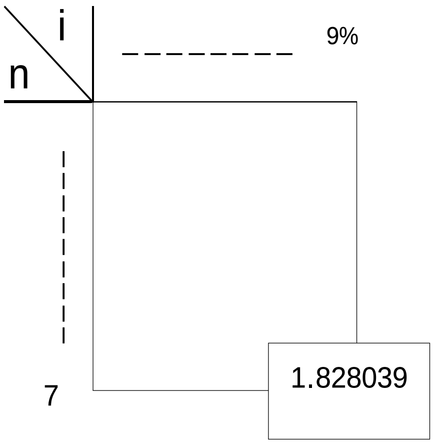
رأسمال بمبلغ 50000 DA يوظف بفائدة مركبة بمعدل سنوي i=0.09 لكل 1 دج مع رسملة سنوية للفوائد.

المطلوب: أحسب القيمة المكتسبة في خلال 7 سنوات.

الحل:

$$n = 7ans, C = 50000, i = 0.09$$

جدول (1)



$$C_n = C(1 + i)^n$$

$$C_7 = 50000(1 + 0.09)^7$$

$$C_7 = 91401.95604$$

حساب الفائدة:

$$C_7 - C = 91401.95604 - 95604$$

$$I = 41401.95604$$

مثال:

رأسمال بمبلغ 10000 يوظف بفائدة مركبة المعدل الفصلي للفائدة 0.025 لكل 1 دج رسملة فصيلة للفوائد.

المطلوب:

أحسب القيمة المكتسبة في خلال 6 سنوات؟

الحل:

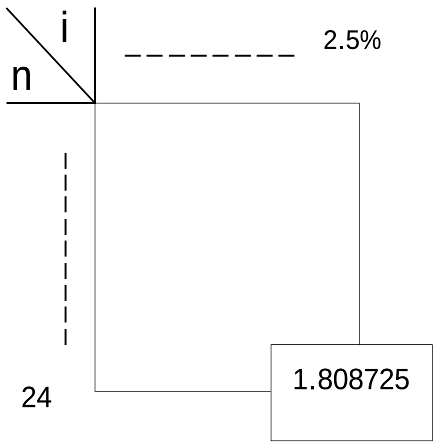
$$n = 6ans, C = 10000, i = 0.025$$

$$n = 6 \times 4 = 24 \text{فصل}$$

$$C_n = C(1 + i)^n$$

$$C_{24} = 50000(1 + 0.025)^{24}$$

$$C_{24} = 18087.2595$$



4-1- استخدام العلاقة الاساسية للقيمة المكتسبة بالفائدة المركبة:

مثال (1): لتكن المعطيات التالية:

$$n = 7ans, C = 20000, i = 0.095$$

رسملة سنوية للفوائد.

المطلوب: حساب القيمة المكتسبة

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_7 = 20000(1+0.095)^7$$

$$C_7 = 37751.03213$$

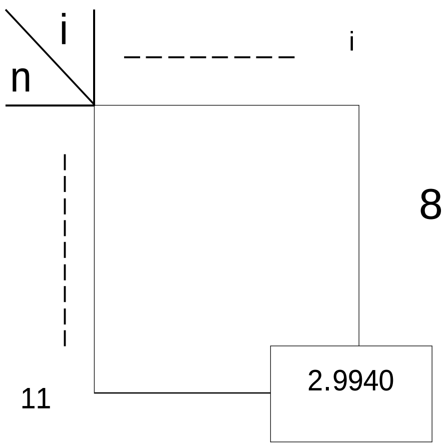
مثال:

حساب المعدل ? = i

$$n = 11ans, C = 30000, C_{11} = 89971.77$$

رسملة سنوية للفوائد.

$$C_n = C(1+i)^n$$



$$C_{11} = C(1+i)^{11}$$

$$89971.77 = 30000(1+i)^{11}$$

$$i = 10.50$$

مثال: البحث عن مدة التوظيف

المعطيات: المعدل السداسي 4.75%،

$$n = ?, C = 40000, C_n = 76597.84$$

الرسملة السداسية للفوائد

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$76597.84 = 40000(1.0475)^n$$

$$(1.0475)^n = \frac{76597.84}{40000}$$

القراءة من الجدول المالي رقم 1 وعند المعدل (4.75) فإن 14 = n.

مثال (4): أصل مبلغه 2000 دج أودع لمدة معينة بمعدل فائدة 6% سنويا ليعطي جملة قدرها 2676.425 دج. حدد هذه المدة؟

الحل:

$$C_n = 2676.425$$

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$2676.425 = 2000(1+0.06)^n$$

ط1:

$$(1+0.06)^n = \frac{2676.425}{2000} = 1.3382125$$

$$n = 5ans$$

ط2:

$$n = \frac{\log(1.3382125)}{\log(1.005)} = 5ans$$

مثال : اوجد المدة اللازمة التي تضاعف مبلغ قدره 1000دج موظف في بنك بمعدل فائدة 5 **%** ؟

الحل :

$$C = 1000, C_n = 2000, i = 5\%, n = ?$$

$$C_n = C(1 + i)^n$$

$$2000 = 1000(1.005)^n$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.005} = 14.20$$

$$14 < n < 15$$

$(1 + 0.05)^n = 2$ $(1 + 0.05)^{14} = 1.979932$	$2.078928 = (1 + 0.005)^{15}$ $1.979932 = (1 + 0.005)^{14}$
الفرق الصغير 0.020068	الفرق الكبير 0.098996
$14.20 = n = 14ans + \frac{\text{فرق.صغير}}{\text{فرق.كبير}}$	المدة: 14 سنة و2 شهر و 12 يوم

مثال: البحث عن رأسمال الموظف

المعطيات:

$$n = 10ans\ , C = ?$$

رسملة سنوية للفوائد.

$$C_{10} = 123661.92$$

المعدل السنوي $i = 0.075$

$$C_n = C(1 + i)^n$$

$$123661.92 = C(1.075)^{10}$$

$$C = \frac{123661.92}{2.061032}$$

$$C = 60000$$

حساب المعدل:

حدد معدل الفائدة الذي بموجبه تصبح قيمة 1000 بعد 10 سنوات جملة بمبلغ 2500 دج.

