Université de Mohammed Boudiaf, M'sila | Faculté des mathématiques
Master 1 : Analyse fonctionnelle , 2019/2020 | Mr. Bougherara Brahim

Module : **Formulation variationnelle**

Chapitre II : Espaces de Sobolev (2)

Table des matières

1 Densité dans $\mathbb{R}^N$

En pratique, beaucoup de formules et de résultats sont faciles à démontrer pour des fonctions régulières et peuvent être généralisés aux fonctions arbitraires grâce à l'argument de densité. Pour cela on va étudier la question d'approximation des fonctions de $W^{1,p}$ par des fonctions régulières. L'idée est d'utiliser les fonctions régularisantes pour l'approximation :

Définition 1.1. *Une fonction régularisante est une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui s'annule en dehors d'une boule et satisfait*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Un exemple important de ce type des fonctions est la fonction suivante

$$\rho(x) = \begin{cases} c\exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $c > 0$ est choisit de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$. Il est facile de vérifier que $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{supp}\rho = B(0,1)$. On accepte le résultat suivant concernant les espaces de Lebesgue Lp

Théorème 1.1. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $u \in L^p(\Omega)$, on a*

$$\boxed{\rho_n \star u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \quad et\ \rho_n \star u \longrightarrow u \ dans\ L^p(\Omega).}$$

Où

$$\boxed{\rho_n(x) := n^N\rho(nx), \quad \textit{et } \rho_n \star u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)u(y)\mathrm{d}y.}$$

Corollaire 1.1.1. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \le p < \infty$.*

Démonstration. Soit $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Alors, d'après le théorème 1.1,

$$\boxed{\rho_n \star u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \quad \rho_n \star u \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega).}$$

Et on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \le k$

$$\boxed{\mathrm{D}^\alpha(\rho_n \star u) = \rho_n \star \mathrm{D}^\alpha u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N) \ \text{ et } \mathrm{D}^\alpha(\rho_n \star u) \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N).}$$

Par conséquent

$$\rho_n \star u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \rho_n \star u \longrightarrow u \ \text{ dans } W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

□

Théorème 1.2. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \le p < \infty$.*

Démonstration. Il suffit de construire une suite de fonction $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ converge vers u dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Considérons la fonction de troncature $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, qui vérifie

$$\zeta \equiv 1 \text{ sur } B(0,1), \ \operatorname{supp}\zeta \subset B(0,2) \text{ et } 0 \le \zeta \le 1.$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n par

$$\phi_n(x) = \zeta(x/n)(\rho_n \star u) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

D'après le corollaire précédente, on a

$$\rho_n \star u \longrightarrow u \text{ dans } \ \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N),$$

mais $\rho_n \star u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour conclure il suffit de montrer que

$$\rho_n \star u - \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \ \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\phi_n - \rho_n \star u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \underbrace{\int_{\{|x|<n\}} |\phi_n - \rho_n \star u|^p \mathrm{d}x}_{=0} + \int_{\{|x|>n\}} |\phi_n - \rho_n \star u|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_{\{|x|>n\}} |\zeta(x/n)(\rho_n \star u) - \rho_n \star u|^p \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\{|x|>n\}} |\rho_n \star u|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\{|x|>n\}} |\rho_n \star u|^p \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Il est claire que $\chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n \star u|^p \longrightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Et on a $\rho_n \star u \to u$ dans $L^p(\Omega)$, d'après le théorème de Lebesgue inverse, il existe sous-suite notée encore $\rho_n \star u$ et une fonction $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telles que $|\rho_n \star u| \leq g$ et par conséquent $\chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n \star u| \leq g$. D'où en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n \star u|^p \mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\|\phi_n - \rho_n \star u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent

$$\|\phi_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi_n - \rho_n \star u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n \star u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

De la même manière on montre que $\mathrm{D}^\alpha \phi_n \to \mathrm{D}^\alpha u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. □

2 Densité dans un ouvert Ω

On essaye maintenant de généraliser le résultat de densité prouvé dans $\mathbb{R}^N$ à un ouvert quelconque Ω de $\mathbb{R}^n$. L'idée naturelle est de prolonger les fonctions définies sur Ω à $\mathbb{R}^N$ et d'appliquer la densité dans $\mathbb{R}^N$. Or le prolongent des fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ n'est pas toujours possible car il nécessite des conditions sur le bord de Ω. C'est l'objet de la section suivant.

