Chapitre 3 : Principe du minimum de Pontriaguine

1. Introduction

Le Principe du minimum, est l'une des deux grandes formulations de la théorie générale de la commande optimale, l'autre étant la Programmation dynamique. Ces deux approches ont chacune leur intérêt propre et sont complémentaires. L'une se déduit de l'autre, mais sous des hypothèses trop restrictives pour nombre d'applications.
Le Principe du minimum est une généralisation du calcul des variations. Ce principe nous donne une condition nécessaire du premier ordre, d'optimalité locale, que doit vérifier toute solution potentielle d'un problème de commande optimale.

Soit un système régi par une équation d'état : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ (1)

$\dot{x}(t)$ représente l'évolution du système au cours du temps qui est régie par une transformation f qui dépend :

- Du vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$,
- Du temps t,
- Et de la commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$ qui permet d'agir à tout instant t sur le système.

Le principe du minimum consiste à déterminer, si elle existe, une commande u^* minimisant, sur un ensemble U des commandes admissibles, un critère J de la forme :

$$J = h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)dt \qquad (2)$$

En faisant appel aux méthodes classiques de calcul des variations on a

$$h\big(x(t_f), t_f\big) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{dh(x(t),t)}{dt} dt + h(x(t_0), t_0) \qquad (3)$$

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2) on obtient :

$$J = h(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (L(x(t), u(t), t) + \frac{dh(x(t),t)}{dt})dt \qquad (4)$$

En utilisant les dérivées partielles, on obtient :

$$J = h(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial h(x(t),t)}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t),t)}{\partial t})dt \qquad (5)$$

On a suppose que t_0 et x_0 sont fixées (constantes) et connues, alors $h(x(t_0), t_0)$ est constante.
La solution optimale $u^*(t)$ qui minimise le critère (1), minimise aussi le critère suivant :

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} (L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial h(x(t),t)}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial h(x(t),t)}{\partial t})dt \qquad (6)$$

Afin de réduire le problème avec contraintes d'égalités en un problème sans contraintes, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On introduit le vecteur $\lambda(t)$ appelé vecteur adjoint (co-état), associé aux équations d'état du système considéré. Ce vecteur adjoint est utilisé pour former un nouveau critère J_2 qui prend en considération le critère à optimiser J_1 et les contraintes de type égalité qui se mettent sous forme :

$$f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) = 0 \qquad (7)$$

Le nouveau critère J_2 s'écrit :

$$J_2 = h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} (L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)))dt \tag{8}$$

On définit la fonction hamiltonienne (Hamiltonien) come suit :

$$\mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \lambda, \mathrm{t}) = L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) \tag{9}$$

Alors l'équation (8) se réécrit sous la forme :

$$J_2 = h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \lambda, \mathrm{t}) - \lambda^T(t)\dot{x}(t))dt \tag{10}$$

Le principe de Pontriaguine énonce que si $u^* \in U$ est une commande optimale, alors

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \le H(x^*, u, \lambda^*, t) \;\; \forall\, u \in U, \forall\, t \in [t_0, t_f] \tag{11}$$

où x^* (*t*) et λ^* (*t*) sont respectivement l'état et l'état adjoint optimaux.

En utilisant la règle de Leibnitz, la variation de J_2 en fonction de la variation de x, u, λ et t, donne :

$$dJ_2 = (\frac{\partial h}{\partial x})^T \partial x_f + \frac{\partial h}{\partial t}\partial t_f + (H - \lambda^T \dot{x})\partial t_f + \int_{t_0}^{t_f} [\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right)^T \partial x + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\right)^T \partial u - \lambda^T \partial \dot{x} + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda} - \dot{x}\right)^T \partial \lambda] dt \tag{12}$$

Le calcul des variations permet de définir un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations correspondent aux équations canoniques de Hamilton qui régissent les dynamiques de l'état, de l'état adjoint, la condition de stationnarité et les conditions aux limites (équations de transversalité) et sont données par les équations (16), (17), (18) et (19).

En élimine la variation en $\dot{x}$, en intégrant par partie :

$$-\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \partial \dot{x} dt = -\lambda^T \partial x_f + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \partial x dt \tag{13}$$

Sachant que :

$$dx_f = \partial x_f + \dot{x}_f dt_f \tag{14}$$

$$dJ_2 = (\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda)^T \partial x_f + (\frac{\partial h}{\partial t} + H)\partial t_f + \int_{t_0}^{t_f} [\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \dot{\lambda}\right)^T \partial x + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\right)^T \partial u + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda} - \dot{x}\right)^T \partial \lambda] dt \tag{15}$$

L'équation $dJ_2 = 0$ donne les conditions d'optimalité suivantes :

1- $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda} = \dot{x}$ l'équation d'état (16)
2- $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = -\dot{\lambda}$ l'équation d'état adjointe (17)
3- $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = 0$ condition de stationnarité (18)
4- $(\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda)^T \partial x_f + \left(\frac{\partial h}{\partial t} + H\right)\partial t_f = 0$ conditions de transversalité. (19)

Selon la définition des valeurs des conditions finales, on a différents problèmes de commande optimale.

- Si $x(t_f)$ est fixé et t_f est libre, alors $\partial x_f = 0$, $\partial t_f \neq 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} + H = 0$
- Si t_f est fixé et $x(t_f)$ est libre , alors $\partial x_f \neq 0$, $\partial t_f = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda = 0$
- Si $x(t_f)$ et t_f sont fixés, alors $\partial x_f = 0$ et $\partial t_f = 0$ alors les deux termes de (19) sont nuls. On n'a pas de conditions finales à déterminer par (19).
- Si $x(t_f)$ et t_f sont libres, alors $\partial x_f \neq 0$, $\partial t_f \neq 0$, $\frac{\partial h}{\partial t} + H = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda = 0$

Exemple : Soit le problème de commande optimale suivant :
Minimiser $J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)^2 + u(t)^2)dt$

Soumis à : $\dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 0, x(1) = 1\ et\ u(t) \in \mathbb{R}$

Premièrement on construit l'Hamiltonnien :
H(x,u, λ)= $\frac{1}{2}(x(t)^2 + u(t)^2)$+ λu
Deuzièment on donne les équations canoniques de Hamilton :

1- $\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda} = u(t)$
2- $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = -x(t)$
3- $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = u + \lambda = 0$

Puisque $x(t_f)$ et t_f sont fixés, alors on n'a pas de conditions finales à déterminer.

A partir de la troisième équation canonique d'Hamilton on a : $u(t) = -\lambda(t)$
En remplaçant u(t) par sa valeur dans la première équation canonique on a :

$\dot{x}(t) = -\lambda(t)$, ceci implique que $\ddot{x}(t) = x(t)$ et cette équation différentielle a pour équation caractéristique le polynôme : $P_c = p^2 - 1$
$\Delta = 4$ et les racines sont p1=1 et p2=-1

La solution est donc : $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ avec $c_1\ et\ c_2 \in \Re^2$

En utilisant les conditions initiales et finales on a :

$x(0) = c_1 + c_2 = 0$ ceci implique que : $c_1 = -c_2$

$x(1) = c_1 e + c_2\, e^{-1} = -c_2 e + c_2\, e^{-1} = 1$ ce qui donne $c_2 = \frac{1}{-e + e^{-1}}$ et $c_1 = \frac{1}{e - e^{-1}}$

$x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$,

$$u^*(t) = \dot{x}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e - e^{-1}}$$