الحل:

$$C = 1000, C_n = 2500, n = 10, i = ?$$

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$2500 = 1000(1+i)^{10} \Rightarrow (1+i)^{10} = 2.5$$

$$9.5 < n < 9.75$$

$(1+i)^{10} = 2.5$	$2.535393 = (1+0.0975)^{10}$
$(1+0.095)^{10} = 2.478228$	$2.478228 = (1+0.0095)^{10}$
الفرق الصغير 0.021772	الفرق الكبير 0.057165

$$\text{المعدل} = 0.095 + \frac{0.021772}{0.057165}(0.0025) = 0.0059$$

$$i = 9.5959$$

1-5- حساب القيمة المكتسبة في حالة عدد غير كامل للفترات:

مثال: رأسمال بمبلغ بـــ 20000 دج يوظف بفائدة مركبة مع رسملة سنوية للفوائد، المعدل السنوي للتوظيف $i = 0.11$ لكل 1 دج و مدة التوظيف 7 سنوات و 3 أشهر.

المطلوب: حساب القيمة المكتسبة لرأسمال الموظف؟

الطريقة الاولى (الحل العقلاني): نحسب القيمة المكتسبة بعد 7 سنوات من التوظيف ثم نظيف إليها 3 أشهر بفائدة بسيطة.

$$C_7 = 20000(1.11)^7$$

$$C_7 = 20000 \times 2.07616$$

$$C_7 = 41523.20$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 41523.20 + \frac{41523.20 \times 11 \times 3}{1200}$$

$$= 42665.09$$

الطريقة الثانية (التسوية أو التحشية): نقوم بالتسوية الخطية بين C_7وC_8

$$C_7 = 41523.20$$

$$C_8 = 20000(1.11)^8 = 46090.76$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = C_7 + \frac{3}{12}(C_8 - C_7)$$

$$= 41523.20 + \frac{3}{12}(46090.76 - 41523.20) = 42665.09$$

الطريقة الثالثة (الطريقة التجارية): نستعمل الجدول المالي رقم 6 ونبحث عن:

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 20000(1.11)^7(1.11)^{\frac{3}{12}}$$

$$= 42620.66$$

مثال: ما هي جملة مبلغ مقترض 24000 دج لمدة سنتين و 4 أشهر بمعدل فائدة 4%.

الحل :

الطريقة الأولى: $C_{n2} = 24000(1 + 0.04)^2$

$$C_{n2} = 24000 \times 1.081600 = 25958.4$$

$$S = C_2\left(1 + \frac{t}{100} \times \frac{m}{12}\right)$$

$$S = 25958.4\left(1 + \frac{4}{100} \times \frac{4}{12}\right) = 26304.512$$

الطريقة التجارية:

$$C_{n,m} = C(1 + i)^n(1 + i)^{\frac{m}{12}}$$

$$C_{n,m} = 24000(1 + 0.04)^2(1 + 0.04)^{\frac{4}{12}}$$

$$C_{n,m} = 24000 \times 1.081600 \times 1.01316 = 26300DA$$

2- الخصم بالفائدة المركبة – التحين

2-1- العلاقة الأساسية للخصم بالفائدة المركبة:

لنرمز بـــ:V القيمة الاسمية لرأس المال عليه

n: المدة التي تفصل تاريخ التفاوض من تاريخ الاستحقاق

i: المعدل السنوي للخصم.

a: القيمة الحالية في تاريخ التفاوض.

و منه: $a(1+i)^n = V$

القيمة المكتسبة = القيمة الاسمية.

$$a = \frac{V}{(1+i)^n} = V(1+i)^{-n}$$

العلاقة الأساسية:

$$a = \frac{V}{(1+i)^n} = V(1+i)^{-n}$$

المقدار: $(1+i)^{-n}$يعطى بالجدول المالي رقم (2) للفائدة المركبة.

مثال:

ورقة تجارية بقيمة إسمية $V = 100000$تاريخ الاستحقاق 5 سنوات= n و المعدل $i = 0.07$.

المطلوب: أحسب القيمة الحالية بالفائدة المركبة؟

الحل:

$$a = V(1+i)^{-n}$$

$$a = 100000(1.07)^{-5} = 7129860$$

$$e = V - a$$

$$e = 100000 - 7129860$$

$$e = 28701.40$$

2-2- تكافؤ الورقة التجارية أو رؤوس الأموال:

مثال: ورقة تجارية بقيمة اسمية $v_1 = 68024.45$ بتاريخ استحقاق $n = 4ans$ و بمعدل سنوي $i = 8\%$ و في نفس التاريخ ورقة تجارية أخرى بقيمة إسمية $V_2 = 89691.20$ بتاريخ استحقاق $n = 7ans$ و بنفس معدل الخصم $i = 8\%$.