Définition 2.1. *Soit $P : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ une application. On dit que P est un opérateur de prolongement de $W^{k,p}(\Omega)$ si elle linéaire et continue et satisfait*

$$Pu_{|\Omega} = u \text{ p.p. sur } \Omega, \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

On a donc le résultat de densité suivant :

Théorème 2.1. *S'il existe un opérateur de prolongement de $W^{k,p}(\Omega)$, alors l'espace*

$$E := \{v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega) \mid \exists\, \overline{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : v = \overline{v}_{|\overline{\Omega}}\}$$

est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$. En particulier $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$. D'après l'hypothèse de théorème on a $Pu \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. D'après la preuve du théorème 1.2, on a

$$\zeta_n(\rho_n \star Pu) \longrightarrow Pu \text{ dans } W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

Par conséquent

$$\|\zeta_n(\rho_n \star Pu)_{|\Omega} - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|\zeta_n(\rho_n \star Pu) - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$$

Donc

$$u_n := \zeta_n(\rho_n \star Pu)_{|\Omega} \in E \text{ et } u_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{k,p}(\Omega).$$

Ce qui fini la preuve. □

Remarque 2.1. *L'espace des fonction test $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{k,p}(\Omega)$ si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.*

Exercice 1. *Montrer que l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

3 Existence de l'opérateur de prolongement

Définition 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ . On dit que Γ (ou Ω) est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), si pour tout $x_0 \in \Gamma$, il existe une boule $B(x_0, r)$ et une application bijective de $B(x_0, r)$ dans un ouvert W telles que*

1. $\psi : B(x_0, r) \longrightarrow W$ *est un k-difféomorphisme (ψ et ψ^{-1} sont k fois différentiables).*
2. $\psi(\Omega \cap B(x_0, r)) = W \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^N : x_n > 0\}$.
3. $\psi(\Gamma \cap B(x_0, r)) = W \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^N : x_n = 0\}$.

Le résultat suivant donne un critère pour la prolongation dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe un opérateur de prolongement*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

4 Trace et formule de Green

4.1 Notion de trace

Si $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ alors la fonction Tu définie sur $\partial\Omega$ par $Tu := u_{|\partial\Omega}$ est bien défini et elle est dans $\mathcal{C}(\partial\Omega)$. Elle s'appelle la trace de la fonction u sur $\partial\Omega$. On a donc bien définit une application linéaire

$$T : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\Omega}).$$

qui est continue avec la norme L^∞. Maintenant si u appartient à $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ et n'appartient pas à $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors il est claire que $Tu := u_{|\Omega}$ n'est pas bien définie car $\partial\Omega$ est négligeable et on ne peut pas avoir des informations de u sur $\partial\Omega$. Mais en fait, on peut donner un sens à Tu si u appartient l'espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. En effet, on peut montrer que que l'application

$$T : (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \longrightarrow (L^p(\partial\Omega), \|.\|_{L^p(\partial\Omega)})$$

est continue et grâce à la densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut généraliser la définition de T à l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Et on a le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe une application linéaire et continue $T : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ telle que*

$$Tu = u_{|\partial\Omega} \text{ si } u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$

($L^p(\partial\Omega)$ est muni de la mesure surfacique sur $\partial\Omega$).

Définition 4.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La fonction $Tu \in L^p(\partial\Omega)$ s'appelle trace de u sur $\partial\Omega$.*

Remarque 4.1. *1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors*

$$Tu = \lim_{n\to\infty} Tu_n := \lim_{n\to\infty} u_{n|\partial\Omega} \text{ où } u_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), u_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega).$$

En effet, grâce à la continuité de T, on a

$$\|Tu - Tu_n\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

2. L'application T n'est pas surjective. C'est à dire l'image $T(W^{1,p}(\Omega))$ est un sous-ensemble strictement inclus dans $L^p(\partial\Omega)$.

Définition 4.2. *L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est le rang de l'opérateur de trace*

$$T : H^1(\Omega) := W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Remarque 4.2. *L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ coïncide avec l'espace de Sobolev fractionnaire H^s avec $s = 1/2$. De plus l'opérateur de trace T est continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $H^{1/2}$ muni de la norme*

$$\|u\|_{H^{1/2}} := \|u\|_{L^2} + \int\int \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ce type des espaces de Sobolev fractionnaires n'est pas abordé dans ce cours.

4.2 Formule de Green

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ alors on a la formule d'intégration par partie suivante

$$\int_\Omega \partial_i uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\ n_i \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}x\ \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

où $\overrightarrow{n} = (n_1, ..., n_N)$ est le vecteur unitaire de la normal extérieur à $\partial\Omega$. Grâce à la densité de $\mathcal{C}^1$ dans $H^1(\Omega)$ (Théorème 2.1) et la continuité de l'opérateur de trace T (Théorème 4.1), on peut généraliser la formule ci-dessus pour toutes les fonctions dans $H^1(\Omega)$ et on a la formule suivante qui s'appelle formule de Green

Théorème 4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a*

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \partial_i uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} TuTv\ n_i \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}x\ \forall i \in \{1, ..., N\}. \tag{4.1}$$

Remarque 4.3. *S'il n'y a pas de confusion on écrit*

$$\int_{\partial\Omega} uv\ n_i \mathrm{d}\sigma \text{ au lieu de } \int_{\partial\Omega} TuTv\ n_i \mathrm{d}\sigma.$$

Corollaire 4.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega \Delta uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} T\frac{\partial u}{\partial n} Tv \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u.\overrightarrow{n} \in H^1(\Omega)$. (Pour la simplicité, on écrit

$$\boxed{\int_\Omega \Delta uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x}).$$

Remarque 4.4. *La formule de Green reste valable pour des fonction* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.