المطلوب: حساب القيمة الحالية لكل ورقة تجارية

الحل:

$$a_1 = V_1(1 + i)^{-n}$$

$$a_1 = 68024.45(1.08)^{-4} = 68024.45 \times 0.73503 = 500000$$

$$a_2 = V_2(1 + i)^{-n}$$

$$a_2 = 85691.20(1.08)^{-7} = 85691.20 \times 0.583490 = 500000$$

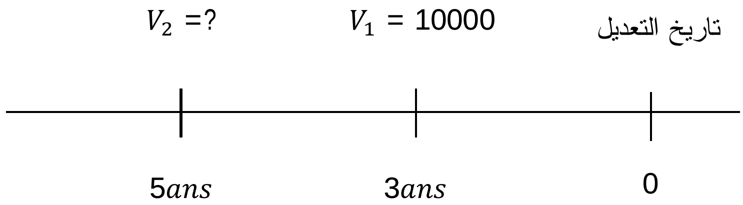
نلاحظ أن هاتين الورقتين التجاريتين ذات قيمتين اسميتين مختلفتين وبتاريخي استحقاق مختلفين و بنفس معدل الخصم لهما في تاريخ الخصم (التفاوض) نفس القيمة الحالية.

3-2- <u>استخدام مبدأ التكافؤ:</u>

يرغب في تبديل ورقة تجارية ذات قيمة اسمية $V_1 = 10000$ بتاريخ استحقاق $n = 3ans$ بورقة تجارية أخرى ذات استحقاق $n = 5ans$ ، $i = 8\%$.

المطلوب:

حساب القيمة الإسمية V_1إجمال بمعدل 8%.



التبديل يكون ممكن إذا كان $a_2 = a_1$

$$a_2 = a_1 \Leftrightarrow V_1(1 + i)^{-n_1} = V_2(1 + i)^{-n_2}$$

$$= 10000(1.08)^{-3} = V_2(1.08)^{-5}$$

$$V_2 = \frac{10000 \times 0.793832}{0.680583} = 11664$$

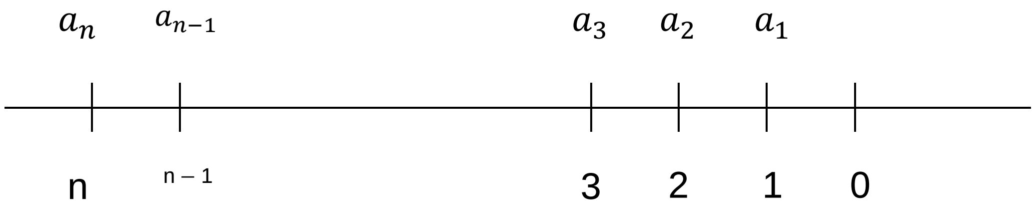
طريقة أخرى للحل:

ضرب الطرفين في 1.08^5

$$V_2 = 10000(1.08)^2 = 11664$$

3- الأقساط والدفعات:

تعني بالأقساط سلسلة تسديدات التي تتم في فترات زمنية ثابتة هذه السلسلة يمكن تمثيلها في شكل التالي:



المصدر:

$$C_n = C(1+i)^n$$

الأقساط المسجلة يمكن أن تكون متساوية أقساط ثابتة أو يمكن أن تكون غير ثابتة أقساط متغيرة.

3-1- القيمة المكتسبة لسلسلة أقساط ثابتة:

$$a_{1n} = a_1(1+i)^{n-1}$$

$$a_{2n} = a_2(1+i)^{n-2}$$

$$a_{3n} = a_3(1+i)^{n-3}$$

$$a_{n-1(n)} = a_{n-1}(1+i)^1$$

2-3- تعريف القيمة المكتسبة:

نفرض سلسلة أقساط ممثلة بـــ n من التسديدات المتساوية هذه التسديدات تحمل فائدة مركبة بمعدل i لكل 1 دج و للمدة التي تفصل بين التسديدين فالقيمة المكتسبة لسلسلة أقساط نرمز لها بـــ و المعبر عنها بتاريخ n مباشرة "تسديد قسط n و الأخير فهي إجمالي القيمة المكتسبة على التوالي لهذه السلسلة n قسط.

حساب القيمة المكتسبة لسلسلة أقساط ثابتة:

القيمة المكتسبة للأقساط	مدة التوظيف مدة الرسملة	تاريخ القسط	رتبة القسط
$a_1(1+i)^{n-1}$	n-1	1	1
$a_2(1+i)^{n-2}$	n-2	2	2
$a_3(1+i)^{n-3}$	n-3	3	3
⋮	⋮	⋮	⋮
$a(1+i)^2$	n(n-2)2	n-2	n-2
$a(1+i)^1$	n(n-1)1	n-1	n-1
$a(1+i)^0 = a$	n-n=0	n	n
V_n			

$$\text{مجموع حدود متتالية هندسية} = \text{الحد الأول}\ \frac{\text{الأساس} - 1}{\text{الأساس} - 1}$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

المقدار $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ يعطى بالجدول المالي رقم 3.

حساب القيمة المكتسبة لسلسلة بها 15 قسط:

n=15 , a=10000, i=8.5%, V_n =?

$$V_{15} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{15} = 10000\frac{(1.085)^{15} - 1}{0.085}$$

$$V_{15} = 10000 \times 28.232269$$

$$V_n = 282322.69$$

إجمالي الفوائد المولدة هي:

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$I = C_n - C$$

$$I = V_n - n$$

$$I = 282322.69 - 15(0.085)$$

$$I = 132322.69$$

مثال: حساب القسط الثابت

نفرض تحويل $V_n = 100000$ في 2017/04/15 قام أحد المدخرين بإيداع تسديدات سنوية ثابتة.

التسديد الأول: 2017/04/15.

التسديد الأخير: 2027/04/15.

معدل الرسملة i = 10%.

المطلوب: حساب مبلغ القسط الثابت؟

$$a = ?$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

من 2017 إلى 2027 يوجد n = 11 قسط

$$a = \frac{V_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{100000}{\frac{(1.10)^{11} - 1}{0.10}} = \frac{100000}{18.531167}$$

$$a = 53963.4$$

مثال:

$$n=18,\ a=5000,\ i=?,\ V_{18}=200000$$

المطلوب: حساب معدل الرسملة؟

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Leftrightarrow \frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^{18}-1}{i} = \frac{V_{18}}{a} = \frac{200000}{5000} = 40$$

المقدار 40 عند مدة 18 من الجدول المالي رقم 3 نجده محصور بين المعدلين 8.50%

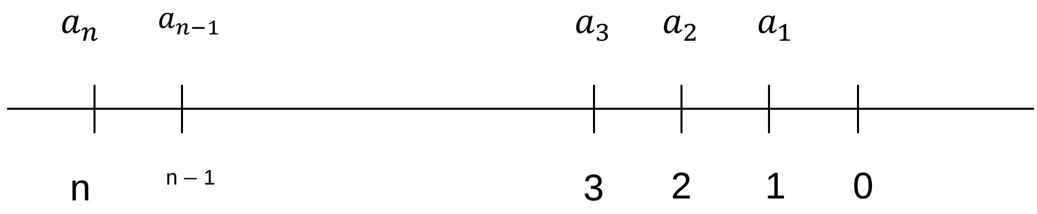
و 8.75% نقوم بالتسوية الخطية بين المعدلين:

$$i = 8.5 + (8.75-8.5)\frac{40-39.322995}{40.298600-39.322995} = 8.67\%$$

$$i = 8.67\%$$

مثال: حساب عدد الأقساط (العدد يجب أن يكون كاملا).

$$n=?,\ a=20000,\ i=7.5\%,\ V_n=200000$$

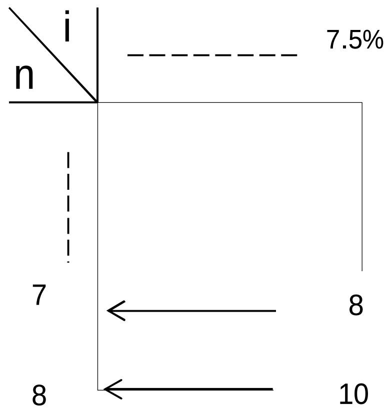


$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{(1+0.075)^n - 1}{0.075} = \frac{V_n}{a} = \frac{200000}{20000} = 10$$

استعمال الجدول المالي رقم 03 و عند المعدل 7.5% فإن المقدار فهو محصور بين

$n = 7$ و $n = 8$.



عدة حلول يمكن استخدامها و نختار حلين:

الحل1:

نختار الحد الأدنى بمعنى $n = 7$ أي 7 أقساط و نقوم بالزيادة في القسم السابع و الأخير

بمقدار x وعليه:

$$200000 = 20000\frac{(1.07)^7 - 1}{0.075} + x$$

$$200000 = 20000 \times 8.0787321 + x$$

$$x = 24253.58$$

وبالتالي هناك تسديد لــ 6 أقساط ثابتة المبالغ 20000 والقسط السابع و الأخير يسدد بمبلغ:

$$24253.58 + 20000 = 44253.58$$

الحل 2:

نختار عدد الأقساط بأن تكون 8 أي $n = 8$ و نقوم بالتخفيض في قيمة القسط الثامن و الأخير بمقدار y.

ومنه:

$$200000 = 20000\frac{(1.075)^7 - 1}{0.075} + y$$

$$200000 = 20000 \times 10.44631 + y$$

وعليه:

$$y = 8927.42$$

وعليه فإن هناك تسديد لــ 7 أقساط ثابتة بمبلغ 20000 أما القسط الثامن والأخير بمبلغ: $20000 - 8927.42 = 11072.58$.

مثال: ما هو عدد الأقساط الثابتة بمبلغ 10000 الواجب تسديدها للحصول على مبلغ رأس مال قدره 150000 رسملة بمعدل 7**%** أعط حلين لهذا.

المدة يجب أن تكون كاملة:

دفعات عددها 12 وقيمة الدفعة 1000 دج

الحد الأعلى: $n = 13$ أقل 1000

$$a = 90000\left(\frac{0.08}{1-(1+0.08)^{-13}}\right)$$

$$a = 930.44DA$$

الدفعة تساوي 1000 دج وإضافة الباقي للدفعة الأخيرة

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} = 1000 \times 18.97712$$

$$V_n = 18977.12$$

$$20000 - 18977.12 = 1022.87$$

الدفعة رقم 12: $1022.87 - 1000 = 22.87$

3-3- قيمة في حالة تسديدات ثابتة غير سنوية:

مثال: أحسب القيمة المكتسبة لـــ 40 قسط ثابت.

القسط الفصلي: $n = 40, a = 2000, i_4 = 2\%, V_n = ?$.

ملاحظة:

نلاحظ أن المعدل يتوافق مع فترة التسديدات فهناك تطبيق.

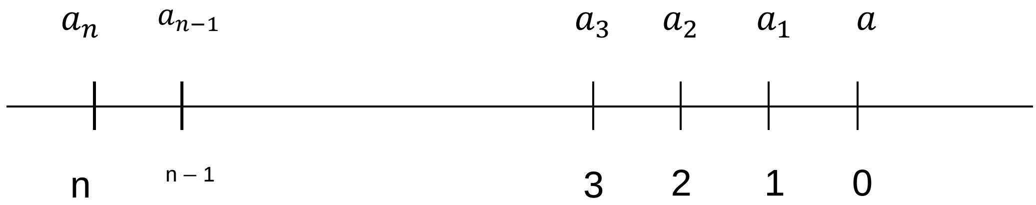
أحسب القيمة المكتسبة لـــ 84 قسط شهري.

$$n = 84, a = 1000, V_{84} = ?$$

المعدل السنوي: $i = 10\%$.

نلاحظ أن المعدل لا يتوافق مع فترة التسديدات.

4-3- القيمة الحالية لسلسلة أقساط ثابتة:



القيمة الحالية v_0

$$V_0 = V(1 + i)^{-n}$$

$$a_1 = a_1(1+i)^{-1}$$

$$a_2 = a_2(1+i)^{-2}$$

$$a_n = a_n(1+i)^{-n}$$

تعريف القيمة الحالية:

القيمة الحالية لسلسلة أقساط ثابتة و نرمز لها بـــ v_0هي المجموع المعبر عنه قبل التسديد للقسط الأول للقيم الحالية للقسط الأول المعبر عنها في تاريخ 0 و باستعمال معدل الخصم i الموافق لفترة سلسلة أقساط.

رتبة الأقساط	تاريخ التسديد	عدد الفترات	القيمة الحالية للأقساط المعبر عنها عند التاريخ 0
1	1	n-1	$a(1+i)^{-1}$
2	2	n-2	$a(1+i)^{-2}$
3	3	n-3	$a(1+i)^{-3}$
⋮	⋮	⋮	⋮
n-2	n-2	n-2	$a(1+i)^{-(n-2)}$
n-1	n-1	n-1	$a(1+i)^{-(n-1)}$
n	n	n	$a(1+i)^{-n}$
			V_0

$$\frac{a(1+i)^{-(n-1)}}{a(1+i)^{-n}} = \frac{(1+i)^{-n+1}}{(1+i)^{-n}} = \frac{(1+i)^{-n}(1+i)^{1}}{(1+i)^{-n}}$$

مجموع متتالية هندسية = الحد الأول $\dfrac{\text{الأساس} - 1}{\text{الأساس} - 1}$

$$V_0 = a(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

العلاقة الأساسية:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

إذا قرأنا الجدول من تحت إلى فوق نلاحظ أن القيم الحالية للأقساط تمثل فيما بينها متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ و الحد الأول هو و عدد الحلول n أي:

المقدار $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

يقرأ من الجدول المالي رقم 4.

مثال:

حساب القيمة الحالية لسلسلة من 15 قسط ثابت بمبلغ $a = 1000$ و معدل الخصم $i =$ 8%، $n = 15, V_0 = ?$.

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1000\frac{1-(1.08)^{-15}}{0.08}$$

$$V_0 = 1000 \times 8.5574.79 = 8559.48$$

مثال:

حساب القسط الثابت، 10 أقساط ثابتة$n = 15$، تخصم بمعدل $i = 10.5\%$، $V_0 = 200000$

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_0}{\frac{(1-1.05)^{10}}{0.105}} = \frac{200000}{6.014773}$$

$$a = 33251.40$$

$$v_0 = 90000$$

4- اهتلاك القروض:

القرض العادي هو الذي استلم من عند مقرض واحد إن الدفعة المدروسة سابقا تحتوي على ما يسمى بخدمة الدين أي فائدة المبلغ من جزء القرض المتبقي زائد الجزء الواجب التسديد والذي يعرض للاستهلاك.

K: أصل القرض.

D: الجزء من القرض المتبقي بعد.

$m_1, m_2, \dots, m_n$:, الاستهلاكات.

D_0: قيمة القرض قبل الدفعة الأولى.

D_1: قيمة القرض بعد الدفعة الأولى.

i: المعدل.

n: الفترة أو عدد الأقساط.

$I_1, I_2, \dots, I_n$: الفوائد.

4-1- التسديد لمرة واحدة بعد انقضاء n سنة.

المقترض يمكن أن يكتفي بالتسديد للمقترض في نهاية كل سنة من التاريخ (1) إلى التاريخ $(n-1)$ الفائدة السنوية a_i و نلاحظ حسب هذه الطريقة أن المدين ما يلي:

$$a_1 = k_i + m_1$$

لا يسدد أي شيء من دينه ولا يزيد فيه أيضا لأنه لا يسدد الفوائد و في نهاية المدة n سنة يسدد كامل المبلغ القرض k في نفس الوقت الذي يسدد فيه الفائدة I_i للسنة الأخيرة.

4-2- طريقة الاهتلاك المتزايد:

الطريقة أخرى للتسديد أكثر استعمالا الطريقة الأولى و هي كالتالي: في نهاية سنة الأولى من القرض في التاريخ المقترض يسدد إلى مقرضه القسط الأول a_1يفوق الفائدة k_iوبالتالي يسدد للفائدة فقط للسنة الأولى و إنما أيضا يسدد مبلغ الدين و من هنا يمكننا كتابة ما يلي:

$$a_1 = k_i + m_1$$

الفترة	الدين في بداية الفترة	الفائدة م في نهاية الفترة	الاهتلاك في نهاية الفترة	القسط في نهاية الفترة
1	$k = D_0$	k_i	m_1	$a_1 = k_i + m_1$
2	$D_1 = D_0 - m_1$	$D_1 i$	m_2	$a_2 = D_i + m_2$
3	$D_2 = D_1 - m_2$	$D_2 i$	m_3	$a_3 = D_i + m_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$D_{p-1} = D_{p-2} - m_{p-1}$	$D_{p-1} i$	m_p	$a_p = D_{p-1} i + m_p$
$n-1$	$D_{n-2} = D_{n-3} - m_{n-2}$	$D_{n-2} i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2} + m_{n-1}$

تعليق: نلاحظ ما يلي:

1. مجموعة n الاهتلاك من $m_1.....m_n$ يساوي إلى k
2. اهتلاك m_n الموجود في استحقاق الأخير a_n يجعل الدين معدوم.

4-3- اهتلاك القروض بأقساط ثابتة: (إعداد جدول الاهتلاك)

باستعمال الرموز التالية:

a: مبلغ القسط الثابت.

n: عدد الأقساط المخصصة لخدمة الدين (فترة القرض)

i: معدل الفائدة لـــ 1 دج.

k: مبلغ القرض الأصلي.

$$k = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = \frac{k}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$k = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

مثال:

قرض بقيمة اسمية $k = 1000000DA$ منح لمدة 5 سنوات و معدل فائدة $i =$ 10% خدمة الدين قيم ضمانه بأقساط ثابتة.

حساب قسط الثابت a و إعداد جدول الاهتلاك.

$$a = k\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 1000000\frac{0.10}{1-(1+0.10)^{-5}}$$

باستخدام الجدول المالي رقم 5 نجد:

$$a = 1000000 \times 0.26379748$$

$$a = 2637974.8$$

الفترة	الدين	الفائدة	الاهتلاك	القسط الثابت
1	1000000	1000000	1657974.8	2637.9748
2	8362025.20	83620852	1801732.28	//
3	65602	656025.29	1981949.5	//
4	4572303.78	457830.34	2180144.46	//
5	2398158.95	2390.82	239158.95	//
			1000000	

نعلم أن الاستهلاكات في جدول الاستهلاكات أنها متزايدة من سنة لأخرى و نلاحظ بكل سهولة أن هذه الاستهلاكات تمثل فيما بينها متتالية هندسية ذات أساس $= 1 + i$ 1.10

وبالتالي فعندما يكون الاهتلاك للقرض حسب نظام للأقساط الثابتة فإن الاهتلاكات المتضمنة لهذه الأقساط فهي متتالية هندسية ذات أساس $1 + i$ و عليه فإن الاهتلاك من الصف p فهو مرتبط بالاهتلاك الأول عن طريق العلاقة التالية:

$$m_p = m_1(1+i)^{p-1}$$

مثال:

$$m_2 = m_1(1+i)^{p-1}$$

$$m_5 = m_1(1+i)^4$$

الاهتلاك الأول:

نعلم أن المجموع nاهتلاك يساوي إلى kو لقد بينا أن الاهتلاكات هي متتالية هندسية ذات أساس $(1+i)$ و بدلالة الاهتلاك الأول (m_1) فإن مجموع الاهتلاكات تساوي إلى k يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$k = m_1 \frac{(1+i)^{-n} - 1}{i}$$

ومنه:

$$m_1 = \frac{k}{\frac{(1+i)^{-n}-1}{i}}$$

ويمكن أيض القراءة من الصف الأول من الاهتلاك:

$$a_1 = k_i + m_1$$

$$m_1 = a_1 - k_i$$

ومنه:

$$m_1 = k\frac{i}{1-(1+i)^n} - k_i$$

$$m_1 = k\left[\frac{i}{(1+i)^{-n}} - i\right]$$

الاهتلاك الأخير:

بالقراءة من السطر الأخير من جدول الاهتلاك:

$$a = D_{n-1}i + m_n$$

ونعلم أن الاهتلاك الأخير يساوي إلى باقي القرض في بداية الفترة الأخيرة أي:

$$D_{n-1}i = m_n$$

$$a = m_1 i + m_n$$

$$a = m_n(1+i)^n$$

مثال:

قرض مبلغ 10000 يسدد بـــ 5 دفعات سنوية متساوية بمعدل فائدة سنوي 8**%.**

الدفعة 1 تسدد بعد سنة من استلام القرض.

المطلوب: - حساب قيمة الدفعة الثابتة؟

- إعداد جدول استهلاك القرض؟

الحل:

أصل القروض: القيمة الحالية لجملة الدفعات.

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$k = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = k\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$10000\frac{0.08}{1-(1.08)^{-5}} = 10000 \times 0.250456$$

$$a = 2504.56$$

الدفعة 1: $a_1 = k_i + m_1$

	القرض في بداية المدة	الفائدة	الاستهلاك	الدفعة	القرض في نهاية
1	10000	800	1704.56	2504.56	8295.44
2	8295.44	663.63	1840.92	2504.56	
3	6454.51	516.36	1988.19	2504.56	
4	4466.31	357.30	2147.25	2504.56	
5	2319.06	189.52	2319.03	2504.56	0

$$m_2 = m_1(1 + i)$$

$$m_3 = m_2$$

$$k = D_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \cdots + m_n$$

$$k = m_1 + m_1(1 + i) + m_1(1 + i)^2 + \cdots$$

$$k = m_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$k = 1704.56 \frac{(1 + 0.08)^3 - 1}{0.08} = 5537.09$$

$$10000 - 5537.09 = 4462.91$$

حساب قيمة الدفعة عن طريق الاستهلاك الأخير:

الاستهلاك الأخير ما هو إلا القيمة الحالية للدفعة:

$$m_n = a(1 + i)^{-1} = 2504.56(1.08)^{-1} = 2319.03$$

$$m_5 = m_1(1 + i)^{-4}$$

$$m_5 = 2504.56(1 + 0.08)^{-4} = 1840.92$$

مثال: قرض 100000 يسدد بـــ 180 قسط ثابت شهري معدل الفائدة السنوي 14%.

المطلوب: تقديم 3 أسطر الأولى من جدول الاهتلاك.

تقديم السطر الأخير من جدول الاهتلاك.

الحل:

$$(1 + i_{12})^{-12} = (1 + i)$$

إيجاد القسم الثابت a:

$$a = k\frac{i_{12}}{1 - (1 + i_{12})} - 180$$

$$a = 100000\frac{i_{12}}{1 - (1 + i_{12})} - 180$$

يجب إيجاد المعدل المكافئ i للمعدل السنوي:

$$(1 + i_{12})^{-12} = (1 + i) = 1.14$$

$$(1 + i_{12})^{-12} = 1.14 \Longrightarrow [(1 + i_{12})^{-180}] = [(1 + i_{12})^{-12}]^{-15}$$
$$= [1 + i]^{-15} = (1.14)^{-15}$$

البحث عن المعدل المكافئ i_{12}:

$$(1 + i_{12})^{12} = (1 + i) = 1.14 \Rightarrow 1 + i_{12} = 1.14^{\frac{1}{12}} = 1.01978852$$

ومنه:

$$i_{12} = 0.197885$$

$$a = 100000\frac{0.01097885}{(1 - 1.14)^{-15}}$$

$$a = 100000\frac{0.01097885}{1 - 014007648}$$

a = 1276.76

i = 0.0107885

السطر 180:

m_{180} = $a(1 + i)$ = 1276.76(1.01087885)$^{n-1}$

m_{180} = 1262.89

تمارين مقترحة

الفـــــائـــــــــدة المـــركبــــــــة

التمرين الأول:

1- ما هي جملة أصل قدره 12000 د.ج مودع في البنــك لمــدة 5 ســنوات بمعــدل فائدة 4% للسداسي؟

2- ما هي جملة مبلغ مقترض 24000 د.ج لمــدة ســنتين و4 أشـــهر بمعــدل فائـــدة 4 % ؟

3- أصــــل مبلــــغ 2000 د.ج أودع لمــــدة معينــــة بمعـــدل فائـــدة 6 % ســــنويا ليعطي جملة قدرها 2676.452 د.ج، حدد هذه المدة؟

4- أحسب المدة التي يتضاعف فيها مبلغ 1000 دج بمعدل فائدة مركب 5 % سنويا؟

5- مبلـــغ أصــــلي قـــدره 30000 د.ج أودع البنـــك بمعـــدل فائـــدة مركـــب لمـــدة 4 ســــنوات لتكــــون جملتـــــه 40438.08 د.ج ، أحســــب معــــدل الفائــــدة المستعمل؟

6- حدد معدل الفائدة الــذي بموجبــه تصــبح قيمــة 1000 د.ج بعــد 10 ســنوات جملة بمبلغ 2500 د.ج.

التمرين الثاني:

1- أعد جدولا فيه القيمة المكتسبة السنوية بمبلغ موظف في البنك قدره 10000دج بمعدل فائدة مركب 6 % لمدة 5 سنوات.

2- يريد تاجر تكوين رأس مال، ولذلك وضع في البنك ولمدة 5 سنوات مبلغ 20000 د.ج بمعدل فائدة سداسي 6 %.

المطلوب: حساب الجملة المكتسبة.

3- أحسب باستعمال الحل العقلاني والتجاري، الجملة المكتسبة لمبلغ 3000 د.ج موظف لدى البنك بمدة 4 سنوات وستة أشهر بمعدل فائدة سنوي 8 %.

التمرين الثالث:

في أول أفريل 1985، اقترض شخص مبلغا ماليا ، ليسدده في أول فيفري 1992 بقيمة 100000.د.ج .

1- أحسب قيمة رأس المال المقترض .

2- أحسب الجملة المسددة لو تم الدفع مسبقا في فيفري 1988 .

3- أحسب الجملة القابلة للتسديد لو تم تأجيل الدفع حتى 1995.

معدل الفائدة المركبة 9 %.

<u>التمرين الرابع:</u>

1- اقتــرض شــخص مبلــغ 20000 د.ج لمــدة ســنتين وثلاثــة أشــهر بمعــدل 8 %.

المطلوب: حساب المبلغ الواجب تسديده للدائن.

2- أحسب المدة اللازمة التي يتضاعف فيها مبلغ ما مودع بمعدل فائدة مركب سداسي يساوي 3.75 %.

3- في 1976/7/1 اقتــرض شــخص مبلغــا ماليــا، ليســدد فــي 1987/01/01، الجملة 204000 د.ج، القيمة الحالية 120000 د.ج.

المطلوب: حساب معدل الفائدة المركبة.

4- يريد شخص تكوين رأس مال قدره 160000 د.ج بعد 6 سنوات ونصف، بمعدل فائدة مركب 6 %.

5- مبلــغ 30000 دج بقــي فــي البنــك لمــدة ســنتين بمعــدل 6 % ، أحســب المدة اللازمة لنفس المبلغ بمعدل فائدة بسيط لكي يعطي نفس الجملة.

التمرين الخامس:

تريد مؤسسة شراء استثمار، ولذلك قامت بإيداع عدة مبالغ في البنك بمعدل فائدة 5 %.

تاريخ الايداع	المبلغ
أول جانفي 1988	60000 دج
أول جانفي 1990	36000 دج
أول جانفي 1991	90000 دج
أول جويلية 1991	50000 دج

المطلوب: حساب جملة المبالغ في آخر 1991.

الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية

التمرين الأول:

7- أحسب مبلغ الخصم لورقة تجارية بقيمة اسـمية4000 د.ج تسـتحق الـدفع بعـد سنتين بمعدل فائدة 6% ؟

8- دين قدره 1000 د.ج يستحق الدفع بعد 4 سـنوات ، فمـا هـي قيمـة الـدين إذا ما تم الدفع كالأتي:

- ✓ 2 سنة قبل تاريخ الاستحقاق؛
- ✓ 3 سنوات بعد تاريخ الاستحقاق؛
- ✓ 5 سنوات قبل تاريخ الاستحقاق.

يعطى معدل الفائدة المركبة 8 % ؟

9- شخص مدين بمبالغ التالية:

- ✓ 50000 د.ج يستحق بعد 6 سنوات؛
- ✓ 60000 د.ج يستحق بعد 8 سنوات.

يريـد تسـوية مـدين الـدينين بمبلغـين آخـرين، الأول قـدره 40000 د.ج يدفع بعد 4 سنوات والآخر بعد 10 سنوات بمعدل فائدة 6 % سنويا.

المطلوب: أحسب قيمة المبلغ الآخر؟

التمرين الثاني:

4- مؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

- ✓ 2000 د.ج تستحق بعد سنة؛
- ✓ 4000 د.ج تستحق بعد سنتين؛
- ✓ 3000 د.ج تستحق بعد 3 سنوات.

تريد معرفة التاريخ الذي يمكنها من أن تستبدل فيه هذه الديون بدين واحد قدره 9000 د.ج بمعدل فائدة 04 % سنويا.

5- زبون مدين لمؤسسة بمبلغ 700000 د.ج يسدده بعد 6 سنوات، اتفقت معه بطلب منه بعد مرور سنة كاملة أن يقلص مدة الدين إلى أربع سنوات عوض 6 سنوات.

المطلوب: أحسب القيمة الاسمية للدين إذا كان معدل الفائدة 08 % سنويا.

6- مؤسسة مدينة بثلاثة أوراق تجارية:

- ✓ 25000 د.ج تاريخ استحقاقها بعد 04 سنوات؛
- ✓ 40000 د.ج تاريخ استحقاقها بعد سنتين؛
- ✓ 35000 د.ج تاريخ استحقاقها بعد سنة؛

المطلوب: أحسب تاريخ الاستحقاق المتوسطة لهذه الأوراق بمعدل فائدة فيها 12 %.

اهتــلاك القـــــروض

التمرين الأول:

تحصلت مؤسسة على قــرض يقــدر بــــ 600000.00 دج ليســـدد خـــلال 6 سنوات بمعدل فائدة 10 % سنويا و بدفعات ثابتة.

المطلوب:

- انجاز جدول اهتلاك القرض مع إحتساب كل من :
  - قيمة الفائدة الأولى.
  - قيمة الدفعة الأولى.
  - قيمة الاهتلاك.

التمرين الثاني:

يسدد قرض بـــ 10 أقســاط ثابتــة ومعـــدل 08 % ؛ مـــن جـــدول الاهـــتلاك القرض لدينا مجموع الاهتلاكين الأول والأخير يساوي 437010.96 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة الاهتلاك الأول والأخير؟
- أحسب مبلغ الدفعة الثابتة؟
- أحسب أصل القرض؟

التمرين الثالث:

قرض تم منحه بمعدل سداسي 4.25 %، و يهتلك بواسطة أقساط سداسية بمبلغ كل واحد منها 2620.92 دج . مبلغ الاهتلاك الأخير يتجاوز مبلغ الاهتلاك الأول بـــ 2018.15 دج.

المطلوب: حساب مبلغ رأس المال المقترض.

التمرين الرابع:

قرض يتم تسديده بواسطة 12 قسطا ثابتا، يعطي ما يلي:

$m_1+m_2=13515.22$

$m_2+m_3=14528.86$

المطلوب: حساب ما يلي: i , m_1 , m_{12} , a , k

قائمة المراجع:

1) بركات أحمد، الرياضيات المالية، دار بلقيس، الجزائر، 2014.

2) بن طلحة صليحة، الرياضيات المالية، منشورات الدار الجزائرية، الجزائر، 2015.

3) رحيم حسين، أساسيات نظرية القرار والرياضيات المالية، دار إقرأ، الجزائر، 2011.

4) منصور بن عوف عبد الكريم، الرياضيات المالية (99 تمرين محلول)، ط6، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.

5) منصور بن عوف عبد الكريم، الرياضيات المالية، ط6، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.